Über die Quasiideale von Ringen.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor L. Rédei gewidmet.

Von O. STEINFELD in Szeged.

§ 1. Einleitung.

In zwei früheren Arbeiten [4], [5] haben wir die Quasiideale eines Ringes bzw. einer Halbgruppe definiert und einige Eigenschaften von ihnen festgestellt. Hier wollen wir diese Untersuchungen bezüglich Quasiideale der Ringe fortsetzen.

Wie in [4] wird ein Untermodul $\mathfrak{a}$ des Ringes R ein *Quasiideal* genannt, wenn

$$R\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}R \subseteq \mathfrak{a} \tag{1}$$

erfüllt ist. (Also ist jedes Links- oder Rechtsideal ein Quasiideal.) Ein Quasiideal, Linksideal, Rechtsideal $\mathfrak{a}$ von R heißt *trivial*, wenn $\mathfrak{a} = (0)$ oder $\mathfrak{a} = R$ gilt. Ferner nennen wir ein Quasiideal $\mathfrak{b}$ von R *minimal*, wenn R kein Quasiideal $\mathfrak{b}'$ mit $(0) \subset \mathfrak{b}' \subset \mathfrak{b}$ hat. (Letztere Definition entspricht genau dem bekannten Begriff der minimalen Links- oder Rechtsideale.)

Wir faßen den Inhalt vorliegender Arbeit kurz zusammen:

Im § 2 machen wir einige einfache Vorbereitungen, wobei wir auch die Resultate der Arbeit [4] (ohne Beweis) wiederholen. Wir heben die leichten Resultate hervor, daß jedes Quasiideal ein Unterring ist und der Durchschnitt eines Links- und Rechtsideals ein Quasiideal ist.

Im § 3 beschäftigen wir uns mit den minimalen Quasiidealen. Es wird bewiesen, daß für ein minimales Linksideal $\mathfrak{l}$ und ein minimales Rechtsideal $\mathfrak{r}$ eines Ringes R sowohl der Durchschnitt $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$ als auch das Produkt $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ entweder (0) oder ein minimales Quasiideal von R ist.[1]) Als Hauptresultat bekommen wir, daß ein minimales Quasiideal von R ein Zeroring[2]) oder ein Schiefkörper ist. Aus diesen Ergebnissen folgt unmittelbar, daß der Durch-

[1]) Ob das Produkt $\mathfrak{l}\mathfrak{r}\,(\neq (0))$ ein minimales Ideal von R ist, ist eine offene Frage.

[2]) Unter einem *Zeroring* versteht man einen Ring, in welchem das Produkt von zwei beliebigen Elementen stets Null ist.

schnitt $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$ und das Produkt $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ ein Zeroring oder ein Schiefkörper ist. Wir geben auch eine hinreichende Bedingung an, damit ein mindestens ein minimales Quasiideal enthaltender Ring einer mit Einselement ist.

Im § 4 beweisen wir einige Eigenschaften der minimalen Quasiideale eines Ringes ohne Radikal.[3]) Es gilt u. a., daß jedes minimale Quasiideal eines solchen Ringes als der Durchschnitt eines geeigneten minimalen Linksideals und minimalen Rechtsideals darstellbar ist.

§ 2. Allgemeines über Quasiideale.

Lemma 1. *Jedes Quasiideal $\mathfrak{a}$ eines Ringes R ist ein Unterring von R*

Beweis. Nach der Definition des Quasiideals ist $\mathfrak{a}$ ein Modul. Wegen $\mathfrak{a}^2 \subseteqq R\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}R \subseteqq \mathfrak{a}$ ist $\mathfrak{a}$ ein Unterring von R.

Lemma 2 (Steinfeld [4] Satz 3). *Ein Schiefkörper hat nur triviale Quasiideale.*

Lemma 3 (Steinfeld [4] Satz 2). *Enthält der Ring R mindestens ein nicht-triviales Quasiideal, so besitzt er auch mindestens ein nicht-triviales Linksideal und Rechtsideal.*

Lemma 4. *Der Durchschnitt von zwei Quasiidealen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ eines Ringes R ist ein Quasiideal von R.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$. Da $\mathfrak{a}_0$ ein Modul ist und wegen

$$R\mathfrak{a}_0 \cap \mathfrak{a}_0 R \subseteqq \begin{cases} R\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_1 R \subseteqq \mathfrak{a}_1 \\ R\mathfrak{a}_2 \cap \mathfrak{a}_2 R \subseteqq \mathfrak{a}_2 \end{cases}$$

auch

$$R\mathfrak{a}_0 \cap \mathfrak{a}_0 R \subseteqq \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_0$$

gilt, ist unsere Behauptung richtig.

Ähnlich sieht man folgendes ein:

Lemma 5. *Der Durchschnitt eines Quasiideals und eines Unterringes S des Ringes R ist ein Quasiideal von S.*

Lemma 6. *Der Durchschnitt eines Linksideals und eines Rechtsideals eines Ringes R ist ein Quasiideal von R.*[4])

---

[3]) Ein *Ring ohne Radikal* ist ein Ring, in dem das Nullideal das einzige nilpotente einseitige Ideal ist.

