Sur les contractions de l'espace de Hilbert. II.

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged.

1.

Dans la Note précédente [1] (voir aussi [2], [3], [4]) nous avons démontré que pour toute contraction T de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ [1]) il existe, dans un espace de Hilbert plus vaste $\mathfrak{K}$, une transformation unitaire U telle qu'on ait

(1) $$T^{(n)} = \operatorname{pr} U^n \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)\,^{2})$$

et que $\mathfrak{K}$ soit sous-tendu par les éléments de la forme $U^n h$ ($h \in \mathfrak{H}$); ces conditions déterminent U d'une manière univoque [3]).

Dans ce qui suit on désignera la dimension de $\mathfrak{H}$ toujours par $\mathfrak{d}$, elle peut être un nombre cardinal quelconque, fini ou infini.

On aurait croire que si l'on connaît le spectre de U on en peut tirer des informations sur le comportement de T. Or cela n'en est point le cas; en effet, M. SCHREIBER [5] vient de démontrer la proposition suivante:

Théorème 1. *Les transformations unitaires U qui correspondent aux contractions au sens strict T (c'est-à-dire telles que $\|T\| < 1$) sont toutes unitairement équivalentes à la même transformation unitaire, notamment à la somme orthogonale de $\mathfrak{d}$ répliques de la transformation unitaire V de l'espace $L^2(0, 2\pi)$, définie par la formule*

$$V[u(\varphi)] = e^{i\varphi} u(\varphi).\,^{4})$$

---

1) Nous n'envisagerons dans la présente Note que des espaces de Hilbert complexes, mais les résultats peuvent être étendus *mutatis mutandis* aux espaces réels, cf. note 4).

2) Nous employons la notation $T^{(n)} = T^n$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ et $T^{(n)} = T^{*|n|}$ pour $n = -1, -2, \ldots$. Pour deux transformations linéaires bornées, A de $\mathfrak{H}$ et B de $\mathfrak{K}$ ($\supset \mathfrak{H}$), $A = \operatorname{pr} B$ veut dire que, pour tout élément $h \in \mathfrak{H}$, Ah est la projection orthogonale de Bh sur $\mathfrak{H}$.

3) A condition qu'on ne distingue pas entre les différentes réalisations du prolongement $\mathfrak{K}$ de $\mathfrak{H}$.

4) D'ailleurs, en vertu du théorème de RIESZ—FISCHER, V est unitairement équivalente à la „translation" $\{x_k\} \to \{x_{k-1}\}$ dans l'espace l^2 des vecteurs $x = \{x_k\}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)

Dans sa démonstration, M. SCHREIBER se restreint au cas où $\mathfrak{d} \leqq \aleph_0$ et fait usage de la théorie de l'intégration forte des fonctions mesurables à valeurs dans un espace de Banach. La démonstration que nous allons donner diffère de celle de M. SCHREIBER principalement en ce qu'elle ne fait usage que des intégrales de fonctions ordinaires; elle est valable pour $\mathfrak{d}$ quelconque.

Le résultat s'étend aussi au cas de plusieurs contractions. Contentons-nous de le formuler seulement pour *deux* contractions T_1, T_2 de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. On sait (cf. [3]) que si T_1, T_2 sont doublement permutables[5]), il existe, dans un espace plus vaste $\mathfrak{K}$, deux transformations unitaires permutables U_1, U_2 telles qu'on ait

$$T_1^{(n_1)} T_2^{(n_2)} = \mathrm{pr}\, U_1^{n_1} U_2^{n_2} \qquad (n_1, n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{2}$$

et que $\mathfrak{K}$ soit sous-tendu par les éléments de la forme $U_1^{n_1} U_2^{n_2} h$ $(h \in \mathfrak{H})$; le couple $\{U_1, U_2\}$ est alors déterminé par le couple $\{T_1, T_2\}$ de manière univoque[3]). Nous démontrerons le

Théorème 2. *Les couples $\{U_1, U_2\}$ de transformations unitaires qui correspondent aux couples $\{T_1, T_2\}$ de contractions au sens strict, doublement permutables, sont tous unitairement équivalents au même couple, notamment à la somme orthogonale de $\mathfrak{d}$ répliques du couple des transformations unitaires V_1, V_2 de l'espace $L^2[(0, 2\pi) \times (0, 2\pi)]$, définies par les formules*

$$V_j u(\varphi_1, \varphi_2) = e^{i\varphi_j} u(\varphi_1, \varphi_2) \qquad (j = 1, 2). \tag{3}$$

Dans le second paragraphe de cette Note nous obtiendrons un résultat analogue pour les semi-groupes à un paramètre.

