Bibliographie.

L. Bieberbach, Analytische Fortsetzung, IV + 167 Seiten, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955.

Das Buch beschäftigt sich mit demjenigen — vielleicht interessantesten—Fragekreis der Weierstaßschen Funktionentheorie, welche die Zusammenhänge zwischen den Koeffizienten eines Funktionelementes einerseits und den singulären Stellen der Funktion und deren Charakter andererseits betrifft. Seit der in 1929 erschienenen großzügigen Arbeit von Pólya entstand eine ausgedehnte Literatur in dieser Richtung, und der Vert. gibt in diesem Buch ihre erste systematische Bearbeitung und Zusammenfassung. Er gibt kurze aber durchsichtige Besprechungen auch für diejenigen Abhandlungen, zu welcher detaillierten Behandlung er nicht abschweifen könnte. Die Behandlung berücksichtigt immer auch historische Gesichtspunkte, und einzelne Tatsachen sind auf mehreren Seiten beleuchtet.

In Kapitel I macht der Verf. die Haupthilfsmittel und Methoden bekannt, welche er später benützt. So z. B. die Laplace—Borelsche Transformation, welche eine Möglichkeit gibt die Singularitäten einer Funktion im Endlichen durch das Indikator-diagramm einer ganzen Funktion zu studieren, den Hadamardschen Multiplikationssatz, und das wichtigste Singularitätskriterium, durch Eulertransformation abgeleitet.

In Kapitel II beschäftigt sich der Verf. mit Resultaten, welche sich um die klassischen Sätze von Fabry konzentrieren. Hierher gehören im Wesentlichen Sätze dreierlei Art:

a) solche, welche aus der Dichte der „komplexen Vorzeichenwechseln" der Koeffizienten die Existenz einer singulären Stelle auf einem gewissen Bogen des Konvergenzkreises sichern,

b) solche, welche aus der Dichte der nichtverschwindenden Koeffizienten über die singulären Punkte einen Aufschluß geben,

c) solche, welche den Zusammenhang zwischen dem Verhalten des Quotienten benachbarter Koeffizienten und den singulären Stellen zeigen.

Kapitel III weist auf die andere Seite des in *b*) erwähnten Zusammenhanges von Koeffizientendichte und Singularitäten hin, nämlich in welchem Maße die Anzahl und Charakter der Singularitäten die Dichte der nichtverschwindenden bzw. der „kleinen" Koeffizienten bestimmen.

Kapitel IV, welches sich mit der Verteilung der fortsetzbaren und nichtfortsetzbaren Potenzreihen beschäftigt, zeigt in verschiedenen Formen die Tatsache, daß die Mehrzahl der Potenzreihen mit endlichem Konvergenzkreis nichtfortsetzbar über den Konvergenzkreis sind.

Kapitel V behandelt Sätze, die sich dem Hadamardschen Multiplikationssatz anknüpfen; aus der Kenntnis der Lage und des Charakters der singulären Stellen der Reihen $\sum a_n z^n$ und $\sum b_n z^n$ werden Aufschlüsse auf die Lage und auf den Charakter der singulären Stellen der Produktreihe $\sum a_n b_n z^n$ gegeben.

Kapitel VI bearbeitet diejenigen schönen Sätze, bei welchen die Koeffizienten arithmetische Bedingungen erfüllen. Besonders wichtig sind die Fälle der Potenzreihen mit endlich vielen Koeffizienten bzw. die mit ganzen rationalen Koeffizienten; in beiden Fällen kann man behaupten, daß sie entweder rationale Funktionen darstellen, oder nichtfortsetzbar sind.

Im Schlußkapitel, zurückkehrend zu einer Frage, welche schon im ersten Kapitel berührt wurde, gibt der Verf. Orientation über die singulären Punkte im Endlichen der Funktion mit dem Funktionselement $\sum a_n z^n$ im Falle $a_n = \varphi(n)$, wo $\varphi(z)$ eine Funktion bedeutet, die in einer gewissen Umgebung von $z = \infty$ regulär ist.