[4]) Wir bemerken, daß in Halbgruppen auch die Umkehrung gilt (Steinfeld [5] Satz 1), daß jedes Quasiideal als der Durchschnitt eines geeigneten Links- und Rechtsideals darstellbar ist. Das ähnliche ringtheoretische Problem von Professor L. Fuchs ist noch eine offene Frage. Diesbezüglich siehe doch Korollar 1.

Beweis. Da ein einseitiges Ideal des Ringes R ein Quasiideal von R ist, folgt Lemma 6 unmittelbar aus Lemma 4.

Lemma 7 (STEINFELD [4] Hilfssatz 2). *Wenn es für ein Quasiideal* $\mathfrak{a}$ *des Ringes* R *entweder* $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}R$ *oder* $\mathfrak{a} \subseteq R\mathfrak{a}$ *gilt, so ist* $\mathfrak{a}$ *der Durchschnitt eines geeigneten Links- und Rechtsideals.*

Daraus folgt sofort:

Korollar 1 (STEINFELD [4]). *Wenn der Ring* R *ein einseitiges Einselement enthält, so ist jedes Quasiideal von* R *als Durchschnitt eines Linksideals und eines Rechtsideals darstellbar.*

Lemma 8. *Es sei* ε *ein idempotentes Element,* $\mathfrak{l}$ *ein Linksideal,* $\mathfrak{r}$ *ein Rechtsideal des Ringes* R. *Dann sind* $\varepsilon\mathfrak{l}$ *und* $\mathfrak{r}\varepsilon$ *Quasiideale von* R, *ferner gilt auch*

$$\varepsilon\mathfrak{l} = \mathfrak{l} \cap \varepsilon R \quad \text{und} \quad \mathfrak{r}\varepsilon = R\varepsilon \cap \mathfrak{r}. \tag{2}$$

Beweis. Es genügt wegen Lemma 6 z. B. die Behauptung (2_1) nachzuweisen. Da $\varepsilon\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{l} \cap \varepsilon R$ offenbar gilt, haben wir nur $\mathfrak{l} \cap \varepsilon R \subseteq \varepsilon\mathfrak{l}$ einzusehen. Jedes Element des Durchschnitts $\mathfrak{l} \cap \varepsilon R$ ist in der Form

$$\varepsilon\varrho = \lambda \qquad (\varrho \in R, \lambda \in \mathfrak{l}) \tag{3}$$

darstellbar. Multiplizieren wir von links beide Seiten von (3) mit ε, so bekommen wir wegen $\varepsilon^2 = \varepsilon$:

$$\varepsilon^2\varrho = \varepsilon\varrho = \varepsilon\lambda \in \varepsilon\mathfrak{l},$$

woraus $\mathfrak{l} \cap \varepsilon R \subseteq \varepsilon\mathfrak{l}$ folgt.

§ 3. Ergebnisse über minimale Quasiideale.

Es gilt die folgende Verschärfung vom Lemma 6:

Satz 1. *Der Durchschnitt eines minimalen Links- und Rechtsideals eines Ringes* R *ist* (0) *oder ein minimales Quasiideal von* R.

Beweis. Es sei der Durchschnitt $\mathfrak{a}$ eines minimalen Linksideals $\mathfrak{l}$ und eines minimalen Rechtsideals $\mathfrak{r}$ von Null verschieden. Nach Lemma 6 ist $\mathfrak{a}$ ein Quasiideal. Setzen wir voraus, daß $\mathfrak{a}$ nicht minimal ist, so gibt es ein Quasiideal $\mathfrak{a}'(\neq (0))$ mit $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}$. Da auch $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{l}$ gilt, muß es wegen der Minimalität von $\mathfrak{l}$ entweder $R\mathfrak{a}' = (0)$ oder $R\mathfrak{a}' = \mathfrak{l}$ bestehen. Der Fall $R\mathfrak{a}' = (0)$ ist unmöglich; im entgegengesetzen Fall wäre nämlich $\mathfrak{a}'$ ein Linksideal von R mit $(0) \subset \mathfrak{a}' \subset \mathfrak{l}$, was der Minimalität von $\mathfrak{l}$ widerspricht. Folglich muß $R\mathfrak{a}' = \mathfrak{l}$ erfüllt sein. Ebenso sieht man ein, dass $\mathfrak{a}'R = \mathfrak{r}$ gilt. Daraus bekommen wir wegen der Definition des Quasiideals

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{l}\cap\mathfrak{r}=R\mathfrak{a}'\cap\mathfrak{a}'R\subseteqq\mathfrak{a}',$$

was der Bedingung $\mathfrak{a}'\subset\mathfrak{a}$ widerspricht. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Zu dem folgenden benutzen wir den

Hilfssatz (VAN DER WAERDEN [6] § 123). *Ein minimales Linksideal $\mathfrak{l}$ eines Ringes R ist entweder nilpotent, und zwar ist dann schon $\mathfrak{l}^2=(0)$, oder enthält $\mathfrak{l}$ ein idempotentes Element ε und wird von diesem erzeugt:*

$$\varepsilon^2=\varepsilon \quad in\ \mathfrak{l}, \quad \mathfrak{l}=R\varepsilon.$$

