Über die orthogonalen Funktionen. I.

Von KÁROLY TANDORI in Szeged.

Einleitung. [1])

D. MENCHOFF [1] und H. RADEMACHER [1] haben den folgenden Satz bewiesen:

Wenn die Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ die sogenannte Menchoff—Rademachersche Bedingung

(1) $$\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n < \infty$$

erfüllt, ist die orthogonale Reihe

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

für jedes orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ im Grundintervall fast überall konvergent [2]).

D. MENCHOFF [1] hat auch gezeigt, daß die Bedingung (1) im allgemeinen nicht geschwächt werden kann, in dem Sinne, daß die Faktorenfolge $\{\log n\}$ durch keine langsamer ins Unendliche konvergierende Folge $\{W(n)\}$ ersetzbar ist. Nämlich gilt der folgende

Menchoffsche Satz. *Wenn die positive Zahlenfolge $\{W(n)\}$ die Bedingung*

$$W(n) = o(\log n)$$

erfüllt, dann kann ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ und eine Koef-

---

[1]) Diese Arbeit enthält u. a. den ausführlichen Beweis der in den vorläufigen Mitteilungen [1], [2], [3] veröffentlichten Resultate, jedoch werden einige Resultate in einer allgemeineren Form bewiesen.

[2]) In dieser Arbeit wird der Logarithmus mit der Basis 2 verwendet, man beschränkt sich nur auf reelle orthogonale Reihen und es wird angenommen, daß das Grundintervall endlich ist.

fizientenfolge $\{a_n\}$ *angegeben werden, für die*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 W^2(n) < \infty$$

ist und die orthogonale Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x) \tag{3}$$

im Grundintervall überall divergiert.

Später hat D. MENCHOFF [2] gezeigt, daß in seinem Satz *das Funktionensystem* $\{\Phi_n(x)\}$ *im Grundintervall gleichmäßig beschränkt gewählt werden kann.*

In dieser Arbeit wird mit Benützung der Grundideen von D. MENCHOFF zuerst die folgende Verschärfung des Menchoffschen Satzes bewiesen (Satz I):

Es sei $\{a_n\}$ *eine positive, monoton nichtwachsende Zahlenfolge, die die Bedingung*

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n = \infty \tag{4}$$

erfüllt. Dann kann ein (von der Folge $\{a_n\}$ *abhängiges) orthonormiertes Funktionensystem* $\{\Phi_n(x)\}$ *angegeben werden, für welches die Reihe* (3) *im Grundintervall überall divergiert.*

Es wird gezeigt, daß dieser Satz den Menchoffschen Satz enthält.

Man kann leicht einsehen, daß in Satz I die Monotonität wesentlich ist; sonst ist die Behauptung im allgemeinen nicht gültig. Es kann nämlich eine positive, lakunäre Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ angegeben werden, für die (4) erfüllt ist, dagegen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty \tag{5}$$

ist (es sei z. B. $a_{2^{2^m}} = \frac{1}{m^2}$ für $m = 1, 2, \ldots$ und $a_n = 0$ sonst). Dann ist aber die orthogonale Reihe (2) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ im Grundintervall fast überall absolut konvergent[3]).

[3]) Es sei nämlich $\{\varphi_n(x)\}$ ein in dem Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem. Auf Grund von (5) ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b |\varphi_n(x)|\, dx \leq (b-a)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\int_a^b \varphi_n^2(x)\, dx \right)^{1/2} = (b-a)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$$

und so ergibt sich mit Anwendung des B. Levischen Satzes, daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n |\varphi_n(x)|$$

im Grundintervall fast überall konvergiert.

Aus Satz I ergibt sich, daß *für eine positive, monoton nichtwachsende Koeffizientenfolge* $\{a_n\}$ *die Menchoff-Rademachersche Bedingung nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig dafür ist, daß die orthogonale Reihe* (2) *für jedes orthonormierte System* $\{\varphi_n(x)\}$ *im Grundintervall fast überall konvergiert.*

In § 2 wird gezeigt, daß *in Satz* I *das Funktionensystem* $\{\Phi_n(x)\}$ *im Grundintervall gleichmäßig beschränkt gewählt werden kann.*

Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein beliebiges, im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem. Ist $\{a_n\} \in l^2$, d. h. ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty,$$

so erfüllt sich für die Folge $\left\{\frac{a_n}{\log n}\right\}$ die Bedingung (1) und so konvergiert die orthogonale Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\log n} \varphi_n(x)$$

nach dem Menchoff-Rademacherschen Satz im Grundintervall fast überall. Mit Anwendung eines bekannten Kroneckerschen Hilfssatzes [4]) ergibt sich für die Partialsummen der quadratisch integrierbaren Entwicklungen die folgende von H. RADEMACHER stammende Abschätzung:

Ist $\{a_n\} \in l^2$, *so gilt im Grundintervall fast überall*

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n(x) = o(\log N). \tag{6}$$

(Siehe H. RADEMACHER [1], S. 122.)

Es sei $\{l_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, die die Bedingung

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log^2 n}{l_n^2} < \infty \tag{7}$$

erfüllt. Dann erfüllt sich die Bedingung (1) für die Folge $\left\{\frac{1}{l_n}\right\}$ und so konvergiert die orthogonale Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)}{l_n}$$

---

[4]) Der Kroneckersche Hilfssatz lautet folgenderweise. *Es sei* $\{t_n\}$ *eine positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendliche konvergierende Zahlenfolge. Wenn die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{t_n}$$

konvergent ist, dann gilt $u_0 + \ldots + u_N = o(t_N)$ (siehe z. B. A. ZYGMUND [1], S. 255).

nach dem Menchoff-Rademacherschen Satz im Grundintervall fast überall. Daraus ergibt sich mit Anwendung des Kroneckerschen Hilfssatzes die sogenannte

Rademachersche Abschätzung. *Wenn die positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge* $\{l_n\}$ *die Bedingung* (7) *erfüllt, dann gilt im Grundintervall fast überall*

(8) $$\sum_{n=0}^{N} \varphi_n(x) = o(l_N).$$

(Siehe in weniger scharfer Form, nämlich mit der Abschätzung $o\left(\sqrt{N}\log^{3+\varepsilon} N\right)$ $(\varepsilon > 0)$ statt $o(l_N)$, bei H. RADEMACHER [1], S. 122.)