Die Formulierung einiger Sätze und Definitionen ist nicht ganz einwandfrei: die präzise Bedeutung tritt aber aus den Beweisen klar hervor. Das Buch ist leicht lesbar und anregend auch für diejenigen, die nicht auf diesem Feld arbeiten.

Vera T. Sós (Budapest)

Ludwig Schläfli, Gesammelte mathematische Abhandlungen. Band III, 402 Seiten. Herausgegeben vom Steiner—Schläfli—Komitee der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft, Basel, Verlag Birkhäuser, 1956.

Der vorliegende dritte Band Schläflis gesammelter Abhandlungen enthält die Früchte der beiden letzten Dezenien seiner schöpferischen Tätigkeit. Es beginnt mit einer Übertragung in den n-dimensionalen Raum des Satzes, nach dem zwei, bezüglich eines Kegelschnittes polare Dreiecke stets perspektiv sind. Diese Abhandlung gab Anregung zu Arbeiten von Berzolari, Brusotti, B. Segre und anderen. In der folgenden Arbeit wird u. a. der Inhalt eines n-dimensionalen sphärischen Sektors mit Hilfe der Besselschen Funktionen berechnet. Dadurch wird zu den Hauptresultaten der Theorie der vielfachen Kontinuität ein neuer Zugang gewonnen.

Es folgen mehrere Abhandlungen aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, darunter eine umfangreiche Arbeit über die Lösung eines allgemeinen Pendelproblems durch elliptische Funktionen, die Behandlung wichtiger Eigenschaften der Besselschen Funktionen im Zusammenhang mit der Riccatischen Differentialgleichung, Bemerkungen über die Laplacesche Gleichung und — nach zwei kleineren Aufsätzen über die Gleichung fünften Grades bzw. über Abelsche Integrale — eine größere Arbeit über die Differentialgleichung der linearen Wärmeleitung.

Der übrige Teil des Bandes enthält hauptsächlich Schläflis fundamentale Beiträge zur Funktionentheorie, insbesondere zu den Besselschen Funktionen, den elliptischen Modularfunktionen und den Kugelfunktionen.

Aus Schläflis Bemerkungen über den Dirichletschen Konvergenzbeweis der Fourier-Reihen sieht man, wie wenig der Unterschied zwischen punktweise und gleichmäßige Konvergenz noch vor etwa 80 Jahren verbreitet war. Obwohl in dieser Hinsicht selbst Schläfli einem Mißverständis zum Opfer fiel, bewundern wir seinen starken kritischen Sinn, womit er jeder Sache selbständig auf den Grund kommen will. In einer anderen mathematisch-philosophischen Schrift wendet er sich mit Scharfsinn gegen die Kantsche Raumauffassung, was zu jener Zeit ein noch ziemlich aktuelles Problem gewesen war. Diese Arbeiten gestatten uns einen Einblick in das oft kampfreiche Zustandekommen für uns natürlicher und geläufiger Sachen.

Zum Schluß sei die sehr bedeutende Arbeit über Räume konstanter Krümmung hervorgehoben, in der die (seit dem bestätigte) berühmte Vermutung bezüglich der Einbettung einer Riemannschen Mannigfaltigkeit in einen Euklidischen Raum ausgesprochen wird. Aus dem Datum seiner letzten Arbeit (1885) erfahren wir, daß SCHLÄFLIS schöpferische Kraft nicht einmal über seinem siebzigsten Lebensjahr erschöpft war.