Démonstration du théorème 1. Soit $r = \|T\| < 1$. Pour toute valeur réelle de φ posons

$$K(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\varphi} T^{(n)} = \mathrm{Re}\,[(I + e^{-i\varphi} T)(I - e^{-i\varphi} T)^{-1}], \tag{4}$$

c'est une transformation autoadjointe bornée de $\mathfrak{H}$, fonction continue en norme de φ (cela découle de ce que $\|T^{(n)}\| \leqq r^{|n|}$). Pour tout $h \in \mathfrak{H}$ on a, en posant $h_\varphi = (I - e^{-i\varphi} T)^{-1} h$,

$$(K(\varphi)\, h, h) = \mathrm{Re}\,((I + e^{-i\varphi} T)\, h_\varphi, (I - e^{-i\varphi} T)\, h_\varphi) = \|h_\varphi\|^2 - \|T h_\varphi\|^2;$$

à composantes x_k complexes et de norme $\|x\| = \left[\sum_k |x_k|^2\right]^{\frac{1}{2}} < \infty$. On peut démontrer que dans cette forme le théorème est vrai aussi pour un espace $\mathfrak{H}$ réel: U est alors unitairement équivalente à la somme orthogonale de $\mathfrak{d}$ répliques de la „translation" $\{x_k\} \to \{x_{k-1}\}$ de l'espace l^2 des vecteurs x à composantes *réelles.*

5) A et B sont doublement permutables si A est permutable avec B et B^*.

vu que

$$\|h\| = \|(I - e^{-i\varphi} T) h_\varphi\| \begin{cases} \leqq (1+r)\|h_\varphi\| \\ \geqq (1-r)\|h_\varphi\| \end{cases}$$

il en résulte que

(5) $$c_1(h, h) \leqq (K(\varphi) h, h) \leqq c_2(h, h)$$

avec les constantes positives

$$c_1 = \frac{1-r}{1+r}, \qquad c_2 = \frac{1}{(1-r)^2}.$$

Notons la conséquence suivante de la définition (4):

(6) $$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\varphi} (K(\varphi) h, h')\, d\varphi = (T^{(n)} h, h').$$

Cela étant, envisageons l'ensemble $\mathfrak{K}_0$, évidemment linéaire, des polynomes trigonométriques

$$\Phi(\varphi) = \sum_n e^{in\varphi} h_n$$

à coefficients $h_n \in \mathfrak{H}$,[6]) muni de la notion suivante de produit scalaire:

(7) $$(\Phi, \Phi') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Phi(\varphi), \Phi'(\varphi))\, d\varphi = \sum_n (h_n, h_n');$$

on a évidemment $(\Phi, \Phi) \geqq 0$, et $(\Phi, \Phi) = 0$ seulement si $\Phi = 0$, c'est-à-dire si $\Phi(\varphi) \equiv 0$. $\mathfrak{K}_0$ est donc un espace préhilbertien. Soit $\mathfrak{K}$ l'espace hilbertien, complété de $\mathfrak{K}_0$.

Définissons dans $\mathfrak{K}_0$ encore la forme bilinéaire symétrique suivante:

(8) $$\langle \Phi, \Phi' \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (K(\varphi)\, \Phi(\varphi), \Phi'(\varphi))\, d\varphi,$$

en vertu de (5) on a les inégalités

$$c_1(\Phi, \Phi) \leqq \langle \Phi, \Phi \rangle \leqq c_2(\Phi, \Phi).$$

Par conséquent il existe dans $\mathfrak{K}$ une transformation autoadjointe D telle que

(9) $$c_1 I \leqq D \leqq c_2 I, \qquad \langle \Phi, \Phi' \rangle = (D\Phi, \Phi').$$

Désignons par $D^{\frac{1}{2}}$ la racine carrée positive de D.

La transformation

(10) $$U[\Phi(\varphi)] = e^{i\varphi}\, \Phi(\varphi)$$

applique $\mathfrak{K}_0$ sur $\mathfrak{K}_0$ isométriquement, et elle se prolonge alors par continuité

---

[6]) $h_n = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices n au plus.

en une transformation unitaire U de $\mathfrak{K}$. De plus, U laisse invariante aussi la forme $\langle\Phi, \Phi'\rangle$, d'où il résulte par (9) que

$$(11) \qquad U^* D U = D, \quad \text{donc} \quad DU = UD, \; D^{\frac{1}{2}} U = U D^{\frac{1}{2}}.$$

Faisons correspondre à chaque élément $h \in \mathfrak{H}$ l'élément $D^{\frac{1}{2}} \Phi_h \in \mathfrak{K}$ où Φ_h désigne la fonction $\Phi_h(\varphi) \equiv h$. Cette correspondance est évidemment linéaire, de plus elle est isométrique parce que, en vertu de (9), (8) et (6), on a

$$\left(D^{\frac{1}{2}} \Phi_h, D^{\frac{1}{2}} \Phi_{h'}\right) = (D\Phi_h, \Phi_{h'}) = \langle\Phi_h, \Phi_{h'}\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (K(\varphi) h, h')\, d\varphi =$$
$$= (T^{(0)} h, h') = (h, h').$$

Cela justifie d'identifier $h \in \mathfrak{H}$ avec $D^{\frac{1}{2}} \Phi_h \in \mathfrak{K}$ et de plonger de cette façon $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{K}$.

Pour tout couple d'éléments $h, h' \in \mathfrak{H}$ et pour tout entier n on obtient, faisant usage de (9), (10) et (6):

$$(U^n h, h') = \left(U^n D^{\frac{1}{2}} \Phi_h, D^{\frac{1}{2}} \Phi_{h'}\right) = (D U^n \Phi_h, \Phi_{h'}) =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (K(\varphi) e^{in\varphi} h, h')\, d\varphi = (T^{(n)} h, h').$$

Puisque $T^{(n)} h$ est un élément de $\mathfrak{H}$, cette relation exprime que $T^{(n)} h$ est la projection orthogonale de $U^n h$ sur $\mathfrak{H}$ (sous-espace de $\mathfrak{K}$), donc U vérifie (1).