In §§ 3—4 wird mit Hilfe des Menchoffschen Satzes bzw. mit der von uns gegebenen Verallgemeinerung bewiesen, daß die Abschätzungen (6) und (8) im allgemeinen nicht verbessert werden können.

Es sei $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, die die Bedingung

(9) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty$$

erfüllt. Dann ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty$$

und so ergibt sich mit Anwendung des B. Levischen Satzes, daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n^2}$$

im Grundintervall fast überall konvergiert. Daraus erhalten wir mit Anwendung des Kroneckerschen Hilfssatzes die folgende Abschätzung:

Wenn die positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ *die Bedingung* (9) *erfüllt, dann ist im Grundintervall fast überall*

(10) $$\sum_{n=0}^{N} \varphi_n^2(x) = o(\lambda_N^2).$$

(Siehe in weniger scharfer Form, mit der Abschätzung $o(N\log^{1+\varepsilon} N)$ $(\varepsilon > 0)$ statt $o(\lambda_N^2)$, bei S. KACZMARZ [1], S. 99.)

Von der Abschätzung (10) ergibt sich die folgende Behauptung:

Wenn die positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ *die Bedingung* (9) *erfüllt, dann ist im Grundintervall fast überall*

(11) $$\varphi_N(x) = o(\lambda_N).$$

In § 5 wird gezeigt, daß die Abschätzungen (10) und (11) im allgemeinen nicht verbessert werden können.

Betrachten wir nun die Lebesgueschen Funktionen

$$L_N(x) = \int_a^b \left| \sum_{n=0}^{N} \varphi_n(x)\,\varphi_n(t) \right| dt \qquad (N=0,1,\ldots),$$

die zu den Partialsummen der Entwicklungen nach dem in dem Grundintervall $[a, b]$ orthonormierten Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ gehören. Nach der Bunjakowski-Schwarzschen Ungleichung ist

$$\int_a^b \left| \sum_{n=0}^{N} \varphi_n(x)\,\varphi_n(t) \right| dt \leqq (b-a)^{1/2} \left(\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{N} \varphi_n(x)\,\varphi_n(t) \right)^2 dt \right)^{1/2}$$

und so gilt im Grundintervall überall

$$L_N(x) \leqq (b-a)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N} \varphi_n^2(x) \right)^{1/2} \qquad (N=0,1,\ldots). \tag{12}$$

Daraus ergibt sich auf Grund von (10) die folgende Abschätzung:

Wenn die positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ *die Bedingung* (9) *erfüllt, dann ist im Grundintervall fast überall*

$$L_N(x) = o(\lambda_N). \tag{13}$$

(Siehe in weniger scharfer Form, mit der Abschätzung $o(\sqrt{N \log^{1+\varepsilon} N})$ $(\varepsilon > 0)$ statt $o(\lambda_N)$, bei S. Kaczmarz [1], S. 99.)

In speziellen Fällen kann die Abschätzung (13) verschärft verden:

Ist das Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ *im Grundintervall gleichmäßig beschränkt; oder sind die Lebesgueschen Funktionen des Systems im Grundintervall fast überall konstant, so gilt im Grundintervall überall, bzw. fast überall*

$$L_N(x) = O(N^{1/2}). \tag{14}$$

(Siehe S. Kaczmarz [1], S. 99. und H. Rademacher [1], S. 130.)

Der erste Teil der Behauptung ist aus der Ungleichung (12) evident, der zweite Teil kann mit einer einfachen Rechnung bewiesen werden. In § 6 wird mit Anwendung der Ergebnisse von H. Rademacher gezeigt, daß die Abschätzung (13) im allgemeinen nicht verbessert werden kann. Daß die Abschätzung (14) im allgemeinen nicht verbessert werden kann, wurde von H. Rademacher bewiesen. Das Rademachersche System $\{r_n(x)\}$ ist nämlich im Intervall $[0, 1]$ gleichmäßig beschränkt, die Lebesgueschen Funktionen sind im Grundintervall fast überall je einer Konstante gleich und es gilt im

Grundintervall fast überall

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=0}^{N} r_n(x) r_n(t) \right| dt \leqq \delta N^{1/2} \qquad (N=0,1,\ldots),$$

wo δ eine von N unabhängige positive Zahl ist (H. RADEMACHER [1], S. 130-134).

In den folgenden Paragraphen dieser Arbeit werden ähnliche, mit der Cesàroschen Summation zusammenhängende Fragen besprochen.

In § 7 wird mit Anwendung eines Summationssatzes von D. MENCHOFF folgendes bewiesen:

Für die $(C, \alpha>0)$-Mittel $\sigma_n^{(\alpha)}(x)$ der quadratisch integrierbaren Entwicklungen gilt die Abschätzung

$$\sigma_N^{(\alpha)}(x) = o(\log\log N) \tag{15}$$

im Grundintervall fast überall.

Dieser Satz ist eine Verschärfung eines Satzes von G. ALEXITS [1]. Wir werden zeigen, daß die Abschätzung (15) im allgemeinen nicht verbessert werden kann.