In SCHLÄFLIS Arbeiten blätternd haben wir das Gefühl nicht nur mit dem Gelehrten, sondern auch mit dem Lehrer, ja sogar mit dem Menschen in Kontakt zu treten. Wir sehen ihn vor uns, als er sich um die Lösung der allgemeinen Pendelaufgabe „vergeblich" bemüht, oder als ihn während der Korrektur seiner Arbeit über die Heineschen Kugelfunktionen „die traurige Nachricht" vom Heines Tod „überraschte". Dieser unmittelbare Stil, der oft auch die Motiven der Entstehung mancher Entdeckungen verrät, trägt dazu bei, daß SCHLÄFLIS Abhandlungen auch heute noch anregend wirken. Besonders bezieht sich das auf die im vorliegenden Band dargestellten Abhandlungen des reifen Mathematikers. Ja, diese Abhandlungen werden noch Jahrhunderte lang modern bleiben und immer eine Frische aus sich ergießen!

L. Fejes Tóth (Budapest)

Hans Wittich, Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft 8), IV + 163 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1955.

WITTICH's book joins closely to R. NEVANLINNA's monograph: „Eindeutige analytische Funktionen", and its purpose is to complete the latter, partly with special questions, omitted from this owing to lack of space, partly with the newest results referring to the subject.

Chapter I expounds the theory of WIMAN—VALIRON about the maximal term, and applies it to the proof ot the „little" theorem of PICARD.

Chapter II gives a short summary of the two fundamental theorems of the value distribution theory of R. NEVANLINNA, and of their most important consequences. Further consequences of the fundamental theorems are treated in Chapter III. Among others we find there HAYMAN's example for an integral function with a defective value that is not an asymptotic value, and of the connection between the value distribution theory and the theory of covering surfaces.

Chapter IV is devoted to the converse of the second fundamental theorem. The matter in question is that in the case of meromorphic functions possessing a Riemann surface of a sufficiently simple type, the inequality expressing the second fundamental theorem may be replaced by an asymptotic equality.

Chapter V deals with the applications of the former results to the theory of ordinary differential equations. Among the many interesting results, we mention the following two theorems:

I. Let $P(x, y_0, y_1, \ldots, y_p)$ be a polynomial ($p \geqq 1$), let $f(w)$ be a transcendental entire function, and suppose that the entire function $w(z)$ satisfies the differential equation:

$$P(z, w, w', \ldots, w^{(p)}) = f(w).$$

Then $w(z) \equiv$ const. II. Suppose that the degrees of the polynomials $a_\mu(z)$ ($\mu = 0, 1, \ldots, p+1$) do not exceed the degree of $a_0(z)$ and that the entire function $w(z)$ satisfies the differential equation:

$$\sum_{\mu=0}^{p} a_\mu(z)\, w^{(p-\mu)}(z) + a_{p+1}(z) = 0.$$

Then $w(z)$ is at most of order 1. (The latter theorem is due to PERRON.) The other results have a similar character.

Chapter VI is devoted to conformal and quasi-conformal mappings. These researches give important help namely for the discussion of some types of Riemann surfaces.

It is well known that a Riemann surface belongs to the elliptic, parabolic, or hyperbolic type, according that it is the conform image of the closed plane, the open plane, or the unit circle, respectively. Further it is well known that the structural conditions of Riemann surfaces of certain simple types can be characterized by a graph. Chapter VII deals with those criteria, which permit to conclude from the structure of this graph to the type of the Riemann surface.

Chapter VIII deals with the following problem of the value distribution theory. To each point a_j of a sequence $\{a_j\}$ we attach two numbers: $\delta_j \geqq 0$, $\vartheta_j \geqq 0$, $0 \leqq \delta_j + \vartheta_j \leqq 1$, so that $\sum_{j=1}^{\infty} \delta_j + \sum_{j=1}^{\infty} \vartheta_j = 2$. The question is, whether there exists a meromorphic function which has in the point a_j the defect δ_j, and the ramification index ϑ_j.

The last Chapter is devoted to certain problems, connected with analytic functions having a finite Dirichlet integral. Among these there are some extremum problems, further the problem of finding criteria in order that in a given domain there exists an analytic function, having a finite Dirichlet integral. (E. g., in the domain $|z| < \infty$ there exists no such function.)