Satz 2. *Ist $\mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{l}$ ein minimales Rechtsideal bzw. minimales Linksideal des Ringes R, so ist $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ entweder (0) oder ein minimales Quasiideal von R.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{r}\mathfrak{l}\neq(0)$. Da $((0)\neq)\,\mathfrak{r}\mathfrak{l}\subseteqq\mathfrak{l}\cap\mathfrak{r}$ gilt, genügt es wegen Satz 1 zu beweisen, daß $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ ein Quasiideal von R ist. Zu diesem Zweck betrachten wir den Durchschnitt $D=R\mathfrak{r}\mathfrak{l}\cap\mathfrak{r}\mathfrak{l}R$. Offenbar gilt $D\subseteqq\mathfrak{l}\cap\mathfrak{r}$. Wegen Lemma 6 und Satz 1 besteht entweder

$$D=R\mathfrak{r}\mathfrak{l}\cap\mathfrak{r}\mathfrak{l}R=(0) \tag{4}$$

oder

$$D=R\mathfrak{r}\mathfrak{l}\cap\mathfrak{r}\mathfrak{l}R=\mathfrak{l}\cap\mathfrak{r}. \tag{5}$$

Im Falle (4) ist $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ offenbar ein Quasiideal von R.

Aus (5) folgt wegen der Minimalität von $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{r}$ auch $R\mathfrak{r}\mathfrak{l}=\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{r}\mathfrak{l}R=\mathfrak{r}$. Wir behaupten, daß $\mathfrak{l}^2\neq(0)$ ist. Im entgegengesetzen Falle bekommen wir nämlich wegen $\mathfrak{r}\mathfrak{l}=\mathfrak{r}\mathfrak{l}R\cdot R\mathfrak{r}\mathfrak{l}\subseteqq\mathfrak{r}\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{l}=(0)$ einen Widerspruch mit der Annahme. So gilt nach dem Hilfssatz $\mathfrak{l}=R\varepsilon$ mit einem idempotenten Element ε von $\mathfrak{l}$, woraus wegen Lemma 8 folgt, daß $\mathfrak{r}\mathfrak{l}=\mathfrak{r}R\varepsilon=\mathfrak{r}\varepsilon$ wieder ein Quasiideal von R ist. Damit haben wir Satz 2 bewiesen.

Jetzt beweisen wir unser Hauptresultat:

Satz 3. *Jedes minimale Quasiideal $\mathfrak{a}$ eines Ringes R ist entweder ein Zeroring oder ein Schiefkörper, welches in der Form $\mathfrak{a}=\varepsilon R\varepsilon$ darstellbar ist, wo ε das Einselement dieses Schiefkörpers bezeichnet.*[5])

Beweis. Wenn für jedes von Null verschiedene Elementepaar $\alpha,\beta\in\mathfrak{a}$

$$R\beta\cap\alpha R=(0) \tag{6}$$

gilt, so ist wegen $\alpha\beta\in R\beta\cap\alpha R$ das Produkt $\alpha\beta$ gleich Null, d. h. $\mathfrak{a}$ ist dann ein Zeroring, weshalb jetzt der Satz richtig ist.

---

[5]) Dies ist analog zum Satz 4a von [5].

Wenn dagegen ein Elementepaar $\alpha, \beta (\in \mathfrak{a}, \alpha \neq 0, \beta \neq 0)$ existiert, wofür (6) nicht erfüllt ist, so besteht wegen Lemma 6 und der Minimalität von $\mathfrak{a}$

$$R\beta \cap \alpha R = \mathfrak{a} \qquad (\alpha, \beta \in \mathfrak{a}). \tag{7}$$

Nach (7) kann man jedes Element ξ von $\mathfrak{a}$ in der Form

$$\xi = \varrho\beta = \alpha\sigma \qquad (\xi \in \mathfrak{a};\quad \varrho, \sigma \in R) \tag{8}$$

schreiben. Insbesondere für die Elemente $\alpha, \beta (\in \mathfrak{a})$ bestehen:

$$\alpha = \varepsilon_1\beta = \alpha\varepsilon_2 \qquad (\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in R), \tag{9}$$

$$\beta = \eta_1\beta = \alpha\eta_2 \qquad (\eta_1, \eta_2 \in R), \tag{10}$$

aus denen wegen $\beta\alpha = \eta_1\beta\alpha = \beta\alpha\varepsilon_2$

$$\beta\alpha \in R\beta\alpha \cap \beta\alpha R \tag{11}$$

folgt.

Ist $\beta\alpha = 0$, so sieht man aus (8), daß das Produkt von zwei beliebigen Elementen von $\mathfrak{a}$ Null ist; d. h. $\mathfrak{a}$ ist wieder ein Zeroring.

Im restlichen Fall ist $\beta\alpha \neq 0$. Dann ist wegen (11) auch $R\beta\alpha \cap \beta\alpha R$ von Null verschieden, also muß wieder wegen Lemma 6 und der Minimalität von $\mathfrak{a}$

$$R\beta\alpha \cap \beta\alpha R = \mathfrak{a} \tag{12}$$

bestehen. Aus (12) folgt, daß $\alpha, \beta (\in \mathfrak{a})$ auch in der Form

$$\alpha = \mu_1\beta\alpha = \beta\alpha\mu_2,\quad \beta = \nu_1\beta\alpha = \beta\alpha\nu_2 \qquad (\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2 \in R) \tag{13}$$

darstellbar sind.