In § 8 wird die Verallgemeinerung eines Satzes von I. S. GÁL bewiesen, der sich auf die $(C, \alpha>0)$-Mittel der orthonormierten Funktionen bezieht und folgenderweise lautet:

Es sei $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, die die Bedingung (9) erfüllt. Ist $\alpha>0$, so gilt im Grundintervall fast überall

$$\frac{1}{A_N^{(\alpha)}} \sum_{n=0}^{N} A_{N-n}^{(\alpha)} \varphi_n(x) = o(\lambda_N) \qquad \left(A_m^{(\alpha)} = \binom{m+\alpha}{m}\right). \tag{16}$$

Dieser Satz wurde für $\alpha=1$ von I. S. GÁL [1] mit der Abschätzung $o(\sqrt{N \log^{1+\varepsilon} N})$ $(\varepsilon>0)$ statt $o(\lambda_N)$ bewiesen. Später wurde dieser Satz von G. ALEXITS [1] in einer etwas allgemeineren Form bewiesen. Es wird auch gezeigt, daß die Abschätzung (16) im allgemeinen nicht verbessert werden kann.

In § 9 werden die zu der $(C, \alpha>0)$-Summation gehörigen Lebesgueschen Funktionen

$$L_N^{(\alpha)}(x) = \int_a^b \left| \frac{1}{A_N^{(\alpha)}} \sum_{n=0}^{N} A_{N-n}^{(\alpha)} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt \qquad (N=0,1,\ldots)$$

untersucht. Auf Grund der bekannten Eigenschaften der Faktoren $A_m^{(\alpha)}$ ist evident, daß für $\alpha>0$ im Grundintervall überall

$$L_N^{(\alpha)}(x) \leqq \max_{0 \leqq k \leqq N} L_k(x) \qquad (N=0,1,\ldots)$$

ist. Daraus ergibt sich auf Grund der Abschätzungen (13) und (14) die folgende Behauptung:

Wenn die positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ *die Bedingung* (9) *erfüllt, dann ist für* $\alpha > 0$ *im Grundintervall fast überall*

(17) $$L_N^{(\alpha)}(x) = o(\lambda_N).$$

Ist das Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ *im Grundintervall* $[a, b]$ *gleichmäßig beschränkt, so ist für* $\alpha > 0$ *im Grundintervall überall*

(18) $$L_N^{(\alpha)}(x) = O(N^{1/2}).$$

Durch eine Modifikation des Grundgedankens von § 6 kann man zeigen, daß im allgemeinen die Abschätzungen (17) und (18) nicht verbessert werden können. Auf Grund dieser Ergebnisse ist ersichtlich, daß *von der gewöhnlichen Summation zu den Cesàroschen Mitteln übergehend, die Größenordnung der Lebesgueschen Funktionen im allgemeinen nicht abnimmt.*

Wir werden sehen, daß die Fälle $\alpha > 0$ und $\alpha = 0$ gleichzeitig behandelt werden können. Trotzdem werden die zwei Fälle gesondert untersucht, weil der Fall $\alpha > 0$ im Vergleich zum Fall $\alpha = 0$ wesentlich komplizierter ist.

Ich möchte den Herren Professoren G. ALEXITS und B. SZ.-NAGY meinen aufrichtigen Dank aussprechen für ihre wertvollen Ratschläge bei der Fertigstellung der vorliegenden Arbeit.

§ 1. Die Verallgemeinerung des Menchoffschen Satzes.

In diesem Paragraphen wird zuerst die folgende, schon in der Einleitung erwähnte Verschärfung des Menchoffschen Satzes bewiesen.

Satz I. *Es sei* $\{a_n\}$ *eine positive, monoton nichtwachsende Zahlenfolge, für die die Bedingung*

(1.1) $$\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n = \infty$$

erfüllt ist. Dann kann ein im Grundintervall $[a, b]$ *orthonormiertes Funktionensystem* $\{\Phi_n(x)\}$ *angegeben werden, für welches die orthogonale Reihe*

(1.2) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x)$$

im Grundintervall $[a, b]$ *überall divergiert.*

Mit anderen Worten, ist für eine positive, monoton nichtwachsende Folge $\{a_n\}$ *die Menchoff-Rademachersche Bedingung*

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n < \infty$$

nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig dafür, daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall konvergiert.

Zuerst sei gezeigt, daß aus Satz I der Menchoffsche Satz folgt. Zum Beweis dieser Behauptung benötigen wir den folgenden

Hilfssatz I. *Es sei $\{W(n)\}$ eine positive Zahlenfolge, für die*

$$W(n) = o(\log n)$$

gilt. Es kann eine positive, monoton nichtabnehmende Folge $\{v(n)\}$ angegeben werden, die die Bedingungen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{W^2(n)}{(n \log^3 n) v^2(n)} < \infty \tag{1.3}$$

und

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n \log n) v^2(n)} = \infty \tag{1.4}$$

erfüllt.

Beweis von Hilfssatz I. Nach unserer Annahme ist

$$\frac{W(n)}{\log n} = o(1).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß $W(n)(\log n)^{-1} \leqq 1$ für jedes $n \geqq 2$ gilt. Da

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = \infty$$

ist, kann eine Indexfolge $\{N_k\}$ $(N_0 = 2)$ bestimmt werden, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

$$\left(\frac{W(n)}{\log n}\right)^2 \leqq \frac{1}{k^2} \text{ für } n \geqq N_{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{1.5}$$

und

$$\sum_{m=N_{k-1}}^{N_k - 1} \frac{1}{m \log m} \leqq \sum_{m=N_k}^{N_{k+1}-1} \frac{1}{m \log m} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{1.6}$$

Es sei

$$v(n) = \left\{ \sum_{m=N_{k-1}}^{N_k - 1} \frac{1}{m \log m} \right\}^{1/2} \text{ für } N_{k-1} \leqq n < N_k \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{1.7}$$

Die so definierte Zahlenfolge $\{\nu(n)\}$ ist positiv und nach (1.6) monoton nichtabnehmend. Nach (1.5) und (1.7) ist

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{W^2(n)}{(n \log^3 n)\nu^2(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=N_{k-1}}^{N_k - 1} \frac{W^2(n)}{(n \log^3 n)\nu^2(n)} \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

also wird die Bedingung (1.3) erfüllt. Nach (1.7) gilt für jedes s

$$\sum_{n=2}^{N_s - 1} \frac{1}{(n \log n)\nu^2(n)} = \sum_{k=1}^{s} \sum_{n=N_{k-1}}^{N_k - 1} \frac{1}{(n \log n)\nu^2(n)} = \sum_{k=1}^{s} 1 = s,$$

woraus (1.4) folgt.

