Eine Bemerkung zur Jordanschen Normalform von Matrizen.

Von VLASTIMIL PTÁK in Prag.

1. Es ist die Aufgabe der vorliegenden Bemerkung zu zeigen, daß die Theorie der Dualität, die sich in der letzten Zeit als ein mächtiges Mittel zum Studium der unendlich-dimensionalen Vektorräume erwiesen hat, keineswegs in ihren Anwendungen auf dieses Gebiet beschränkt ist. Sie kann auch in der klassischen Theorie der Matrizen angewendet werden, um — wenn auch nicht neue Resultate — so vielmehr ein tieferes Verständnis der geometrischen Substanz und Vereinfachung der Beweise zu erzielen.

Es scheint uns nämlich, daß es nur auf der geometrischen Basis möglich ist, zu den wahren Gründen der Theorie der Normalformen von Matrizen durchzudringen. Wir wollen zeigen, daß die gleichzeitige Betrachtung des gegebenen Raumes und seines dualen Raumes ermöglicht, zu den beiden Hauptsätzen der Theorie der Normalformen fast triviale Beweise anzugeben, obwohl die übliche Behandlung dieser Resultate in den Lehrbüchern viel mehr Zeit erfordert.

B e z e i c h n u n g e n. Es sollen zwei endlichdimensionale lineare Räume X und Y gegeben sein, die zueinander dual sind. Das Produkt der Vektoren $x \in X$ und $y \in Y$ soll nach BOURBAKI [1] mit $\langle x, y\rangle$ bezeichnet werden. Es sei A eine lineare Abbildung von X in sich selbst. Das Bild des Vektors x soll mit xA bezeichnet werden. Die konjugierte Abbildung A^* wird in der üblichen Weise durch

$$\langle xA, y\rangle = \langle x, yA^*\rangle$$

definiert.

Ein Unterraum $X_0 \subset X$ heißt invariant bezüglich A, wenn $x_0 A \in X_0$ für jedes $x_0 \in X_0$ gilt. Es sei M eine Untermenge von X. Die Menge aller $y \in Y$, für die $\langle M, y\rangle = 0$ gilt, werden wir den Annihilator von M nennen. Der Annihilator einer beliebigen Menge ist stets ein linearer Unterraum von Y.

Wir werden uns auf die folgenden zwei wohlbekannten Tatsachen aus der Theorie der Dualität stützen. Die Beweise sind hinzugefügt, obwohl es sich um durchaus triviale Schlüße handelt.

(1, 1) *Es sei Y_0 ein Unterraum von Y, der invariant bezüglich A^* ist. In diesem Falle ist der Annihilator von Y_0 invariant bezüglich A.*

Beweis. Es sei x_0 ein Element des Annihilators von Y_0. Wir sollen zeigen, daß auch $x_0 A$ zu diesem Annihilator gehört. Wir haben, da nach der Voraussetzung $Y_0 A^* \subset Y_0$ ist,

$$\langle x_0 A, Y_0\rangle = \langle x_0, Y_0 A^*\rangle = 0,$$

womit der Beweis erbracht ist.

(1, 2) *Sind die Unterräume $X_0 \subset X$ und $Y_0 \subset Y$ zueinander dual, so bildet X_0 mit dem Annihilator von Y_0 eine direkte Zerlegung von X.*

Beweis. Der Annihilator von Y_0 soll mit X_1 bezeichnet werden. Ist nun $x \in X_0 \cap X_1$, so folgt aus $x \in X_1$, daß $\langle x, Y_0\rangle = 0$. Da jedoch die Räume X_0 und Y_0 dual sind und $x \in X_0$ ist, so folgt $x = 0$. Wir haben also $X_0 \cap X_1 = (0)$. Aus der Dualität der Räume X_0 und Y_0 folgt $\dim X_0 = \dim Y_0$, weshalb $\dim X_1 = \dim X - \dim Y_0 = \dim X - \dim X_0$ ist. Es folgt $X = X_0 + X_1$, womit der Beweis beendet ist.

Die eben gewonnenen Resultate werden folgendermaßen verwendet. Soll man eine direkte Zerlegung $X = X_0 + X_1$ des gegebenen Raumes in zwei invariante Unterräume finden, so genügt es, zwei zueinander duale Unterräume $X_0 \subset X$ und $Y_0 \subset Y$ anzugeben derart, daß X_0 bezüglich A und Y_0 bezüglich A^* invariant ist. Bedeutet nun X_1 den Annihilator von Y_0, so ist X_1 invariant nach (1, 1) und bildet zusammen mit X_0 eine direkte Zerlegung von X nach (1, 2).

2. Die „geometrische" Theorie der linearen Operatoren beruht auf den folgenden zwei Sätzen über direkte Zerlegungen des gegebenen Raumes in invariante Unterräume.