Observons encore que les éléments $U^n h$ ($h \in \mathfrak{H}$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) sous-tendent l'espace $\mathfrak{K}$. En effet, on a

$$U^n h = U^n D^{\frac{1}{2}} \Phi_h = D^{\frac{1}{2}} U^n \Phi_h = D^{\frac{1}{2}} \Phi_{n,h} \quad \text{où} \quad \Phi_{n,h} = \Phi_{n,h}(\varphi) = e^{in\varphi} h;$$

or les $D^{\frac{1}{2}} \Phi_{n,h}$ sous-tendent $D^{\frac{1}{2}} \mathfrak{K}_0$ et alors aussi $D^{\frac{1}{2}} \mathfrak{K}$, mais on a $D^{\frac{1}{2}} \mathfrak{K} = \mathfrak{K}$ parce que $D^{\frac{1}{2}}$, ayant la borne inférieure positive $c_1^{\frac{1}{2}}$, admet une inverse partout définie.

La transformation unitaire U que nous venons de construire est donc celle qui correspond à la contraction T au sens précisé au début de cette Note.

Reste à prouver que U est unitairement équivalente à la somme orthogonale de $\mathfrak{d}$ répliques de la transformation unitaire V de l'espace $L^2 = L^2(0, 2\pi)$. Or, soit $\{g_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ un système orthonormal complet d'éléments de $\mathfrak{H}$, l'ensemble Ω des indices étant de puissance $\mathfrak{d}$. Envisageons la somme orthogonale

$$\mathfrak{L} = \sum_{\omega \in \Omega} \oplus L^2_\omega$$

de $\mathfrak{d}$ répliques de l'espace L^2; les éléments de $\mathfrak{L}$ sont les vecteurs

$$u = \sum_\omega \oplus u_\omega$$

où $u_\omega = u_\omega(\varphi) \in L^2_\omega$ et

$$\|u\|^2 = \sum_\omega \|u_\omega\|^2 = \sum_\omega \int_0^{2\pi} |u_\omega(\varphi)|^2 \, d\varphi < \infty.$$

(La dernière condition implique que $u_\omega = 0$ sauf pour un ensemble au plus dénombrable d'indices ω.) Faisons correspondre à tout élément

$$\Phi = \Phi(\varphi) = \sum_n e^{in\varphi} h_n \in \mathfrak{K}_0$$

le vecteur $u \in \mathfrak{L}$ ayant les composantes

$$u_\omega = u_\omega(\varphi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} (\Phi(\varphi), g_\omega) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sum_n e^{in\varphi} (h_n, g_\omega).$$

Cette correspondance, évidemment linéaire, est aussi isométrique:

$$\|\Phi\|^2 = \sum_n \|h_n\|^2 = \sum_n \sum_\omega |(h_n, g_\omega)|^2 = \sum_\omega \sum_n |(h_n, g_\omega)|^2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_\omega \int_0^{2\pi} \Big| \sum_n e^{in\varphi} (h_n, g_\omega) \Big|^2 d\varphi = \sum_\omega \|u_\omega\|^2 = \|u\|^2.$$

En particulier pour $\Phi(\varphi) = e^{im\varphi} g_\tau$ on a $u_\omega = 0$ pour $\omega \neq \tau$ et $u_\tau = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{im\varphi}$; comme les fonctions $e^{im\varphi}$ sous-tendent l'espace L^2, il s'ensuit que les $u \in \mathfrak{L}$ correspondant aux $\Phi \in \mathfrak{K}_0$ sous-tendent l'espace $\mathfrak{L}$. La correspondance isométrique $\Phi \leftrightarrow u$ s'étend alors par continuité aux espaces $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{L}$ tout entiers. Lorsque $\Phi \leftrightarrow \sum_\omega \oplus u_\omega$, on a $U\Phi \leftrightarrow \sum_\omega \oplus u'_\omega$ avec $u'_\omega(\varphi) = e^{i\varphi} u_\omega(\varphi)$, fait qui est immédiat pour $\Phi \in \mathfrak{K}_0$ et s'étend alors à tout $\Phi \in \mathfrak{K}$ par continuité.

Cela achève la démonstration du fait que U est unitairement équivalente à la somme orthogonale de $\mathfrak{d}$ répliques de la transformation unitaire V de l'espace L^2, multiplication par $e^{i\varphi}$.