Finally some minor remarks: In Chapter I the author mentions a theorem of SAXER (1923) which gives a generalization of the little Picard theorem, in the direction of BOREL. At the same time, he does not mention a much more general result of P. CSILLAG.[1])

The proof of formula (2) on page 88 is correct only if d denotes (instead of the distance of the curves Γ_0 and Γ_1) the lowest upper bound of the radiuses of the circles contained entirely in the annular region. However, by the construction connected with figure 5, the author takes this circumstance correctly in consideration.

The book gives account also of the most recent publications. As a matter of fact, about one third of the numerous papers whose results are dealt with in the book, was published in the last five years.

The book deserves the interest of any mathematician working in function theory

Tamás Kővári (Budapest)

A. Monjallon, Initiation au calcul matriciel, 132 pages, Paris, Librairie Vuibert, 1955

Ce petit livre n'est pas écrit pour les mathématiciens, mais à l'usage des élèves des Écoles des Ingénieurs, des ingénieurs et des physiciens, c'est pourquoi il nous semble légitime que l'exposé laisse certaines démonstrations délibérément de côté. L'auteur s'est limité — comme il dit dans son avant-propos — aux éléments les plus simples, réunis dans un exposé direct et très concret, appuyé sur de nombreux exemples numériques. L'opuscule se compose de six chapitres: Matrices (I); Déterminants (II); Premières applications aux systèmes d'équations linéaires (III); Autres propriétés des matrices (IV); Formes quadratiques (V); Compléments (VI). On trouve à la fin un choix d'exercices numériques. D'après notre opinion, la matière serait mieux ordonnée du point de vue pédagogique, si l'on faisait connaître avant la définition de la matrice et du déterminant certains problèmes, qui font pratique l'introduction de ces notions.

O. Steinfeld (Szeged)

---

1) PAUL CSILLAG, Untersuchungen über die Borelschen Verallgemeinerungen des Picardschen Satzes, *Math. Annalen,* **100** (1928), 367—380.

Abraham Robinson, Théorie métamathématique des idéaux (Collection de logique mathématique, Série A, fascicule VIII), 186 pages, Paris et Louvain, Gauthier-Villars et E. Nauwelaerts, 1955.

Dans le passé on a regardé la logique symbolique surtout comme un instrument de la critique philosophique des sciences. Mais, des recherches récentes ont révélé que l'état actuel de cette discipline permet d'en faire des applications effectives à différentes branches des mathématiques.

Dans cette monographie on considère des structures mathématiques dont les axiomes peuvent être formulés dans le symbolisme de ce qu'on appelle calcul fonctionnel de premier ordre. Après une introduction générale on présente d'abord quelques considérations préliminaires sur les espaces topologiques et les ensembles partiellement ordonnés, puis on expose les fondements de la théorie des systèmes déductifs de Tarsky et de la langue formelle dans laquelle sont formulés les axiomes et les propriétés des structures mathématiques considérées à la suite. Après avoir introduit le concept métamathématique des structures algébriques, on développe la thérie de certaines structures concrètes, en particulier celle des idéaux de polynômes et de leurs variétés.

Les deux derniers chapitres sont consacrés aux applications, parmi lesquelles on trouve et des démonstrations nouvelles de théorèmes connus et des nouveaux théorèmes très intéressants. On peut citer par exemple la démonstration du théorème de Hilbert—Netto sur les variétés des idéaux de polynômes ou le développement de la théorie des idéaux différentiels de Ritt; ainsi que les théorèmes dits "théorèmes de transfert" dans lesquels il s'agit d'assertions de type suivant: Toutes les propositions d'une certaine classe qui sont vraies pour des structures de type particulier sont vrais aussi pour certaines autres structures. Comme une application d'une autre espèce on peut citer encore un théorème appartenant à la théorie des réseaux: Tout réseau infini qui admet un coloriage d'ordre k inclut un sous-réseau fini avec la même propriété.

