Über das Tensorprodukt von Torsionsgruppen.

Von L. FUCHS in Budapest.

§ 1. Es seien G und H zwei Gruppen, deren Komposition (ohne daß man die Kommutativität voraussetzt) als Addition geschrieben wird. Der Begriff des Tensorproduktes $G \otimes H$ von G und H wurde in 1938 von H. WHITNEY [5] eingeführt; $G \otimes H$ ist die Gruppe, bestehend aus allen endlichen Summen

$$\sum_i (g_i \otimes h_i) \qquad (\text{mit } g_i \in G, h_i \in H),$$

die als formale Ausdrücke anzusehen sind, die nur den Distributivgesetzen

$$(g+g') \otimes h = g \otimes h + g' \otimes h, \qquad g \otimes (h+h') = g \otimes h + g \otimes h'$$

unterworfen sind. [Sind G und H mit demselben Operatorbereich Ω versehen, so soll für jedes $\lambda \in \Omega, g \in G, h \in H$ noch $(\lambda g) \otimes h = g \otimes (\lambda h) = \lambda (g \otimes h)$ vorausgesetzt sein.] [1]) WHITNEY bewies, daß $G \otimes H$ stets eine abelsche Gruppe ist. Nun erhebt sich die Frage, welche abelsche Gruppen sich als Tensorprodukt zweier Gruppen darstellen lassen. Dieses Problem scheint nicht uninteressant zu sein; wenn nämlich eine ziemlich große Klasse von abelschen Gruppen als Tensorprodukt von Gruppen bekannter, einfacherer Struktur darstellbar wäre, so würde der Begriff des Tensorproduktes in der Theorie der abelschen Gruppen eine Methode bieten, mittels deren die Struktur einer weiteren Klasse abelscher Gruppen beschrieben werden könnte. Wir konnten dieses recht allgemeine Problem nicht vollständig lösen; es ist uns nur im Falle von Torsionsgruppen G und H gelungen,[2]) zu zeigen, daß das Heranziehen von Tensorprodukten nichts Neues bietet. Es wird sich nämlich die ziemlich überraschende Tatsache herausstellen, daß *das Tensorprodukt zweier (und somit auch endlich vieler) beliebiger Torsionsgruppen die direkte Summe endlicher zyklischer Gruppen ist.* Somit gibt uns das Tensorprodukt von Torsions-

---

[1]) Für eine systematische Behandlung von Tensorprodukten verweisen wir auf BOURBAKI [1].

[2]) Unter einer Torsionsgruppe versteht man eine Gruppe, deren Elemente von endlichen Ordnungen sind.

gruppen keine neue Methode zur Beschreibung der Struktur von abelschen Gruppen an die Hand.

§ 2. Um unser Hauptergebnis beweisen zu können, benötigen wir die folgenden bekannten Hilfssätze, für deren Beweis auf die Literatur verwiesen sei.

Hilfssatz 1 (WHITNEY). *Sind G und H beliebige Gruppen und bezeichnet G' bzw. H' deren Kommutatoruntergruppen, so besteht ein (natürlicher) Isomorphismus:*

$$G \otimes H \cong G/G' \otimes H/H'.$$

Hilfssatz 2 (DIEUDONNÉ). *Bestehen die direkten Zerlegungen $G = \sum_\lambda G_\lambda$ und $H = \sum_\mu H_\mu$, so gilt:*

$$G \otimes H = \sum_\lambda \sum_\mu (G_\lambda \otimes H_\mu).$$

Hilfssatz 3 (DIEUDONNÉ). *Es sei $g \in G$ von der Ordnung p^n und $h \in H$ von der Ordnung q^m, wo p und q Primzahlen bezeichnen. Dann ist das Element $g \otimes h$ von $G \otimes H$ gleich 0, falls $p \neq q$, und ist von der Ordnung $\leqq \mathrm{Min}\,(p^n, q^m)$, falls $p = q$.*

Zugleich bemerken wir, daß sich aus Hilfssatz 1 unmittelbar ergibt, daß man sich auf Tensorprodukte mit abelschen Faktoren beschränken kann. Da abelsche Torsionsgruppen stets als direkte Summen von p-Gruppen (ihren p-Komponenten) darstellbar sind, folgt aus Hilfssatz 2, daß es genügt, das Tensorprodukt von p-Gruppen zu betrachten. Nach Hilfssatz 3 verschwindet aber das Tensorprodukt einer p-Gruppe und einer q-Gruppe, falls p und q verschiedene Primzahlen sind. Somit reduziert sich das Problem bezüglich der Struktur von beliebigen Torsionsgruppen auf das von abelschen p-Gruppen (mit derselben Primzahl p). –

§ 3. Nach einem wohlbekannten Satz von L. KULIKOV [4] enthält jede abelsche p-Gruppe G eine Basisuntergruppe B, die bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und durch die folgenden Bedingungen definiert ist: (i) B ist die direkte Summe von zyklischen p-Gruppen; (ii) B ist eine Servanzuntergruppe von G; (iii) G/B ist eine vollständige Gruppe[3]). Es gilt nun für unsere Zwecke der wichtigste

---

[3]) Eine Untergruppe H der abelschen Gruppe G heißt eine Servanzuntergruppe, wenn folgendes gilt: für ein $a \in H$ und für eine natürliche Zahl n ist die Gleichung $nx = a$ genau dann lösbar in G, falls sie auch eine Lösung in H besitzt. Die Vollständigkeit einer abelschen Gruppe G bedeutet die Lösbarkeit aller Gleichungen der Form $nx = a$ $(a \in G)$.