Démonstration du théorème 2. Soient T_1, T_2 deux contractions au sens strict de l'espace $\mathfrak{H}$, doublement permutables. Les transformations correspondantes $K_1(\varphi_1)$, $K_2(\varphi_2)$ sont alors permutables pour des valeurs quelconques des paramètres; les inégalités $c_{1j}I \leqq K_j(\varphi) \leqq c_{2j}I$ $(c_{1j} > 0; j = 1, 2)$ entraînent que

$$c_{11}c_{12}I \leqq K_1(\varphi_1)\,K_2(\varphi_2) \leqq c_{21}c_{22}I.$$

En effet, on a p. ex.

$$(K_1(\varphi_1)K_2(\varphi_2)\,h, h) = \left(K_1(\varphi_1)\,K_2^{\frac{1}{2}}(\varphi_2)\,h, K_2^{\frac{1}{2}}(\varphi_2)\,h\right) \geqq$$

$$\geqq c_{11}\left(K_2^{\frac{1}{2}}(\varphi_2)\,h, K_2^{\frac{1}{2}}(\varphi_2)\,h\right) = c_{11}(K_2(\varphi_2)\,h, h) \geqq c_{11}c_{12}(h, h).$$

Le reste de la démonstration se transporte sans difficulté du cas d'une seule contraction.

2.

Envisageons maintenant le pendant „continu" du problème, cf. [1], [2], [3]. A l'analogie de (1), la représentation

$$T(s) = \mathrm{pr}\, U(s) \qquad (-\infty < s < \infty) \tag{12}$$

est possible pour tout semi-groupe à un paramètre $\{T(s)\}$ $(0 \leqq s < \infty)$,[7]) faiblement continu, de contractions de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$; $U(s)$ est un groupe à un paramètre, fortement continu[8]), de transformations unitaires d'un espace plus vaste $\mathfrak{K}$, sous-tendu par les éléments de la forme $U(s)\,h$ $(h \in \mathfrak{H})$; $\{U(s)\}$ est déterminé par $\{T(s)\}$ d'une manière univoque[9]).

La question se pose si, à l'analogie avec le fait affirmé par le théorème 1, les groupes $\{U(s)\}$ correspondant de cette façon à des semi-groupes $\{T(s)\}$ différents peuvent être unitairement équivalents.

Rappelons le théorème de Hille et Yosida[10]) suivant lequel les semi-groupes $\{T(s)\}$ de type envisagé se caractérisent par le fait qu'ils ont comme *génératrice* une transformation linéaire A, à domaine dense, fermée mais en général non bornée, et satisfaisant à la condition suivante:

Condition (a). *$I - \varepsilon A$ admet, pour tout $\varepsilon > 0$, l'inverse partout définie et on a*

$$\|(I - \varepsilon A)^{-1}\| \leqq 1.$$

---

7) On pose $T(s) = [T(-s)]^*$ pour $s < 0$; $T(0) = I$.

8) Cela entraîne que $\{T(s)\}$ est aussi fortement continu, ce qui est d'ailleurs une conséquence aussi des théorèmes 9.2.2 et 9.4.1 de [6]. Continuité est toujours entendue aussi au point $s = 0$.

9) A condition qu'on ne distingue pas entre les différentes réalisations du prolongement $\mathfrak{K}$ de $\mathfrak{H}$.

10) Cf. [6], théorème 12.2.1, ou [7], n° 143.

Cette caractérisation de la génératrice d'un semi-groupe fortement continu de contractions est valable même pour un espace de Banach quelconque. Nous allons démontrer que dans un espace de Hilbert la condition (a) est équivalente à la suivante:

Condition (b). *$I-A$ admet l'inverse partout définie et on a*

$$\|(I+A)(I-A)^{-1}\| \leqq 1.$$

La démonstration sera fondée sur le théorème de VON NEUMANN affirmant que

$$\|u(T)\| \leqq \max_{|z| \leqq \|T\|} |u(z)| \tag{13}$$

pour toute transformation linéaire bornée T de l'espace de Hilbert et pour toute fonction $u(z)$ de la variable complexe $z=x+iy$, holomorphe dans un domaine contenant le disque $|z| \leqq \|T\|$ dans son intérieur. Plus tard nous ferons usage aussi du théorème voisin de HEINZ, affirmant que, sous les mêmes conditions,

$$[\min_{|z| \leqq \|T\|} \operatorname{Re} u(z)]\, I \leqq \operatorname{Re} u(T) \leqq [\max_{|z| \leqq \|T\|} \operatorname{Re} u(z)]\, I. \text{ [11]} \tag{14}$$

Démonstration de l'équivalence.

(a) *entraîne* (b). Par hypothèse, $B_\varepsilon = (I-\varepsilon A)^{-1}$ $(\varepsilon > 0)$ est partout définie et $\|B_\varepsilon\| \leqq 1$. En particulier, $(I-A)^{-1}$, et alors aussi $C=(I+A)(I-A)^{-1}$ sont partout définies. Or on a

$$\begin{aligned} C &= [(1+\varepsilon)I-(I-\varepsilon A)][(I-\varepsilon A)-(1-\varepsilon)I]^{-1} = \\ &= \{[(1+\varepsilon)B_\varepsilon - I](I-\varepsilon A)\}\{[I-(1-\varepsilon)B_\varepsilon](I-\varepsilon A)\}^{-1} = \\ &= [(1+\varepsilon)B_\varepsilon - I][I-(1-\varepsilon)B_\varepsilon]^{-1} = u_\varepsilon(B_\varepsilon) \end{aligned}$$

avec

$$u_\varepsilon(z) = \frac{(1+\varepsilon)z-1}{1-(1-\varepsilon)z}.$$

Pour $0 < \varepsilon < 2$ cette fonction a son seul point singulier à l'extérieur du cercle unité, et sur ce cercle on a

$$|u_\varepsilon(z)|^2 = \frac{(1+\varepsilon)^2-2(1+\varepsilon)x+1}{(1-\varepsilon)^2-2(1-\varepsilon)x+1} \qquad (|z|=1,\ z=x+iy).$$