En ce qui concerne la valeur de cet ouvrage, elle est déjà mise en évidence par les applications énumérées ci-dessus.

G. Szász (Szeged)

Segundo Symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino América, 330 pages, Montevideo, Centro de Cooperación Científica de la Unesco para América Latina, 1954.

Ce symposium a été organisé par le centre de coopération scientifique de l'Unesco pour l'Amérique latine. Le volume contient le discours inaugural de Julio Rey Pastor qui analyse les investigations récentes poursuivies en Amérique latine dans diverses branches des mathématiques. Dans ce qui suit on trouve le texte des conférences prononcées par les participants et des discussions qui les ont suivies. Il y a ici quelques expositions générales de disciplines modernes et un nombre de communications sur des problèmes particuliers. Les auteurs sont: L. A. Santaló, G. D. Mostow, R. F. Arens, A. P. Calderón, A. González Dominguez, J. Horváth, M. Cotlar, G. García, E. H. Zarantonello, A. A. Monteiro, M. O. González, A. Grothendieck, J. Adem, E. Lammel, P. Pi Calleja, G. Dedebant, G. Klimovski.

A. Korányi (Szeged)

G. Pickert, Projektive Ebenen (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band LXXX), VIII + 343 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1955.

Die Theorie der projektiven Ebenen hat sich in den letzten 25 Jahren aus gewissen axiomatischen Untersuchungen der reellen und komplexen projektiven Geometrie entwickelt und ist immermehr als ein neues, selbständiges Sachgebiet der Mathematik zu betrachten. Es war ebendeshalb die höchste Zeit die bisher gewonnenen zahlreichen Einzelergebnisse der wichtigsten Kapitel dieser Theorie möglichst systematisch zusammenzufassen. Eine solche Zusammenfassung ist im vorliegenden Buch gegeben.

In den ersten 9 Kapiteln wird der Leser von dem allgemeinen Begriff der sogenannten Inzidenzstrukturen bis zur vollständigen Charakterisierung der reellen projektiven Ebene geführt; inzwischen werden verschiedene spezielle Typen der projektiven und affinen Ebenen, nämlich die Desarguesschen, die homogenen, die Moufang-, die Translations- und die angeordneten Ebenen ausführlich behandelt. Die übrigen 3 Kapitel beschäftigen sich mit den topologischen Ebenen, den sogenannten Möbius-Netzen und zuletzt den projektiven Ebenen mit endlich vielen Elementen.

Im Laufe der Behandlung spielen die analytischen Methoden eine bedeutende Rolle. Es wirdschon im ersten Kapitel ein Koordinatenbegriff eingeführt und aus der Koordinatenmenge eine algebraische Struktur gebildet. Im folgenden werden überall ausführlich untersucht, wie die algebraischen Eigenschaften der Koordinatenmenge von den speziellen geometrischen Eigenschaften der einzelnen Ebenentypen abhängen; insbesondere werden die Beziehungen zwischen der Erfüllung des Desarguesschen bzw. Papposschen Satzes und der Assoziativität bzw. Kommutativität der zur Koordinatenmenge gehörenden algebraischen Struktur aufgeklärt. (Inzwischen fällt dem Leser die hervorragende Bedeutung der nicht-assoziativen algebraischen Strukturen für diese Theorie gut in die Augen.) Die betreffenden algebraischen Probleme sind auch eingehend dargelegt.

Das Literaturverzeichnis zählt 236 Arbeiten auf, die sämtlich im Text erwähnt werden. Um auch zu weiteren Forschungen zu bewegen, sind zahlreiche ungelöste Probleme aufgeworfen.