Damit haben wir den Hilfssatz I bewiesen.

Es sei $\{W(n)\}$ eine positive Zahlenfolge, für die die Bedingung $W(n) = o(\log n)$ erfüllt ist. Mit Anwendung von Hilfssatz I ergibt sich eine positive, monoton nichtabnehmende Folge $\{\nu(n)\}$, die die Bedingungen (1.3) und (1.4) erfüllt. Es sei nun $a_0 = a_1 = \frac{1}{\nu(2)}$ und $a_n = \frac{1}{\sqrt{n \log^3 n}\, \nu(n)}$ für $n \geqq 3$. Es ist klar, daß diese Folge positiv, monoton nichtwachsend ist und da nach (1.4)

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n \log n)\nu^2(n)} = \infty$$

gilt, wird die Bedingung (1.1) erfüllt. So gibt es nach dem Satz I ein im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$, für welches die orthogonale Reihe (1.2) im Grundintervall $[a, b]$ überall divergiert. Nach (1.3) gilt aber:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 W^2(n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{W^2(n)}{(n \log^3 n)\nu^2(n)} = \infty.$$

Daher erfüllt die Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ und das mit Anwendung von Satz I gewonnene Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ die in dem Menchoffschen Satz vorkommenden Bedingungen.

Damit haben wir bewiesen, daß aus Satz I der Menchoffsche Satz folgt.

Zum Beweis des Satzes I benötigen wir die folgenden zwei Hilfssätze.

Hilfssatz II. *Es seien $c(\geqq 1)$ und $p(\geqq 2)$ positive ganze Zahlen. Es kann ein im Intervall $[0, 5]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen*[5] $\{f_l(c; p; x)\}$ $(l = 1, \ldots, 2p)$ *mit den folgenden Eigenschaften angegeben werden: zu jedem Punkt $x \in \left[\frac{2}{c}, \frac{3}{c}\right)$ gibt es eine von x abhängige natürliche*

[5]) Eine Funktion in (a, b) heißt eine *Treppenfunktion*, wenn (a, b) in endlichviele Teilintervalle zerlegt werden kann, so daß die Funktion in jedem Teilintervall kostant ist.

Zahl $m(x)\,(<p)$, *so daß die Funktionswerte* $f_1(c,p;x),\ldots,f_{p+m(x)}(c,p;x)$ *positiv sind und*

$$f_1(c,p;x)+\cdots+f_{p+m(x)}(c,p;x)\geqq A\sqrt{cp}\log p \tag{1.8}$$

gilt, wo A eine positive, von x, c und p unabhängige Zahl ist.

Für $c=1$ wurde dieser Hilfssatz von S. KACZMARZ [2] bewiesen; der folgende Beweis für beliebiges c ist ähnlich dem Beweis von S. KACZMARZ für den Fall $c=1$.

Beweis von Hilfssatz II. Es sei

$$\bar f_l(c,p;x)=\frac{1}{k-p-l-\frac{1}{2}}\quad \text{für } x\in\left[\frac{k-1}{cp},\frac{k}{cp}\right)\quad (k=1,\ldots,4cp;\ l=1,\ldots,2p).$$

Dann ist

$$\int_0^4 \bar f_l^2(c,p;x)\,dx=\sum_{k=1}^{4cp}\frac{1}{\left(k-p-l-\frac{1}{2}\right)^2}\frac{1}{cp}\qquad (l=1,\ldots,2p),$$

woraus folgt

$$\int_0^4 \bar f_l^2(c,p;x)\,dx\leqq\frac{A'}{cp}\qquad (l=1,\ldots,2p), \tag{1.9}$$

wo A' eine von c und p unabhängige Zahl ist.

Ferner haben wir für $i>j$:

$$\int_0^4 \bar f_i(c,p;x)\bar f_j(c,p;x)\,dx=\frac{1}{cp}\sum_{k=1}^{4cp}\frac{1}{\left(k-p-i-\frac{1}{2}\right)\left(k-p-j-\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{cp}\frac{1}{i-j}\sum_{k=1}^{4cp}\left\{\frac{1}{k-p-i-\frac{1}{2}}-\frac{1}{k-p-j-\frac{1}{2}}\right\}=$$

$$=\frac{1}{cp}\frac{1}{i-j}\left\{\sum_{k=1-p-i}^{(4c-1)p-i}\frac{1}{k-\frac{1}{2}}-\sum_{k=1-p-j}^{(4c-1)p-j}\frac{1}{k-\frac{1}{2}}\right\}.$$

Daraus folgt

$$\int_0^4 \bar f_i(c,p;x)\bar f_j(c,p;x)\,dx=\frac{1}{cp}\frac{1}{i-j}\left\{\sum_{k=1-p-i}^{-p-j}\frac{1}{k-\frac{1}{2}}-\sum_{k=(4c-1)p-i+1}^{(4c-1)p-j}\frac{1}{k-\frac{1}{2}}\right\}$$

und so ist

$$(1.10)\qquad \left|\int_0^4 \bar{f}_i(c,p;x)\bar{f}_j(c,p;x)\,dx\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{cp}\,\frac{1}{i-j}\left\{\frac{i-j}{p+j+\frac{1}{2}}+\frac{i-j}{(4c-1)p-i-\frac{1}{2}}\right\} \leqq \frac{1}{cp}\,\frac{2}{p}.$$