Betrachten wir jetzt das Element $\mu_1\beta\alpha\nu_2$. Dieses kann man nach (13) auch in der Form

$$\mu_1\beta\alpha\nu_2 = \alpha\nu_2 = \mu_1\beta \qquad (\nu_2, \mu_1 \in R) \tag{14}$$

schreiben.

Aus (13) und $\beta \neq 0$ folgt $\alpha\nu_2 \neq 0$. Wegen (14) und (7) ist $\alpha\nu_2$ in $\mathfrak{a}$ enthalten. Ferner besteht wieder wegen (14) auch $\alpha\nu_2 \cdot \alpha\nu_2 = \mu_1\beta \cdot \alpha\nu_2 = \alpha\nu_2$. Folglich ist $\alpha\nu_2 (\neq 0)$ ein idempotentes Element von $\mathfrak{a}$. Bezeichnen wir es der Einfachkeit halber mit $\varepsilon (= \alpha\nu_2)$. Wegen $(0 \neq) \varepsilon \in R\varepsilon \cap \varepsilon R$, wegen Lemma 6 und der Minimalität von $\mathfrak{a}$ muß

$$R\varepsilon \cap \varepsilon R = \mathfrak{a} \qquad (\varepsilon^2 = \varepsilon \in \mathfrak{a}) \tag{15}$$

bestehen. Da wir wegen (2) $\varepsilon R \varepsilon$ statt der linken Seite von (15) schreiben können, ist auch

$$\mathfrak{a} = \varepsilon R \varepsilon \qquad (\varepsilon^2 = \varepsilon \in \mathfrak{a}) \tag{16}$$

richtig. Wir beweisen, daß $\mathfrak{a} = \varepsilon R \varepsilon$ ein Schiefkörper ist. Da $\mathfrak{a}$ nach Lemma 1 ein Ring und ε wegen (16) ein linksseitiges Einselement von $\mathfrak{a}$ ist, brauchen wir nur einzusehen, daß es zu jedem Element $\varepsilon\varrho\varepsilon(\neq 0, \in \mathfrak{a})$ mindestens ein Element $\varepsilon\sigma\varepsilon$ mit $\varepsilon\sigma\varepsilon\cdot\varepsilon\varrho\varepsilon=\varepsilon$ gibt. Da einerseits $\varepsilon R\varepsilon\cdot\varepsilon\varrho\varepsilon\neq(0)$, andererseits $\varepsilon R\varepsilon\cdot\varepsilon\varrho\varepsilon\subseteqq\varepsilon R\varepsilon=\mathfrak{a}$ gilt, muß wegen Lemma 8 und der Minimalität von $\mathfrak{a}$

$$\varepsilon R\varepsilon\cdot\varepsilon\varrho\varepsilon=\varepsilon R\varepsilon=\mathfrak{a}$$

erfüllt sein, womit unsere Behauptung und zugleich Satz 3 bewiesen ist.

Aus den Sätzen 1, 2, 3 und dem Hilfssatz bekommen wir leicht die folgenden Ergebnisse, die als ein ringtheoretisches Analogon der Resultate von CLIFFORD [2] Lemmas 3·2, 3·3, 3·4 betrachtet werden können.

Korollar 2. *Ist $\mathfrak{l}$ bzw. $\mathfrak{r}$ ein minimales Linksideal bzw. minimales Rechtsideal des Ringes R, so gelten:*

A) *Jedes von $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}\cap\mathfrak{r}$ ist entweder ein Zeroring oder ein Schiefkörper,*[6]

B) *im Falle $\mathfrak{l}^2\neq(0)$ und $\mathfrak{r}^2\neq(0)$ ist $\mathfrak{l}=R\varepsilon_k$ $(\varepsilon_k^2=\varepsilon_k)$, $\mathfrak{r}=\varepsilon_i R$ $(\varepsilon_i^2=\varepsilon_i)$, $\mathfrak{r}\mathfrak{l}=\mathfrak{l}\cap\mathfrak{r}=\varepsilon_i R\varepsilon_k$.*

Wir bemerken, daß für ein minimales Linksideal $\mathfrak{l}$ und minimales Rechtsideal $\mathfrak{r}$ eines Ringes die Gleichung $\mathfrak{r}\mathfrak{l}=\mathfrak{l}\cap\mathfrak{r}$ im allgemeinen falsch ist.[7] Z. B. ist nämlich in dem Ring der Elemente $0, a, b, a+b$ mit den definierenden Relationen $2a=2b=0$, $a^2=a$, $ab=b$, $ba=b^2=0$ das Hauptideal (b) ein minimales Linksideal und zugleich ein minimales Rechtsideal. Wegen $(b)^2=(0)$ und $(b)\cap(b)=(b)$ ist unsere Bemerkung richtig.