Le maximum de cette fonction sur le segment $-1 \leqq x \leqq +1$ est atteint au

---

[11]) Nous renvoyons le lecteur pour des démonstrations de ces théorèmes à [7], n° 153, ou à [3], § 4, où ces théorèmes apparaissent comme des conséquences simples de la représentation (1) des puissances d'une contraction.

point $x=-1$ et

$$\max_{|z|\leqq 1}|u_\varepsilon(z)|=\frac{2+\varepsilon}{2-\varepsilon}\qquad (0<\varepsilon<2),$$

par conséquent on a en vertu de (13)

$$\|C\|=\|u_\varepsilon(B_\varepsilon)\|\leqq\frac{2+\varepsilon}{2-\varepsilon}.$$

Faisant tendre ε vers 0 il en résulte que $\|C\|\leqq 1$, c. q. f. d.

(b) *entraîne* (a). Par hypothèse faite, $B=(I+A)(I-A)^{-1}$ est définie partout et $\|B\|\leqq 1$. Partons de la relation évidente

$$I-\varepsilon A=\frac{1}{2}[(1-\varepsilon)(I+A)+(1+\varepsilon)(I-A)]=\frac{1}{2}[(1-\varepsilon)B+(1+\varepsilon)I]\,(I-A).$$

$(I-A)^{-1}$ est partout définie puisque B l'est, et $(1-\varepsilon)B+(1+\varepsilon)I=$ $=(1+\varepsilon)\left[I+\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}B\right]$ admet, pour $\varepsilon>0$, une inverse partout définie et bornée, parce que $\left\|\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}B\right\|\leqq\left|\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right|<1$. Il s'ensuit que $I-\varepsilon A$ admet, pour $\varepsilon>0$, l'inverse partout définie

$$(I-\varepsilon A)^{-1}=2(I-A)^{-1}[(1-\varepsilon)B+(1+\varepsilon)I]^{-1}.$$

Comme on a

$$2(I-A)^{-1}=[(I-A)+(I+A)](I-A)^{-1}=I+B,$$

il en résulte que

$$(I-\varepsilon A)^{-1}=v_\varepsilon(B)$$

avec

$$v_\varepsilon(z)=\frac{1+z}{(1-\varepsilon)z+(1+\varepsilon)}\qquad(\varepsilon>0).$$

Le seul point singulier de cette fonction est situé à l'extérieur du cercle unité, et sur ce cercle même on a

$$|v_\varepsilon(z)|^2=\frac{1+2x+1}{(1-\varepsilon)^2+2(1-\varepsilon^2)x+(1+\varepsilon)^2}=\frac{1+x}{(1+x)+\varepsilon^2(1-x)}\leqq 1$$

puisque $-1\leqq x\leqq 1$. En vertu de (13) on a donc $\|(I-\varepsilon A)^{-1}\|=\|v_\varepsilon(B)\|\leqq 1$, c. q. f. d.

Dans ce qui suit nous envisagerons seulement le cas où la condition (b) est vérifiée avec le signe *d'inégalité*. En posant $b=\|(I+A)(I-A)^{-1}\|$ on aura dans ce cas

$$\|(I+A)g\|\leqq b\|(I-A)g\|$$

pour tout g de la forme $(I-A)^{-1}h$, donc pour tous les éléments g du domaine de définition de A. Cette inégalité entraîne que

$$\|Ag\|-\|g\| \leqq b(\|g\|+\|Ag\|)$$

d'où il résulte que

$$\|Ag\| \leqq \frac{1+b}{1-b}\|g\|.$$

Comme A est fermée et de domaine dense, il s'ensuit que A est définie partout et qu'elle est *bornée.*

Pour mieux élucider la nature de notre condition, établissons-en quelques formes équivalentes.

Lemme 1. *Pour une transformation linéaire bornée A de l'espace $\mathfrak{H}$ de Hilbert les conditions suivantes sont équivalentes l'une à l'autre:*

(α) *$I-A$ admet une inverse partout définie et* $\|(I+A)(I-A)^{-1}\|<1$;

(β) *il existe un $b<1$ tel que $\|(I+A)h\| \leqq b\|(I-A)h\|$ pour tout $h \in \mathfrak{H}$;*

(γ) *il existe un $c>0$ tel que* $\operatorname{Re} A \leqq -cI$;

(δ) *il existe un $d>0$ tel que* $\|A+dI\|<d$.

Démonstration. On procédera par la chaîne logique $(\alpha)\to(\beta)\to$ $\to(\gamma)\to(\delta)\to(\alpha)$. La première implication est évidente.