Um von den im Intervall $[0,4]$ so definierten Funktionen $f_l(c,p;x)$ $(l=1,\ldots,2p)$ ein im Intervall $[0,5]$ orthogonales Funktionensystem zu erhalten, sollen diese Funktionen im Intervall $[4,5]$ wie folgt definiert werden. Wir teilen das Intervall $[4,5]$ in $N=2p(2p-1)$ Teilintervalle gleicher Länge $I_{i,j}$ $(1\leqq i\leqq 2p,\ 1\leqq j\leqq 2p,\ i\neq j)$. Es sei, für $l=1,\ldots,2p$,

$$\bar{f}_l(c,p;x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{1}{2}N|\alpha_{l,j}|} & x\in I_{l,j},\\ -\sqrt{\frac{1}{2}N|\alpha_{l,j}|}\operatorname{sign}\alpha_{l,j} & x\in I_{j,l},\\ 0 & \text{sonst},\end{cases}$$

wo

$$\alpha_{i,j}=\int_0^4 \bar{f}_i(c,p;x)\bar{f}_j(c,p;x)\,dx$$

gesetzt wird. Die so definierten Treppenfunktionen $\{\bar{f}_l(c,p;x)\}$ $(l=1,\ldots,2p)$ bilden im Intervall $[0,5]$ offenbar ein orthogonales System, ferner ist

$$\int_0^5 \bar{f}_l^2(c,p;x)\,dx=\int_0^4 \bar{f}_l^2(c,p;x)\,dx+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{l-1}|\alpha_{l,n}|+\frac{1}{2}\sum_{n=l+1}^{2p}|\alpha_{l,n}|.$$

Hieraus folgt auf Grund von (1.9) und (1.10)

$$(1.11)\qquad \int_0^5 \bar{f}_l^2(c,p;x)\,dx\leqq\frac{A''}{cp}\qquad (l=1,\ldots,2p),$$

wo A'' eine von c und p unabhängige positive Zahl ist.

Ist $x\in\left[\frac{2}{c},\frac{3}{c}\right)$, so gibt es eine von x abhängige natürliche Zahl $m(x)$ $(<p)$ derart, daß

$$x\in\left[\frac{2p+m(x)}{cp},\frac{2p+m(x)+1}{cp}\right)$$

gilt. Nach der Definition von $\bar{f}_l(c, p; x)$ sind die Funktionswerte $\bar{f}_1(c, p; x), \ldots, \bar{f}_{p+m(x)}(c, p; x)$ positiv und es gilt

$$\sum_{l=1}^{p+m(x)} \bar{f}_l(c, p; x) = \sum_{l=1}^{p+m(x)} \frac{1}{2p+m(x)+1-p-l-\frac{1}{2}} = \sum_{l=1}^{p+m(x)} \frac{1}{l-\frac{1}{2}}.$$

Für die normierten Funktionen

$$f_l(c, p; x) = \left\{ \int_0^5 \bar{f}_l^2(c, p; x)\, dx \right\}^{-1/2} \bar{f}_l(c, p; x) \qquad (l = 1, \ldots, 2p)$$

ergibt sich dann auf Grund von (1.11) die Ungleichung (1.8).

Damit ist der Hilfssatz II bewiesen.

Ist $I = [u, v]$ ein beliebiges endliches Intervall, so definieren wir:

$$f_l(c, p, I; x) = \begin{cases} \sqrt{5}\, f_l\left(c, p; 5\dfrac{x-u}{v-u}\right) & \text{für } u < x < v, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(l = 1, \ldots, 2p)$ und

$$F(c, I) = \left[\frac{v-u}{5}\frac{2}{c} + u,\ \frac{v-u}{5}\frac{3}{c} + u\right].$$

Dann ist

$$\int_I f_i(c, p, I; x) f_j(c, p, I; x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j, \\ \mu(I) & \text{für } i = j, \end{cases} \tag{1.12}$$

$$\mu\Big(F(c, I)\Big) = \frac{\mu(I)}{5}\frac{1}{c},\text{[6]} \tag{1.13}$$

und für $x \in F(c, I)$ gibt es nach (1.8) eine von x abhängige natürliche Zahl $m(x) (< p)$ derart, daß die Funktionswerte $f_1(c, p, I; x), \ldots, f_{p+m(x)}(c, p, I; x)$ positiv sind und die Ungleichung

$$f_1(c, p, I; x) + \cdots + f_{p+m(x)}(c, p, I; x) \geqq \sqrt{5}\, A \sqrt{cp} \log p \tag{1.14}$$

besteht.

H i l f s s a t z III. *Es sei $\{a_n\}$ eine positive, monoton nichtwachsende Koeffizientenfolge, die die Bedingung* (1.1) *erfüllt. Dazu kann man ein im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ mit der folgenden Eigenschaft angeben:*

Für fast alle Punkte x des Grundintervalls und für unendlich viele von x abhängige natürliche Zahlen m kann eine natürliche Zahl $n_m(x) (< 2^{m+2}-1)$

---

[6]) Mit $\mu(H)$ wird das Lebesguesche Maß der Menge H bezeichnet.

angegeben werden, so daß die Funktionswerte $\Phi_{N_m}(x), \ldots, \Phi_{N_m+n_m(x)}(x)$ *gleiches Vorzeichen haben und*

$$(1.15) \qquad |\Phi_{N_m}(x)+\cdots+\Phi_{N_m+n_m(x)}| > B\frac{1}{a_{N_{m+1}}}$$

gilt; dabei ist $N_0=0$, $N_m=2(2+\cdots+2^m)$ $(m \geqq 1)$ *und B ist eine von x und m unabhängige positive Zahl.*