Ein Teil vom Satz 3 läßt sich umkehren:

Satz 4. *Wenn ein Quasiideal $\mathfrak{a}$ eines Ringes R ein Schiefkörper ist, so ist $\mathfrak{a}$ ein minimales Quasiideal von R.*

Beweis. Setzen wir voraus, daß $\mathfrak{a}$ nicht minimal ist. Dann gibt es ein Quasiideal $\mathfrak{a}'$ mit

$$(0)\subset\mathfrak{a}'\subset\mathfrak{a}. \tag{17}$$

Da $\mathfrak{a}'$ wegen $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\cap\mathfrak{a}'\mathfrak{a}\subseteqq R\mathfrak{a}'\cap\mathfrak{a}'R\subseteqq\mathfrak{a}'$ ein Quasiideal des Schiefkörpers $\mathfrak{a}$ ist, so widerspricht (17) dem Lemma 2, womit Satz 4 bewiesen ist.

Folgendes Beispiel zeigt, daß ähnliches für ein Quasiideal, das ein Zeroring ist, im allgemeinen falsch ist. Im Ringe R_n $(n\geqq 3)$ aller $n\times n$ Matrizen über dem Ring R ist nämlich die Menge $\mathfrak{a}$ der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \qquad (a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}\in R)$$

[6]) Es ist leicht die Behauptung über $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ unmittelbar (ohne Sätze 1, 2, 3) zu beweisen.

[7]) L. KOVÁCS [3] gab eine notwendige und hinreichende Bedingung, damit es für alle Linksideale $\mathfrak{l}$, Rechtsideale $\mathfrak{r}$ eines Ringes die Bedingung $\mathfrak{r}\mathfrak{l}=\mathfrak{l}\cap\mathfrak{r}$ gilt.

offenbar ein Quasiideal und zugleich ein Zeroring, jedoch ist $\mathfrak{a}$ kein minimales Quasiideal von R_n.

Wir beweisen noch zwei Sätze im Zusammenhang mit den minimalen Quasiidealen eines Ringes.

Satz 5. *Wenn $\mathfrak{l}$ ($\mathfrak{r}$) ein minimales Linksideal (Rechtsideal) und $\varepsilon \in \mathfrak{l}$ ($\varepsilon \in \mathfrak{r}$) ein idempotentes Element des Ringes R ist, so ist $\varepsilon\mathfrak{l}$ ($\mathfrak{r}\varepsilon$) ein Schiefkörper, sogar ein minimales Quasiideal von R.*

Beweis. Es genügt unsere Behauptung bezüglich $\varepsilon\mathfrak{l}$ nachzuweisen. Da $\varepsilon\mathfrak{l}$ nach Lemma 8 ein Quasiideal von R ist, haben wir wegen Satz 4 nur zu beweisen, daß $\varepsilon\mathfrak{l}$ ein Schiefkörper ist. Da $\varepsilon\mathfrak{l}$ nach Lemma 1 ein Unterring von R ist, so haben wir nur einzusehen, daß die Menge der von Null verschiedenen Elemente von $\varepsilon\mathfrak{l}$ eine Gruppe ist. ε ist offenbar ein linksseitiges Einselement von $\varepsilon\mathfrak{l}$. Es sei $\varepsilon\lambda(\neq 0, \lambda \in \mathfrak{l})$ ein beliebiges Element von $\varepsilon\mathfrak{l}$. Wegen $\varepsilon, \lambda \in \mathfrak{l}$ und $\varepsilon^2 = \varepsilon$ gilt $(0) \neq \mathfrak{l} \cdot \varepsilon\lambda \subseteq \mathfrak{l}$, woraus wegen der Minimalität des Linksideals $\mathfrak{l}$

$$\mathfrak{l} \cdot \varepsilon\lambda = \mathfrak{l}$$

folgt. Hiernach gilt $\varepsilon\mathfrak{l} \cdot \varepsilon\lambda = \varepsilon\mathfrak{l}$, woraus man sieht, daß es für jedes $\varepsilon\lambda(\neq 0, \in \varepsilon\mathfrak{l})$ mindestens ein Element $\varepsilon\lambda' \in \varepsilon\mathfrak{l}$ mit $\varepsilon\lambda' \cdot \varepsilon\lambda = \varepsilon$ gibt. Somit ist $\varepsilon\mathfrak{l}$ ein Schiefkörper, was unseren Beweis beendet.

Satz 6. *Enthält ein minimales Quasiideal $\mathfrak{a}$ eines Ringes R mindestens ein reguläres[*]) Element von R, so hat R sein Einselement.*

Beweis. Für ein reguläres Element $\alpha(\in \mathfrak{a})$ des Ringes R gilt $\alpha^2 \neq 0$, also muß wegen Lemma 6 und der Minimalität des Quasiideals $\mathfrak{a}$

$$(0 \neq \alpha^2 \in) R\alpha \cap \alpha R = \mathfrak{a}$$

bestehen, woraus $\mathfrak{a} \subseteq R\alpha$ folgt. Hiernach gibt es zu dem Element $\alpha(\in \mathfrak{a})$ mindestens ein Element $\varepsilon(\in R)$ mit

$$\varepsilon\alpha = \alpha \qquad (\varepsilon \in R, \alpha \in \mathfrak{a}). \tag{18}$$

Wegen der Regularität von α ist das Element ε eindeutig bestimmt. Für irgendein Element $\varrho(\in R)$ folgt aus (18) $\varrho\varepsilon\alpha = \varrho\alpha$, woraus wir wieder wegen der Regularität von α

$$\varrho\varepsilon = \varrho \qquad (\varrho \in R) \tag{19}$$

bekommen. ε ist also ein rechtsseitiges Einselement von R. Aus (19) folgt insbesondere $\alpha\varepsilon = \alpha$ $(\alpha \in \mathfrak{a})$. Hieraus ergibt sich, wie oben, die Gleichung $\varepsilon\varrho = \varrho$ $(\varrho \in R)$, womit Satz 6 bewiesen ist.