Satz 1. *Es gibt eine direkte Zerlegung $X = X_s + X_r$ in zwei (bezüglich A) invariante Unterräume derart, daß A auf X_s nilpotent, auf X_r dagegen regulär ist.*

Satz 2. *Es sei $A^q = 0$ und x_0 ein Vektor, für den $x_0 A^{q-1} \neq 0$ ist. Es sei X_0 der kleinste invariante Unterraum, der x_0 enthält. Dann existiert ein invarianter Unterraum X' derart, daß X in die direkte Summe $X = X_0 + X'$ zerlegt werden kann.*

Bekanntlich (siehe z. B. [2]) enthalten diese zwei Sätze den einzigen wesentlichen Bestandteil der Theorie der Jordanschen Normalform, jedoch soll hier zur Bequemlichkeit des Lesers geschildert werden, wie man aus diesen zwei Sätzen das Resultat in der üblichen Form erhält. Der Beweis der Sätze 1, 2 erfolgt im Absatz 3.

Es sei also X ein n-dimensionaler linearer Raum, A ein linearer Operator in X. Unter einer Basis von X verstehen wir eine geordnete Folge $B=(e_1,\ldots,e_n)$ von n linear unabhängigen Elementen von X. Im dualen Raume Y gibt es nun Vektoren $f_1,\ldots,f_n$ derart, daß $\langle e_i,f_j\rangle=\delta_{ij}$, wobei die rechte Seite das Kroneckersche Symbol ist. Diese Vektoren bilden die sogenannte duale Basis zu B. Die Matrix bestehend aus den Elementen

$$a_{ij}=\langle e_i A, f_j\rangle$$

wird die Matrix des Operators A bezüglich der Basis B genannt. Die geometrische Theorie der linearen Operatoren beruht bekanntlich darauf, daß man durch geeignete Wahl der Basis B erzielt, daß die zugehörige Matrix zur möglichst einfachen Form gebracht wird.

Nehmen wir an, daß es uns gelungen ist, den Raum X als direkte Summe $X=X_1\dotplus\cdots\dotplus X_p$ zu schreiben, wobei die einzelnen X_i invariant bezüglich A sind. Es sei A_i der Teiloperator von A, betrachtet nur auf dem Raume X_i. Es sei B_i eine Basis von X_i.

Die B_i können nun zu einer Basis $B=(B_1,\ldots,B_p)$ des ganzen Raumes X vereinigt werden. Es ist leicht einzusehen, daß in dieser Basis die Matrix des Operators A die folgende einfache Form erhält:

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & M_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & M_p \end{pmatrix},$$

wo M_i die Matrix des Operators A_i bezüglich der Basis B_i ist.

Es seien $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p$ die voneinander verschiedenen Eigenwerte von A.

Wir setzen $C_i=A-\lambda_i E$. Nach Satz 1 existiert eine direkte Zerlegung $X=X_{1s}\dotplus X_{1r}$ derart, daß C_1 nilpotent auf X_{1s} und regulär auf X_{1r} ist. Die Räume X_{1s} und X_{1r} sind dabei invariant bezüglich C_1, also auch bezüglich A, und es ist $X_{1s}\neq(0)$. Wird A nur auf dem Raume X_{1r} betrachtet, so gehört λ_1 nicht mehr zum Spektrum von A, da $A-\lambda_1 E$ regulär auf X_{1r} ist. Ist nun $p>1$, so ist auch $X_{1r}\neq(0)$ und wir können wieder nach Satz 1 eine analoge direkte Zerlegung des Raumes X_{1r} bezüglich C_2 bilden. Es ist also $X_{1r}=X_{2s}\dotplus X_{2r}$, wo X_{2s} und X_{2r} invariant bezüglich C_2 (also auch bezüglich A) sind, wobei C_2 nilpotent auf X_{2s} und regulär auf X_{2r} ist. Auf X_{2r} ist sowohl $A-\lambda_1 E$ als auch $A-\lambda_2 E$ regulär, weshalb λ_1 und λ_2 nicht mehr zum Spektrum von A auf X_{2r} gehören. In ähnlicher weise erhält man die Zerlegung $X_{2r}=X_{3s}\dotplus X_{3r}$ zugehörig zum Operator C_3 usw. Bei jedem Schritte geht ein Eigenwert verloren, weshalb im p-ten Schritte $X_{pr}=(0)$ sein muß.

Der ganze Raum ist somit als direkte Summe

$$X = X_{1s} + X_{2s} + \cdots + X_{ps}$$

invarianter Unterräume dargestellt, wobei C_i nilpotent auf X_{is} ist. Der Bestandteil A_i von A auf X_{is} erfüllt also eine Gleichung $A_i = \lambda_i E + N_i$, wo N_i ein nilpotenter Operator auf X_{is} ist.