Beweis von Hilfssatz III. Wir konstruieren in $[a, b]$ zuerst ein orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\{\Phi_n(x)\}$ $(n=0, 1, \ldots)$ und meßbare Mengen F_m $(m=0, 1, \ldots)$, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a) für jedes $x \in F_m$ gibt es eine natürliche Zahl $n_m(x)\,(<2^{m+2}-1)$, so daß die Funktionswerte $\Phi_{N_m}(x), \ldots, \Phi_{N_m+n_m(x)}(x)$ gleiches Vorzeichen haben, und (1.15) mit einer von x und m unabhängigen Konstanten B gültig ist;

b) die Mengen F_m $(m=0, 1, \ldots)$ sind stochastisch unabhängig[7]) und es gilt

$$(1.16) \qquad \mu(F_m) \geqq \frac{b-a}{10}\min\{1, N_{m+1}a^2_{N_{m+1}}\log^2 N_{m+1}\}.$$

Der Grundgedanke der folgenden Konstruktion wird von den Arbeiten von S. KACZMARZ [2] und D. MENCHOFF [1] entnommen.

Zuerst soll erwähnt werden, daß

$$(1.17) \qquad N_{m+1} < 4N_m \qquad (m=1, 2, \ldots)$$

ist. Da die Folge $\{a_n\}$ positiv, monoton nichtwachsend ist, gilt für jedes s

$$\sum_{n=N_1}^{N_s-1} a_n^2\log^2 n = \sum_{k=1}^{s-1}\sum_{n=N_k}^{N_{k+1}-1} a_n^2\log^2 n < \sum_{k=1}^{s-1}(N_{k+1}-N_k)a^2_{N_k}\log^2 N_{k+1},$$

also folgt auf Grund von (1.17)

$$\sum_{n=N_1}^{N_s-1} a_n^2\log^2 n < 16\sum_{k=1}^{s-1} N_k a^2_{N_k}\log^2 N_k$$

und so ist nach (1.1)

$$\sum_{m=0}^{\infty} N_{m+1}a^2_{N_{m+1}}\log^2 N_{m+1} = \infty.$$

---

[7]) D. h. für jede endliche Indexfolge $k_1<k_2<\cdots<k_n$ gilt

$$\frac{\mu(F_{k_1}\cap F_{k_2}\cap\cdots\cap F_{k_n})}{b-a} = \frac{\mu(F_{k_1})}{b-a}\,\frac{\mu(F_{k_2})}{b-a}\cdots\frac{\mu(F_{k_n})}{b-a}.$$

Daraus entnehmen wir, daß aus (1.16) die Beziehung

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mu(F_m) = \infty \tag{1.18}$$

folgt.

Hieraus und aus der stochastischen Unabhängigkeit der Mengen F_m ergibt sich auf Grund des zweiten Borel-Cantellischen Lemmas[8]):

$$\mu(\overline{\lim_{m\to\infty}} F_m) = b-a.$$

Für $x \in \overline{\lim\limits_{m\to\infty}} F_m$ gilt aber (1.15) für unendlich viele m.

Damit wird also der Hilfssatz III bewiesen werden.

Nun gehen wir zur Konstruktion der Funktionen $\Phi_n(x)$ und der Mengen F_m über.

Wir beginnen mit der Bemerkung, daß aus der Definition der Indexfolge $\{N_k\}$ folgt:

$$\sqrt{2^{m+1}} > \frac{1}{2}\sqrt{N_{m+1}}, \quad m+1 \geqq \frac{1}{3}\log N_{m+1} \qquad (m=0, 1, \ldots). \tag{1.19}$$

---

[8]) Dieses Lemma (siehe z. B. W. Feller [1], S. 155) lautet folgenderweise:
Sind die meßbaren Mengen $E_m (\subseteq [a, b])$ $(m=0, \ldots)$ stochastisch unabhängig und ist

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mu(E_m) = \infty, \tag{*}$$

so gilt

$$\mu(\overline{\lim_{m\to\infty}} E_m) = b-a.$$

Diese Form des Borel-Cantellischen Lemmas kann z. B. auf folgender Weise bewiesen werden. Wegen der stochastischen Unabhängigkeit gilt für alle l und s $(s \geqq l)$

$$\mu(\bigcup_{k=l}^{s} E_k) = (b-a) - \mu(C\bigcup_{k=l}^{s} E_k) = (b-a) - \mu(\bigcap_{k=l}^{s} CE_k) =$$

$$= (b-a)\left\{1 - \prod_{k=l}^{s} \frac{\mu(CE_k)}{b-a}\right\} = (b-a)\left\{1 - \prod_{k=l}^{s}\left(1 - \frac{\mu(E_k)}{b-a}\right)\right\},$$

wo CH die Menge $[a, b] - H$ bezeichnet. Auf Grund der Annahme (*) gilt

$$\prod_{k=l}^{\infty}\left(1 - \frac{\mu(E_k)}{b-a}\right) = 0,$$

also ist

$$\mu\left(\bigcup_{k=l}^{\infty} E_k\right) = b-a.$$

Daraus ergibt sich auf Grund der Relation

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} E_m = \bigcap_{l=0}^{\infty}(\bigcup_{k=l}^{\infty} E_k)$$

unsere Behauptung.