---

*) Ein Element α des Ringes R heißt *regulär,* wenn für α die zweiseitige Kürzungsregel gilt.

§ 4. Über Ringe ohne Radikal.

Wir beweisen, daß für die Ringe ohne Radikal folgende Umkehrung vom Satz 1 gilt.

Satz 7. *Jedes minimale Quasiideal* $\mathfrak{a}$ *eines Ringes* R *ohne Radikal ist der Durchschnitt eines geeigneten minimalen Linksideals und minimalen Rechtsideals, folglich gilt* $\mathfrak{a}=\varepsilon_i R \varepsilon_k$ $(\varepsilon_i^2=\varepsilon_i,\ \varepsilon_k^2=\varepsilon_k)$.

Beweis. Wegen (1) und der Minimalität von $\mathfrak{a}$ sind nur die folgenden zwei Fälle

$$R\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}R=\begin{cases}(0)\\ \mathfrak{a}\end{cases} \tag{20}$$

möglich.

Es sei zuerst $R\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}R=(0)$. Es ist entweder $R\mathfrak{a}=(0)$ oder $R\mathfrak{a}\neq(0)$ erfüllt. Im Falle $R\mathfrak{a}=(0)$ bildet $\mathfrak{a}\neq(0)$ ein Linksideal mit $\mathfrak{a}^2=(0)$, was der Voraussetzung, daß R ohne Radikal ist, widerspricht. Im Falle $R\mathfrak{a}\neq(0)$ betrachten wir das Produkt $\mathfrak{a}R\mathfrak{a}$. Dieses ist wegen $\mathfrak{a}R\mathfrak{a}\supseteq R\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}R=(0)$ gleich Null, woraus $R\mathfrak{a}\cdot R\mathfrak{a}=(0)$ folgt, was wegen $R\mathfrak{a}\neq(0)$ wieder unmöglich ist.

Es sei dann $R\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}R=\mathfrak{a}$. Wir behaupten, daß $R\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{a}R$ ein minimales Linksideal bzw. minimales Rechtsideal von R ist. Es genügt die Behauptung über $R\mathfrak{a}$ zu beweisen. Setzen wir voraus, daß $R\mathfrak{a}$ nicht minimal ist. So existiert ein Linksideal $\mathfrak{l}$ mit

$$(0)\subset\mathfrak{l}\subset R\mathfrak{a}. \tag{21}$$

Wegen Lemma 6 und der Minimalität von $\mathfrak{a}$ folgt aus $R\mathfrak{l}\cap\mathfrak{a}R\subseteq R\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}R=\mathfrak{a}$ entweder

$$R\mathfrak{l}\cap\mathfrak{a}R=(0) \tag{22}$$

oder

$$R\mathfrak{l}\cap\mathfrak{a}R=\mathfrak{a}. \tag{23}$$

Im Falle (22) besteht wegen $\mathfrak{a}\mathfrak{l}\subseteq R\mathfrak{l}\cap\mathfrak{a}R=(0)$ auch $\mathfrak{a}\mathfrak{l}=(0)$. Das impliziert $R\mathfrak{a}\mathfrak{l}=(0)$, woraus wegen (21) $\mathfrak{l}^2=(0)$ folgt, was aber unmöglich ist.

Im Falle (23) gilt wegen $\mathfrak{a}\subseteq R\mathfrak{l}\subseteq\mathfrak{l}$

$$R\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{l},$$

was der Annahme (21) widerspricht. Damit ist die erste Behauptung des Satzes bewiesen.

Aus Hilfssatz, Lemma 8 und aus dem ersten Teil vom Satz 7 folgt unsere zweite Behauptung, was den Beweis beendet.

Satz 8 (Vgl. ARTIN—NESBITT—THRALL [1] Satz 5. 4 A). *$R\varepsilon$ ($\varepsilon^2=\varepsilon$) ist dann und nur dann ein minimales Linksideal eines Ringes R ohne Radikal, wenn $\varepsilon R\varepsilon$ ein minimales Quasiideal von R ist.*

Beweis. Ist $R\varepsilon$ ein minimales Linksideal von R, so ist nach Satz 5 $\varepsilon R\varepsilon$ ein minimales Quasiideal von R.