(β) *entraîne* (γ). Puisque $\|(I\pm A)h\|^2=\|h\|^2\pm 2\operatorname{Re}(Ah,h)+\|Ah\|^2$, il s'ensuit de ($\beta$) que

$$\|h\|^2+2\operatorname{Re}(Ah,h)+\|Ah\|^2 \leqq b^2[\|h\|^2-2\operatorname{Re}(Ah,h)+\|Ah\|^2] \leqq$$
$$\leqq b^2[\|h\|^2-2\operatorname{Re}(Ah,h)]+\|Ah\|^2,$$

d'où il résulte que

$$\operatorname{Re}(Ah,h) \leqq -cI \quad \text{avec} \quad c=\frac{1}{2}\,\frac{1-b^2}{1+b^2}.$$

(γ) *entraîne* (δ). Posons $d=\|A\|^2/c$. On a alors pour tout $h\in\mathfrak{H}$

$$\|(A+dI)h\|^2=\|Ah\|^2+2d\operatorname{Re}(Ah,h)+d^2\|h\|^2 \leqq$$
$$\leqq (\|A\|^2-2dc+d^2)\|h\|^2=(d^2-dc)\|h\|^2,$$

donc

$$\|A+dI\| \leqq (d^2-dc)^{\frac{1}{2}}<d.$$

(δ) *entraîne* (α). On a par hypothèse $\|A+dI\|=r<d$. Le disque $|z+d|\leqq r$ étant situé dans l'intérieur du demi-plan gauche, ses points vérifient l'inégalité $|1+z|<|1-z|$, et par conséquent la fonction $\left|\frac{1+z}{1-z}\right|$ a sur ce disque son maximum <1. Il s'ensuit alors du théorème de VON NEUMANN que la transformation $(I+A)(I-A)^{-1}$ existe et sa norme est inférieure à 1.

Le lemme est ainsi démontré.

Voici encore quelques conséquences de la condition (δ).

Lemme 2. *Pour tout A vérifiant la condition (δ) on a*

$$\|e^{sA}\| \leqq e^{-as} \qquad (s \geqq 0) \tag{15}$$

avec une constante $a > 0$, les points de l'axe imaginaire appartiennent à l'ensemble résolvant de A, et la résolvante

$$R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$$

vérifie les inégalités

$$\frac{c_1}{1+\varphi^2} I \leqq \operatorname{Re} R(i\varphi) \leqq \frac{c_2}{1+\varphi^2} I \qquad (-\infty < \varphi < \infty) \tag{16}$$

avec des constantes positives c_1, c_2.

Démonstration. De la condition $\|A + dI\| = r < d$ il s'ensuit par (13) que pour $s \geqq 0$ on a

$$\|e^{sA}\| \leqq \max_{|z+d| \leqq r} |e^{sz}| = e^{-(d-r)s}.$$

D'autre part, la fonction $(i\varphi - z)^{-1}$ est, pour φ réel, régulière sur le disque $|z+d| \leqq r$, et sa partie réelle, $-x|i\varphi - z|^{-2}$, y vérifie les inégalités

$$a(\varphi) = \frac{d-r}{(|i\varphi + d| + r)^2} \leqq -\frac{x}{|i\varphi - z|^2} \leqq \frac{d+r}{(|i\varphi + d| - r)^2} = b(\varphi).$$

Ces fonctions $a(\varphi), b(\varphi)$ sont positives, continues, et leurs produits par $1+\varphi^2$ tendent pour $\varphi \to \infty$ vers les limites positives $d \mp r$. Il s'ensuit qu'il existe des constantes positives c_1, c_2 telles que

$$\frac{c_1}{1+\varphi^2} \leqq a(\varphi) \leqq b(\varphi) \leqq \frac{c_2}{1+\varphi^2}.$$

En appliquant (14) il en résulte (16).

Après ces préliminaires formulons notre

Théorème 3. *Les groupes unitaires $\{U(s)\}$ correspondant aux semi-groupes $\{T(s)\}$ de contractions de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ dont les génératrices A vérifient les conditions du lemme 1, sont tous unitairement équivalents au même groupe unitaire, notamment à la somme orthogonale de $\mathfrak{d}$ répliques du groupe unitaire $\{V(s)\}$ de l'espace $L^2(-\infty, \infty)$, défini par la formule*

$$V(s)[u(\varphi)] = e^{is\varphi} u(\varphi).$$

Démonstration. Le semi-groupe $\{T(s) = e^{sA}\}$ $(s \geqq 0)$ vérifie l'inégalité (15) avec $a > 0$, ce qui assure la convergence en norme de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-is\varphi} T(s) ds;$$

cette intégrale est égale à $R(i\varphi)=(i\varphi-A)^{-1}$.[12] Puisque $[T(s)]^*=T(-s)$, il en découle que

$$2\,\mathrm{Re}\,R(i\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\varphi}T(s)ds.$$

Pour tout couple $h, h' \in \mathfrak{H}$ la fonction $v(\varphi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\mathrm{Re}\,R(i\varphi)h, h')$ est donc la transformée de Fourier de la fonction $(T(s)h, h')$. Les inégalités (16) entraînent que $v(\varphi)\in L(-\infty, \infty)$, et comme de plus $(T(s)h, h')$ est fonction continue de s, on peut appliquer le théorème d'inversion de Fourier:

$$(T(s)h, h')=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\varphi s}v(\varphi)d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\varphi s}(\mathrm{Re}\,R(i\varphi)h, h')d\varphi. \tag{17}$$