Unsere Aufgabe ist somit auf die Untersuchung von nilpotenten Operatoren zurückgeführt. Es sei also A ein nilpotenter Operator auf dem Raume X. Es sei q_1 die kleinste natürliche Zahl, für die $A^{q_1} = 0$ ist. Es gibt also ein $e_1 \in X$ derart, daß $e_1 A^{q_1 - 1} \neq 0$. Es folgt unmittelbar, daß die Vektoren $e_1, e_1 A, e_1 A^2, \ldots, e_1 A^{q_1-1}$ linear unabhängig sind und der von ihnen erzeugte Unterraum X_1 mit dem kleinsten invarianten Unterraum von X, der e_1 enthält, übereinstimmt. Die Matrix von A auf X_1 bezüglich der Basis $(e_1, e_1 A, e_1 A^2, \ldots, e_1 A^{q_1-1})$ hat die folgende einfache Form

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 2 gibt es einen invarianten Unterraum X_1' derart, daß X in die direkte Summe $X_1 + X_1'$ zerlegt werden kann. Der Teiloperator A_1 von A, betrachtet auf X_1', ist wieder nilpotent. Es sei q_2 die kleinste natürliche Zahl, für die $A_1^{q_2} = 0$. Man wählt wieder $e_2 \in X_1'$ so daß $e_2 A^{q_2 - 1} \neq 0$ und bezeichnet mit X_2 den kleinsten invarianten Unterraum von X_1', der e_2 enthält. Nach Satz 2 bekommen wir eine weitere invariante Zerlegung $X_1' = X_2 + X_2'$. Dasselbe Verfahren wird nun auf X_2' angewandt usw. Als Endresultat der beiden soeben beschriebenen Verfahren erhalten wir eine Basis, bezüglich der die Matrix von A die klassische Jordansche Normalform erhält.

3. Wir führen jetzt die Beweise der Sätze 1, 2 an.

Beweis vom Satz 1. Es sei X_r (Y_r) die Menge aller Vektoren $x \in X$ $(y \in Y)$, die eine Gleichung $xA^i = 0$ $(yA^{*j} = 0)$ für irgendein i (j) erfüllen. Offensichtlich sind beide Mengen invariante Räume. Wir behaupten, daß X_r und Y_r dual sind. Wegen der Symmetrie genügt es, zu jedem $x \in X_r$, $x \neq 0$, ein $y \in Y_r$ zu finden derart, daß $\langle x, y \rangle \neq 0$ ist.

Es sei also ein $x \in X_r$, $x \neq 0$ gegeben. Es sei q die kleinste natürliche Zahl mit $xA^q = 0$. Es gibt also ein $y_0 \in Y$ mit $\langle xA^{q-1}, y_0 \rangle \neq 0$. Die Elemente $y_0, y_0 A^*, y_0 A^{*2}, \ldots$ können nicht alle linear unabhängig sein. Es sei p der kleinste Exponent, für den $y_0 A^{*p}$ als Linearkombination der Elemente $y_0 A^{*i}$ mit $i > p$ dargestellt werden kann. Es gibt also einen Vektor z mit $y_0 A^{*p} = z A^{*p+1}$. Wir behaupten, daß $p \geqq q$ ist. Sonst könnte man nämlich $y_0 A^{*q-1}$ in der Form $v A^{*q}$ schreiben, was unmöglich ist, da $0 \neq \langle x A^{q-1}, y_0 \rangle = \langle x, y_0 A^{*q-1} \rangle = \langle x, v A^{*q} \rangle = \langle x A^q, v \rangle = 0$. Für $y = y_0 A^{*q-1} - z A^{*q}$ haben wir $y A^{*p-q+1} = y_0 A^{*p} - z A^{*p+1} = 0$, also $y \in Y_r$. Ferner gilt

$$\langle x, y \rangle = \langle x, y_0 A^{*q-1} \rangle = \langle x A^{q-1}, y_0 \rangle \neq 0,$$

womit der Beweis erbracht wurde.

Beweis vom Satz 2. Es sei $y_0 \in Y$ derart gewählt, daß $\langle x_0 A^{q-1}, y_0 \rangle \neq 0$ ist. Wir haben also $y_0 A^{*q-1} \neq 0$, weshalb der kleinste invariante Unterraum Y_0 von Y, der y_0 enthält, die Dimension q besitzt. Wir behaupten, daß X_0 und Y_0 dual sind. Es sei also $x \in X_0, x \neq 0$. Es ist $x = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_0 A + \cdots + \alpha_{q-1} x_0 A^{q-1}$. Es sei α_k der erste von Null verschiedene Koeffizient. Wir haben

$$\langle x, y_0 A^{*q-1-k} \rangle = \langle x A^{q-1-k}, y_0 \rangle = \langle \alpha_k x_0 A^{q-1}, y_0 \rangle \neq 0,$$

womit schon alles gezeigt ist.

Literatur.

[1] N. Bourbaki, *Algèbre linéaire*, Actualités Scientifiques et Industrielles 1032 (Paris, 1947).
[2] А. Мальцев, Основы линейной алгебры (Moskau—Leningrad, 1948).

(Eingegangen am 20. Juli 1955.)