Umgekehrt, es sei $\varepsilon R\varepsilon$ ein minimales Quasiideal von R. Setzen wir voraus, daß $R\varepsilon$ nicht minimal ist. Dann hat R ein Linksideal $\mathfrak{l}$ mit $(0)\subset\mathfrak{l}\subset R\varepsilon$. Es gilt: $\mathfrak{l}=\mathfrak{l}\varepsilon$. Nach Lemma 8 ist $\varepsilon\mathfrak{l}\varepsilon(\subseteq\varepsilon R\varepsilon)$ ein Quasiideal von R. Es muß $\varepsilon\mathfrak{l}\varepsilon\neq(0)$ sein, denn aus $\varepsilon\mathfrak{l}\varepsilon=(0)$ folgt $\mathfrak{l}\varepsilon\cdot\mathfrak{l}\varepsilon=(0)$, was der Annahme, daß R ohne Radikal ist, widerspricht. Das Element $\varepsilon(\in\varepsilon R\varepsilon)$ ist in $\varepsilon\mathfrak{l}\varepsilon$ nicht enthalten; im entgegengesetzten Falle wäre nämlich auch $R\varepsilon\subseteq R\varepsilon\mathfrak{l}\varepsilon\subseteq\mathfrak{l}\varepsilon=\mathfrak{l}$ erfüllt, was der Bedingung $\mathfrak{l}\subset R\varepsilon$ widerspricht. Damit haben wir bekommen, daß im Widerspruch zur Minimalität des Quasiideals $\varepsilon R\varepsilon$ ein Quasiideal $\varepsilon\mathfrak{l}\varepsilon$ mit $(0)\subset\varepsilon\mathfrak{l}\varepsilon\subset\varepsilon R\varepsilon$ existiert. Das beendet den Beweis vom Satz 8.

Es ist noch zu bemerken, daß nach Satz 5 in jedem Ring R aus der Minimalität des Linksideals $R\varepsilon$ ($\varepsilon^2=\varepsilon$) die des Quasiideals $\varepsilon R\varepsilon$ folgt, aber die Umkehrung im allgemeinen falsch ist. Um letzteres mit einem Beispiel zu zeigen betrachten wir den Ring Q bestehend aus den Matrizen $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22}\end{pmatrix}$ wobei a_{11}, a_{12}, a_{22} alle Elemente eines Schiefkörpers K durchlaufen. Es bezeichnen e das Einselement von K und $\varepsilon_{12},\varepsilon_{22}$ die Matrizen $\begin{pmatrix} 0 & e \\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e\end{pmatrix}$. Es ist leicht einzusehen, daß $\varepsilon_{22}Q\varepsilon_{22}$ ein minimales Quasiideal von Q ist. Dagegen ist $Q\varepsilon_{22}$ kein minimales Linksideal von Q, weil $Q\varepsilon_{12}$ ein Linksideal von Q mit $(0)\subset Q\varepsilon_{12}\subset Q\varepsilon_{22}$ ist.

Da Satz 8 mit dem Rechtsideal εR statt $R\varepsilon$ ebenfalls gilt, bekommt man gleich das folgende bekannte:

Korollar 3 (ARTIN—NESBITT—THRALL [1] Korollar 5. 4 B). *$R\varepsilon$ ($\varepsilon^2=\varepsilon$) ist dann und nur dann ein minimales Linksideal des Ringes R ohne Radikal, wenn εR ein minimales Rechtsideal von R ist.*

Satz 9. *Sind die minimalen Linksideale $R\varepsilon_i, R\varepsilon_k$ ($\varepsilon_i^2=\varepsilon_i, \varepsilon_k^2=\varepsilon_k$) eines Ringes R ohne Radikal als Linksoperatormoduln operatorisomorph, so sind die minimalen Rechtsideale $\varepsilon_iR, \varepsilon_kR$ als Rechtsoperatormoduln operatorisomorph, und die minimalen Quasiideale $\varepsilon_iR\varepsilon_i, \varepsilon_kR\varepsilon_k$ als Ringe isomorph.*

Wir bemerken, daß die Rolle der minimalen Linksideale und Rechtsideale im Satz 9 natürlich vertauschbar ist.

Beweis vom Satz 9. Nach Korollar 3 sind $\varepsilon_iR, \varepsilon_kR$ minimale Rechtsideale von R. Da der Durchschnitt $\varepsilon_iR\varepsilon_i=\varepsilon_iR\cap R\varepsilon_i$ ($\varepsilon_kR\varepsilon_k=\varepsilon_kR\cap R\varepsilon_k$)

das Element $\varepsilon_i \neq 0$ $(\varepsilon_k \neq 0)$ enthält, so sind $\varepsilon_i R \varepsilon_i, \varepsilon_k R \varepsilon_k$ nach Satz 1 minimale Quasiideale von R. Wir beweisen, daß auch $\varepsilon_i R \varepsilon_k = \varepsilon_i R \cap R \varepsilon_k$ und $\varepsilon_k R \varepsilon_i = \varepsilon_k R \cap R \varepsilon_i$ minimale Quasiideale von R sind. Wegen Lemma 8 und Satz 1 genügt es einzusehen, daß $\varepsilon_i R \varepsilon_k$ und $\varepsilon_k R \varepsilon_i$ von Null verschieden sind.

Es bezeichne $\varrho\varepsilon_k (\in R\varepsilon_k)$ das Bild des Elementes $\varepsilon_i\ (\in R\varepsilon_i)$ bei einem gegebenen Operatorisomorphus von $R\varepsilon_i$ auf $R\varepsilon_k$. Dann wird das Bild des Elementes $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_i (\neq 0, \in R\varepsilon_i)$ wegen der Operatorisomorphie $\varepsilon_i \cdot \varrho\varepsilon_k = \varepsilon_i \varrho \varepsilon_k \neq 0$ sein, woraus $\varepsilon_i R \varepsilon_k \neq (0)$ folgt. Ähnlich sieht man ein, daß auch $\varepsilon_k R \varepsilon_i \neq (0)$ gilt.