Cela étant, désignons par $\mathfrak{K}_0$ l'ensemble, évidemment linéaire, des polynomes trigonométriques non nécessairement périodiques

$$\Phi(\varphi)=\sum_{\nu} e^{i\nu\varphi}h_\nu$$

à coefficients $h_\nu \in \mathfrak{H}$,[13] muni de la notion de produit scalaire:

$$(\Phi, \Phi')=\int_{-\infty}^{\infty}(\Phi(\varphi), \Phi'(\varphi))\,dm(\varphi) \quad \text{avec} \quad dm(\varphi)=[\pi(1+\varphi^2)]^{-1}d\varphi; \tag{18}$$

on a évidemment $(\Phi, \Phi)\geqq 0$, et $(\Phi, \Phi)=0$ seulement si $\Phi=0$, c'est-à-dire si $\Phi(\varphi)\equiv 0$. $\mathfrak{K}_0$ est donc un espace préhilbertien; soit $\mathfrak{K}$ son complété.

Définissons sur $\mathfrak{K}_0$ encore la forme bilinéaire symétrique suivante:

$$\langle\Phi, \Phi'\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}([\mathrm{Re}\,R(i\varphi)]\,\Phi(\varphi), \Phi'(\varphi))d\varphi; \tag{19}$$

la convergence de cette intégrale découle aisément des inégalités (16), de plus celles-ci entraînent que

$$c_1(\Phi, \Phi)\leqq\langle\Phi, \Phi\rangle\leqq c_2(\Phi, \Phi).$$

Par conséquent il existe dans $\mathfrak{K}$ une transformation autoadjointe D telle que

$$c_1 I\leqq D\leqq c_2 I, \qquad \langle\Phi, \Phi'\rangle=(D\Phi, \Phi'); \tag{20}$$

soit $D^{\frac{1}{2}}$ la racine carrée positive de D.

---

[12]) Cf. [6], théorème 11.6.1.

[13]) $h_\nu=0$ sauf pour un nombre fini de valeurs réelles ν au plus.

Pour s réel, définissons sur $\mathfrak{K}_0$ la transformation $U(s)$ par la formule

$$U(s)[\Phi(\varphi)] = e^{is\varphi}\Phi(\varphi); \tag{21}$$

$U(s)$ applique $\mathfrak{K}_0$ sur $\mathfrak{K}_0$ de manière isométrique et se prolonge alors par continuité en une transformation isométrique de $\mathfrak{K}$ sur $\mathfrak{K}$, donc en une transformation unitaire de $\mathfrak{K}$. En sa dépendance de s, elle jouit évidemment de la propriété de groupe. Elle laisse invariante aussi la forme $\langle\Phi, \Phi'\rangle$ (sur $\mathfrak{K}_0$), d'où il s'ensuit qu'elle est permutable avec D et alors aussi avec $D^{\frac{1}{2}}$.

Faisons correspondre à chaque élément $h \in \mathfrak{H}$ l'élément $D^{\frac{1}{2}}\Phi_h \in \mathfrak{K}$ où Φ_h désigne la fonction constante $\Phi_h(\varphi) \equiv h$. Cette correspondance est évidemment linéaire, de plus elle est isométrique parce que, en vertu de (20), (19), (18) et (17) on a

$$\left(D^{\frac{1}{2}}\Phi_h, D^{\frac{1}{2}}\Phi'_h\right) = (D\Phi_h, \Phi'_h) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}([\mathrm{Re}\, R(i\varphi)]h, h')d\varphi =$$
$$= (T(0)h, h') = (h, h').$$

Il est donc légitimé d'identifier $h \in \mathfrak{H}$ avec $D^{\frac{1}{2}}\Phi_h \in \mathfrak{K}$: $\mathfrak{H}$ devient ainsi un sous-espace de $\mathfrak{K}$.

Faisant usage de (21), (20), (19) et (17) on obtient que

$$(U(s)h, h') = \left(U(s)D^{\frac{1}{2}}\Phi_h, D^{\frac{1}{2}}\Phi_{h'}\right) = (DU(s)\Phi_h, \Phi_{h'}) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}([\mathrm{Re}\, R(i\varphi)]e^{is\varphi}h, h')d\varphi = (T(s)h, h');$$

vu que $T(s)h \in \mathfrak{H}$ cela exprime que $T(s)h$ est la projection orthogonale de $U(s)h$ sur $\mathfrak{H}$. L'équation (12) est donc vérifiée.

Les éléments de la forme $U(s)h$ $(h \in \mathfrak{H})$ sous-tendent l'espace $\mathfrak{K}$. En effet, on a

$$U(s)h = U(s)D^{\frac{1}{2}}\Phi_h = D^{\frac{1}{2}}U(s)\Phi_h = D^{\frac{1}{2}}\Phi_{s,h}$$

avec $\Phi_{s,h}(\varphi) = e^{is\varphi}h$, or les éléments $D^{\frac{1}{2}}\Phi_{s,h}$ sous-tendent évidemment $D^{\frac{1}{2}}\mathfrak{K}_0$ et alors aussi $D^{\frac{1}{2}}\mathfrak{K}$, mais $D^{\frac{1}{2}}\mathfrak{K}$ coïncide avec $\mathfrak{K}$ puisque $D^{\frac{1}{2}}$, ayant la borne inférieure positive $c_1^{\frac{1}{2}}$, admet une inverse partout définie.