G. Szász (Szeged)

Gaston Julia, Cours de Géométrie infinitésimale. Deuxième édition entièrement refondue. Cinquème Fascicule. *Géométrie infinitésimale.* Deuxième partie: *Théorie des surfaces,* 145 pages, Paris, Gauthier-Villars 1955.

Ce fascicule traite tout d'abord de la théorie classique des surfaces dans l'espace à trois dimensions; toutefois même ceux, qui connaissent déjà la géométrie différentielle des surfaces, peuvent trouver ici des problèmes intéressants. En premier lieu nous renvoyons au chapitre XVII. qui s'occupe des congruences de droites, notamment de la congruence des normales à une surface et des droites singulières d'une congruence de type général. Nous voulons appeler encore l'attention du lecteur particulièrement sur les belles démonstrations géométriques, que l'A. donne jointement aux démonstrations analytiques (cf. p. e. le théorème fondamental sur les tangentes conjuguees, p. 73).

Table des matières: Chap. XV. Propriétés générales des surfaces et des lignes tracées sur les surfaces. Chap. XVI. Lignes particulières tracées sur les surfaces. Chap. XVII. Application des résultats précédents aux congruences de droite. Chap. XVIII. Représentation des surfaces les unes sur les autres.

A. Moór (Debrecen)

LIVRES REÇUS PAR LA RÉDACTION

H. Arzelies, La cinématique relativiste, XI + 228 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1955. — 2500 fr.

E. W. Beth, L'existence en mathématiques, 60 pages (Collection de Logique Mathématique Serie A, t. X), Paris, Gauthier-Villars, 1956. — 900 fr.

L. Bieberbach, Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen im reellen Gebiet, VIII + 281 Seiten (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band LXXXIII), Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer Verlag, 1956. — DM 29,80.

L. Bieberbach, Einführung in die konforme Abbildung, 179 Seiten (Sammlung Göschen, Band 768/768a), Berlin, Walter de Gruyter, 1956. — DM 4,80.

W. Blaschke, Kreis und Kugel, 2. durchgesehene und verbesserte Auflage, VIII + 167 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1956. — DM 18,60.

M. Born, L'expérience et la théorie en physique (traduit par J. P. Mathieu), 51 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1955. — 250 fr.

R. Brisac, Exposé élémentaire des principes da la géométrie euclidienne, 77 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1955. — 1200 fr.

L. de Broglie, Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la mécanique ondulatoire, VII + 297 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1956. — 3 500 fr.

C. Carathéodory, Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Band I, 2. Auflage, XI + 171 Seiten, Leipzig, Teubner Verlag, 1956. — DM 14,—.

F. Conforto, Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie, XI + 276 Seiten (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 84), Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer Verlag, 1956. — DM 38,60.

R. Courant, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Zweiter Band: Funktionen mehrerer Veränderlicher. 3. Auflage, XI + 468 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1955. — DM 36,—.

A. Denjoy, Articles et Mémoires, I. La variable complexe, II. Le champ réel—Notices. X + 508, VI + 509—1108 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1955. — 5100 fr.

L. Destouches, La quantification en théorie fonctionnelle des corpuscules, VI + 141 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1956. — 2000 fr.

Doetsch, Handbuch der Laplace-Transformation, Band II: **Anwendung der Laplace-Transformation.** I. Abteilung, 436 Seiten (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften. Mathematische Reihe, Band 15), Basel—Stuttgart, Verlag Birkhäuser, 1955. — DM 56,15.

J. O. Fleckenstein, Der Prioritätsstreit zwischen Leibniz und Isaac Newton, 27 Seiten, Basel—Stuttgart, Birkhäuser Verlag, 1956. — Sfr. 4,65.

P. Février, L'interprétation physique de la mécanique ondulatoire et des théories quantiques, VIII + 216 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1956. — 3200 fr.

R. Garnier, Cours de Cinématique. Tome II: **Roulement et viration. La formule de Savary et son extension à l'espace,** Troisième édition, revue et augmentée, X + 341 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1956. — 5000 fr.