Um einen Operatorisomorphus von $\varepsilon_i R$ auf $\varepsilon_k R$ anzugeben, betrachten wir ein festes Element $\varepsilon_k \alpha \varepsilon_i (\neq 0)$ von $\varepsilon_k R \varepsilon_i$. Wir behaupten, daß $\varepsilon_i \varrho \to \varepsilon_k \alpha \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \varrho$ eine gewünschte Abbildung ist. Diese ist offenbar (rechtsseitig) operatorhomomorph. Die Menge $\mathfrak{r}$ der Elemente von $\varepsilon_i R$, denen die Null zugeordnet ist. ist ein Rechtsideal $\subseteqq \varepsilon_i R$ von R, also gilt wegen der Minimalität von $\varepsilon_i R$ entweder $\mathfrak{r} = (0)$ oder $\mathfrak{r} = \varepsilon_i R$. Da das Bild von $\varepsilon_i \varepsilon_i$ bei der obigen Abbildung $\varepsilon_k \alpha \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \varepsilon_i = \varepsilon_k \alpha \varepsilon_i \neq 0$ ist, muß $\mathfrak{r} = (0)$ sein, was die behauptete Operatorisomorphie beweist.

Um einen Isomorphus von $\varepsilon_i R \varepsilon_i$ auf $\varepsilon_k R \varepsilon_k$ anzugeben, bezeichne $\varepsilon_i \alpha \varepsilon_k \neq 0$ ein festes Element von $\varepsilon_i R \varepsilon_k$. Wegen $(0) \neq R\varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k \subseteqq R\varepsilon_k$ und der Minimalität des Linksideals $R\varepsilon_k$ gilt $R\varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k = R\varepsilon_k$, woraus auch $\varepsilon_k R \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k = \varepsilon_k R \varepsilon_k$ folgt. Dies bedeutet, daß mindenstens ein Element $\varepsilon_k \beta \varepsilon_i (\neq 0, \in \varepsilon_k R \varepsilon_i)$ mit $\varepsilon_k \beta \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k = \varepsilon_k$ existiert. Wir behaupten, daß das Element $\varepsilon_i \alpha \varepsilon_k \cdot \varepsilon_k \beta \varepsilon_i$ von Null verschieden ist. Im entgegengesetzten Falle wäre $0 = \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k \cdot \varepsilon_k \beta \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k = \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k \cdot \varepsilon_k = \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k$, was unserer Annahme $\varepsilon_i \alpha \varepsilon_k \neq 0$ widerspricht. Da $\varepsilon_i \alpha \varepsilon_k \cdot \varepsilon_k \beta \varepsilon$ wegen

$$(\varepsilon_i \alpha \varepsilon_k \cdot \varepsilon_k \beta \varepsilon_i)^2 = \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k \cdot \varepsilon_k \beta \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k \cdot \varepsilon_k \beta \varepsilon_i = \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k \cdot \varepsilon_k \cdot \varepsilon_k \beta \varepsilon_i = \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k \cdot \varepsilon_k \beta \varepsilon_i$$

ein von Null verschiedenes idempotentes Element von $\varepsilon_i R \varepsilon_i$, und $\varepsilon_i R \varepsilon_i$ nach Satz 3 ein Schiefkörper ist, so muß $\varepsilon_i \alpha \varepsilon_k \cdot \varepsilon_k \beta \varepsilon_i$ mit dem Einselement ε_i von $\varepsilon_i R \varepsilon_i$ übereinstimmen. Wir beweisen, daß

$$\varepsilon_i \varrho \varepsilon_i \to \varepsilon_k \beta \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \varrho \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k$$

eine isomorphe Abbildung von $\varepsilon_i R \varepsilon_i$ auf $\varepsilon_k R \varepsilon_k$ ist. Da diese Abbildung die Inverse $\varepsilon_k \sigma \varepsilon_k \to \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k \cdot \varepsilon_k \sigma \varepsilon_k \cdot \varepsilon_k \beta \varepsilon_i$ hat, und bezüglich der Addition offenbar homomorph ist, endlich wegen

$$\varepsilon_i \varrho \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \sigma \varepsilon_i \to \varepsilon_k \beta \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \varrho \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \sigma \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k = \varepsilon_k \beta \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \varrho \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k \cdot \varepsilon_k \beta \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \sigma \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k$$

ähnliches auch bezüglich der Multiplikation gilt, so ist sie isomorph.

Literatur.

[1] E. Artin—C. J. Nesbitt—R. M. Thrall, *Rings with minimum condition* (Ann Arbor, Mich., 1948).

[2] A. H. Clifford, Semigroups containing minimal ideals, *Amer. J. Math.*, 70 (1948), 521—526.

[3] L. Kovács, A note on regular rings, *Publicationes Math. Debrecen*, 4 (1956), 465—468.

[4] O. Steinfeld, Bemerkung zu einer Arbeit von T. Szele, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 6 (1955), 479—484.

[5] O. Steinfeld, Über die Quasiideale von Halbgruppen, *Publicationes Math. Debrecen*, 4 (1956), 262—275.

[6] B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra* II (Berlin, 1955).

(Eingegangen am 12. Juli 1956.)