Nun wenden wir den Hilfssatz II an, undzwar mit der folgenden Wahl der Zahlen c, p:

$$c_1 = \left[\frac{1}{N_1 a_{N_1}^2 \log^2 N_1} + 1\right],^{9)} \qquad p_1 = 2.$$

Es sei

$$\Phi_{l-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} f_l(c_1, p_1, [a, b]; x) \qquad (l = 1, \ldots, N_1)$$

und $F_0 = F(c_1, [a, b])$. Nach dem Hilfssatz II sind $\Phi_n(x)$ $(n = 0, \ldots, N_1 - 1)$ Treppenfunktionen und bilden nach (1. 12) ein in $[a, b]$ orthonormiertes System. Auf Grund von (1. 13) ist

$$\mu(F_0) = \frac{b-a}{5}\left[\frac{1}{N_1 a_{N_1}^2 \log^2 N_1} + 1\right]^{-1} \geqq \frac{b-a}{5} \frac{N_1 a_{N_1}^2 \log^2 N_1}{N_1 a_{N_1}^2 \log^2 N_1 + 1},$$

woraus folgt, daß (1. 16) für $m = 0$ erfüllt wird. Ist $x \in F_0$, so gibt es nach (1. 14) eine von x abhängige natürliche Zahl $n_0(x)$ $(< 2^2 - 1)$, für die die Funktionswerte $\Phi_0(x), \ldots, \Phi_{n_0(x)}(x)$ positiv sind und

$$\Phi_0(x) + \cdots + \Phi_{n_0(x)}(x) \geqq \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{b-a}} A \left\{\left[\frac{1}{N_1 a_{N_1}^2 \log^2 N_1} + 1\right] 2\right\}^{1/2} \geqq$$

$$\geqq \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{b-a}} A \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N_1} a_{N_1} \log N_1}$$

ist. Daraus ergibt sich auf Grund von (1. 19), daß (1. 15) für $m = 0$ erfüllt ist, wenn $B = \frac{1}{6} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{b-a}} A$ gewählt wird.

Es sei $m (\geqq 1)$ ein beliebiger Index. Wir nehmen an, daß die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(n = 0, \ldots, N_m - 1)$ und die Mengen F_k $(k = 0, \ldots, m-1)$ bereits definiert sind, so daß die $\Phi_n(x)$ Treppenfunktionen sind, in $[a, b]$ ein orthonormiertes System bilden und die Bedingungen a), b) für die Mengen $F_0, \ldots, F_{m-1}$ erfüllt sind (insbesondere sind also $F_0, \ldots, F_{m-1}$ stochastisch unabhängig).

Dann kann eine Einteilung des Intervalls $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle I_ϱ $(\varrho = 1, \ldots, r)$ angegeben werden, so daß in den einzelnen Teilintervallen jede Funktion $\Phi_n(x)$ $(n = 0, \ldots, N_m - 1)$ konstant ist. Die zwei Hälften des Intervalls I_ϱ werden mit I'_ϱ bzw. I''_ϱ bezeichnet $(\varrho = 1, \ldots, r)$.

Wir wenden nun den Hilfssatz II mit den Zahlen

$$c_{m+1} = \left[\frac{1}{N_{m+1} a_{N_{m+1}}^2 \log^2 N_{m+1}} + 1\right], \; p_{m+1} = 2^{m+1}$$

---

9) Im allgemeinen bezeichnen wir mit $[\alpha]$ den ganzen Teil von α.

an. Es sei

$$\Phi_{N_m+l-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}\left\{\sum_{\varrho=1}^{r} f_l\left(c_{m+1},p_{m+1},I'_\varrho;x\right)-\sum_{\varrho=1}^{r} f_l\left(c_{m+1},p_{m+1},I''_\varrho;x\right)\right\}$$

$(l=1,\ldots,2\cdot 2^{m+1})$ und

$$F_m=\bigcup_{\varrho=1}^{r}\left(F(c_{m+1},I'_\varrho)\cup F(c_{m+1},I''_\varrho)\right).$$

Auf Grund des Hilfssatzes II ist es klar, daß die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(N_m\leqq n<N_{m+1})$ Treppenfunktionen sind.

Es sei $1\leqq i\leqq 2^{m+2}$, $1\leqq j\leqq 2^{m+2}$. Dann ist nach (1.12)

$$\int_a^b \Phi_{N_m+i-1}(x)\,\Phi_{N_m+j-1}(x)\,dx=$$

$$(1.20)\qquad \begin{aligned}&=\frac{1}{b-a}\left\{\sum_{\varrho=1}^{r}\int_{I'_\varrho} f_i\left(c_{m+1},p_{m+1},I'_\varrho;x\right)f_j\left(c_{m+1},p_{m+1},I'_\varrho;x\right)dx+\right.\\&\left.+\sum_{\varrho=1}^{r}\int_{I''_\varrho} f_i\left(c_{m+1},p_{m+1},I''_\varrho;x\right)f_j\left(c_{m+1},p_{m+1},I''_\varrho;x\right)dx\right\}=\\&=\begin{cases}0 & \text{für } i\neq j,\\ \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\sum_{\varrho=1}^{r}\left(\mu(I'_\varrho)+\mu(I''_\varrho)\right)=1 & \text{für } i=j.\end{cases}\end{aligned}$$

Es sei ferner $0\leqq n<N_m$, $1\leqq l\leqq 2^{m+2}$. Wir bezeichnen mit $c_\varrho(n)$ den im Intervall I_ϱ angenommenen Wert der Funktion $\Phi_n(x)$ $(\varrho=1,\ldots,r)$. Dann ist

$$(1.21)\qquad \begin{aligned}&\int_a^b \Phi_n(x)\,\Phi_{N_m+l-1}(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{b-a}}\left\{\sum_{\varrho=1}^{r}c_\varrho(n)\int_{I'_\varrho} f_l\left(c_{m+1},p_{m+1},I'_\varrho;x\right)dx-\right.\\&\left.-\sum_{\varrho=1}^{r}c_\varrho(n)\int_{I''_\varrho} f_l\left(c_{m+1},p_{m+1},I''_\varrho;x\right)dx\right\}=\\&=\frac{1}{\sqrt{5(b-a)}}\sum_{\varrho=1}^{r}c_\varrho(n)\left(\mu(I'_\varrho)-\mu(I''_\varrho)\right)\int_0^5 f_l\left(c_{m+1},p_{m+1};x\right)dx=0.\end{aligned}$$

Nach (1.20) und (1.21) bilden die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(n=0,\ldots,N_{m+1}-1)$ in $[a,b]$ ein orthonormiertes System.