Hilfssatz 4. *Ist B bzw. C eine Basisuntergruppe der abelschen p-Gruppe G bzw. H, so gilt*

$$G \otimes H \cong B \otimes C.$$

Dieser Isomorphismus wird durch den Beweis bestätigt, daß jedes Element $g \otimes h \in G \otimes H$ einem $b \otimes c \in B \otimes C \subseteqq G \otimes H$ gleich ist. Nach der Definition der Basisuntergruppe gibt es Elemente $x \in G, y \in H$ mit $p^k x + b = g$ bzw. $p^r y + c = h$ für passende $b \in B, c \in C$, wobei wir die Exponenten k, r gemäß[4] $p^k \geqq O(h), p^r \geqq O(b)$ wählen. Dann ergibt sich unter Berücksichtigung von $n(u \otimes v) = nu \otimes v = u \otimes nv$ für jede ganze Zahl n, daß

$$g \otimes h = (p^k x + b) \otimes h = (p^k x) \otimes h + b \otimes h = x \otimes (p^k h) + b \otimes (p^r y + c) =$$
$$= (p^r b) \otimes y + b \otimes c = b \otimes c,$$

es gibt also keine Elemente in $G \otimes H$, die nicht einem Element von $B \otimes C$ gleich wären, w. z. b. w.[5])

§ 4. Nun sind wir imstande, unser Ergebnis leicht nachzuprüfen.

Satz. *Sind G und H beliebige Torsionsgruppen, so ist ihr Tensorprodukt $G \otimes H$ eine direkte Summe von zyklischen p-Gruppen.*

Nach § 2 ist $G \otimes H$ der Gruppe $\sum_p (G_p \otimes H_p)$ isomorph, wo G_p bzw. H_p die p-Komponente von G/G' bzw. H/H' bedeutet und die direkte Summe über alle Primzahlen p zu erstrecken ist. Aus Hilfssatz 4 erhält man, daß $G_p \otimes H_p \cong B_p \otimes C_p$ ist, wo B_p und C_p Basisuntergruppen von G_p bzw. H_p sind. Zieht man noch Hilfssatz 2 in Betracht und beachtet, daß gemäß Definition B_p und C_p direkte Summen von zyklischen p-Gruppen sind, so folgt sofort aus Hilfssatz 3,[6]) daß $G_p \otimes H_p$, und somit auch $G \otimes H$ direkte Summen von zyklischen p-Gruppen sind, w. z. b. w.

Falls man eine explizite Darstellung der Basisuntergruppen B_p und C_p kennt:[7])

$$B_p = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{m}_i(p)} \mathfrak{C}(p^i), \qquad C_p = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{n}_k(p)} \mathfrak{C}(p^k),$$

wo $\mathfrak{m}_i(p)$ und $\mathfrak{n}_k(p)$ irgendwelche Kardinalzahlen sind, so läßt sich auch $G \otimes H$ explizit bestimmen. Es folgt nämlich:

$$(*) \qquad B_p \otimes C_p = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{r}_j(p)} \mathfrak{C}(p^j),$$

[4]) $O(x)$ bezeichnet die Ordnung des Elementes x.

[5]) Für eine ähnliche Schlußweise s. die Arbeit [3], Satz 1.

[6]) Das Tensorprodukt von zyklischen Gruppen der Ordnung p^n und p^m ist ebenfalls zyklisch und besitzt die Ordnung Min (p^n, p^m).

[7]) $\mathfrak{C}(p^n)$ bezeichnet eine zyklische Gruppe der Ordnung p^n, und $\sum_{\mathfrak{m}} A$ bedeutet die direkte Summe von $\mathfrak{m}$ isomorphen Exemplaren der Gruppe A.

wo

$$\mathfrak{r}_j(p) = \mathfrak{m}_j(p)\mathfrak{n}_j(p) + \mathfrak{m}_j(p) \sum_{k=j+1}^{\infty} \mathfrak{n}_k(p) + \mathfrak{n}_j(p) \sum_{i=j+1}^{\infty} \mathfrak{m}_i(p).$$

Somit ist $G \otimes H$ die direkte Summe der Gruppen (*) für alle p.

Literatur.

[1] N. Bourbaki, *Algèbre*, Chapitre III (Paris, 1948).
[2] J. Dieudonné, Sur les produits tensoriels, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **64** (1948), 101—117.
[3] L. Fuchs, Ringe und ihre additive Gruppe, *Publicationes Math. Debrecen*, **4** (1956), 488—508.
[4] Л. Я. Куликов, К теории абелевых групп произвольной мощности, Матем. Сборник, **16** (1945), 129—162.
[5] H. Whitney, Tensor products of abelian groups, *Duke Math. Journ.*, **4** (1938), 495—520.

(Received April 2, 1957.)