Cela achève la démonstration du fait que le groupe $\{U(s)\}$ que nous venons de construire correspond au semi-groupe $\{T(s)\}$ au sens précisé au début de ce paragraphe.

Reste à prouver que $\{U(s)\}$ est unitairement équivalent à la somme orthogonale de $\mathfrak{d}$ répliques du groupe unitaire $\{V(s)\}$ de l'espace $L^2 = L^2(-\infty, \infty)$. Soit $\{g_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ un système orthonormal complet dans $\mathfrak{H}$. Envisageons la somme orthogonale

$$\mathfrak{L} = \sum_{\omega \in \Omega} \oplus L^2_\omega$$

de $\mathfrak{d}$ répliques de l'espace L^2; les éléments de $\mathfrak{L}$ sont les vecteurs

$$u = \sum_\omega \oplus u_\omega$$

avec $u_\omega = u_\omega(\varphi) \in L^2$ et

$$\|u\|^2 = \sum_\omega \|u_\omega\|^2 = \sum_\omega \int_{-\infty}^{\infty} |u_\omega(\varphi)|^2 d\varphi < \infty$$

($u_\omega = 0$ sauf pour un ensemble au plus dénombrable d'indices). Faisons correspondre à

$$\Phi = \Phi(\varphi) = \sum_\nu e^{i\nu\varphi} h_\nu \in \mathfrak{K}_0$$

le vecteur $u \in \mathfrak{L}$ avec les composantes

$$u_\omega = u_\omega(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1+\varphi^2)}} (\Phi(\varphi), g_\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1+\varphi^2)}} \sum_\nu e^{i\nu\varphi}(h_\nu, g_\omega).$$

Cette correspondance, évidemment linéaire, est aussi isométrique:

$$\|\Phi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \|\Phi(\varphi)\|^2 dm(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_\omega |(\Phi(\varphi), g_\omega)|^2 dm(\varphi) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_\omega |u_\omega(\varphi)|^2 d\varphi = \sum_\omega \int_{-\infty}^{\infty} |u_\omega(\varphi)|^2 d\varphi = \sum_\omega \|u_\omega\|^2 = \|u\|^2.$$

En particulier, à $\Phi = \Phi(\varphi) = e^{i\nu\varphi} g_\tau$ il correspond le vecteur u avec

$$u_\omega = 0 \quad \text{pour} \quad \omega \neq \tau, \qquad u_\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi(1+\varphi^2)}} e^{i\nu\varphi}.$$

Or les fonctions $[\pi(1+\varphi^2)]^{-\frac{1}{2}} e^{i\nu\varphi}$ (ν réel quelconque) sous-tendent l'espace $L^2(-\infty, \infty)$.[14]) Il en résulte que les $u \in \mathfrak{L}$ correspondant aux $\Phi \in \mathfrak{K}_0$ sous-tendent $\mathfrak{L}$. La correspondance isométrique $\Phi \longleftrightarrow u$ s'étend alors par continuité

---

[14]) En effet, soit $v(\varphi)$ une fonction $\in L^2(-\infty, \infty)$, orthogonale à $[\pi(1+\varphi^2)]^{-\frac{1}{2}} e^{i\nu\varphi}$ pour tout ν réel. Cela veut dire que la fonction $w(\varphi) = [\pi(1+\varphi^2)]^{-\frac{1}{2}} v(\varphi)$ a sa transformée de Fourier identiquement égale à 0. Puisque $w(\varphi) \in L^2$, cela entraîne que $w(\varphi) = 0$ presque partout, donc aussi $v(\varphi) = 0$ presque partout.

aux espaces $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{L}$ tout entiers. Lorsque $\Phi \longleftrightarrow \sum_{\omega} \oplus u_\omega$, on a $U(s)\Phi \longleftrightarrow \sum_{\omega} \oplus u'_\omega$ avec $u'_\omega(\varphi) = e^{is\varphi} u_\omega(\varphi)$, fait qui est immédiat pour $\Phi \in \mathfrak{R}_0$ et s'étend alors à tout $\Phi \in \mathfrak{R}$ par continuité.

Cela achève la démonstration de ce que $\{U(s)\}$ est unitairement équivalent à la somme orthogonale de $\mathfrak{d}$ répliques de $\{V(s)\}$, c'est-à-dire la démonstration du théorème 3.

Littérature.

[1] B. Sz.-Nagy, Sur les contractions de l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math.*, **15** (1953), 87—92.

[2] ——— Transformations de l'espace de Hilbert, fonctions de type positif sur un groupe, *ibidem*, **15** (1954), 104—114.

[3] ——— Prolongements de transformations de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace, *Appendice au livre „Leçons d'analyse fonctionnelle" par F. Riesz et B. Sz.-Nagy* (Budapest, 1955).

[4] J. J. Schäffer, On unitary dilations of contractions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6** (1955), 322.

[5] M. Schreiber, Unitary dilations of operators, *Duke Math. Journal*, **23** (1956), 579—594.

[6] E. Hille, *Functional analysis and semi-groups* (New York, 1948).

[7] F. Riesz—B. Sz.-Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, 3me édition (Budapest, 1955).

(Reçu le 2 avril 1957.)