Auf Grund von (1. 13) ist

$$\mu(F_m) = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{N_{m+1}a^2_{N_{m+1}}\log^2 N_{m+1}}+1\right]^{-1}\sum_{\varrho=1}^{r}(\mu(I'_\varrho)+\mu(I''_\varrho)) \geqq$$

$$\geqq \frac{b-a}{5}\,\frac{N_{m+1}a^2_{N_{m+1}}\log^2 N_{m+1}}{N_{m+1}a^2_{N_{m+1}}\log^2 N_{m+1}+1},$$

woraus folgt, daß (1. 16) auch für den Index m gilt. Ist $x\in F_m$, so gibt es nach (1. 14) eine von x abhängige natürliche Zahl $n_m(x)\,(<2^{m+2}-1)$, für die die Funktionswerte $\Phi_{N_m}(x),\ldots,\Phi_{N_m+n_m(x)}(x)$ gleiches Vorzeichen haben (positives bzw. negatives jenachdem $x\in I'_\varrho$ bzw. $x\in I''_\varrho$ ist) und

$$|\Phi_{N_m}(x)+\cdots+\Phi_{N_m+n_m(x)}(x)| \geqq$$

$$\geqq \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{b-a}}A\left\{\left[\frac{1}{N_{m+1}a^2_{N_{m+1}}\log^2 N_{m+1}}+1\right]2^{m+1}\right\}^{1/2}(m+1)\geqq$$

$$\geqq \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{b-a}}\,\frac{\sqrt{2^{m+1}}}{\sqrt{N_{m+1}}a_{N_{m+1}}\log N_{m+1}}(m+1)$$

ist; daraus folgt auf Grund von (1. 19), daß (1. 15) auch für den Index m gilt, wenn B wie oben gewählt wird.

Es ist klar, daß die Mengen $F_0,\ldots,F_m$ stochastisch unabhängig sind.

Durch vollständige Induktion erhalten wir also ein im Grundintervall $[a,b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ $(n=0,1,\ldots)$ und Mengen F_k $(k=0,1,\ldots)$, so daß die Bedingungen a) und b) erfüllt sind.

Damit ist der Hilfssatz III bewiesen.

B e w e i s v o n S a t z I. Wir nehmen an, daß die positive, monoton nichtwachsende Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ die Bedingung (1. 1) erfüllt. Nach Hilfssatz III existiert ein im Grundintervall $[a,b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ mit der Eigenschaft, daß (1. 15) in fast allen Punkten $x\in[a,b]$ für unendlich viele Indizes m erfüllt ist; dabei ist $n_m(x)<2^{m+2}-1$ und die Funktionswerte $\Phi_{N_m}(x),\ldots,\Phi_{N_m+n_m(x)}(x)$ haben gleiches Vorzeichen.

Auf Grund der Monotonität der Folge $\{a_n\}$ und wegen der Ungleichung $N_m+n_m(x)<N_m+2^{m+2}=N_{m+1}$ ergibt sich, daß in fast allen Punkten $x\in[a,b]$ für unendlich viele m

$$(1.22)\qquad |a_{N_m}\Phi_{N_m}(x)+\cdots+a_{N_m+n_m(x)}\Phi_{N_m+n_m(x)}(x)|>B$$

gilt. So divergiert für das erhaltene Funktionensystem die orthogonale Reihe (1.2) fast überall in $[a,b]$. Wenn man die Werte der Funktionen $\Phi_n(x)$ $(n=0,1,\ldots)$ auf einer Menge vom Maße Null auf geeigneter Weise verändert (es sei z. B. $\Phi_n(x)=1$ $(n=0,1,\ldots)$ in jedem Punkt $x\in[a,b]$, wo die

Reihe (1.2) konvergiert), kann man erreichen, daß die orthogonale Reihe (1.2) in $[a, b]$ überall divergiert.

Damit ist der Satz I vollständig bewiesen.

Wir beweisen jetzt die folgende Verallgemeinerung des Satzes I:

Satz II. *Es sei $\{a_n\}$ eine positive, monoton nichtwachsende Zahlenfolge, für die die Bedingung* (1.1) *erfüllt wird. Es kann im Grundintervall $[a, b]$ ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ derart angegeben werden, daß die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* \Phi_n(x) \tag{1.23}$$

für jede Koeffizientenfolge $\{a_n^*\}$ mit

$$a_n^* \geqq \eta a_n \qquad (n = 0, 1, \ldots; \eta > 0) \tag{1.24}$$

in $[a, b]$ überall divergiert.

Beweis von Satz II. Wir wenden für die Folge $\{a_n\}$ den Hilfssatz III an; es sei $\{\Phi_n(x)\}$ das so erhaltene, in $[a, b]$ orthonormierte Funktionensystem. Aus (1.22) folgt, da die dort vorkommenden Funktionswerte gleiches Vorzeichen haben, die Ungleichung

$$|a_{N_m}^* \Phi_{N_m}(x) + \cdots + a_{N_m+n_m(x)}^* \Phi_{N_m+n_m(x)}(x)| > \eta B. \tag{1.25}$$

Da also (1.25) in fast allen Punkten $x \in [a, b]$ für unendlich viele Indizes m gilt, ist die Reihe (1.23) in $[a, b]$ fast überall divergent. Mit einer geeigneten Veränderung der Werte von $\Phi_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ auf einer Menge vom Maße Null kann erreicht werden, daß die Reihe (1.23) überall divergiert.

Damit haben wir den Satz II bewiesen.

Es soll noch bemerkt werden, daß in Satz I die Monotonität der Koeffizientenfolge bzw. in Satz II die Bedingung (1.24) nur dann notwendig ist, wenn die genannte Folge zur Klasse l^2 gehört. Ist nämlich

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \infty,$$

so divergiert die Rademachersche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r_n(x)$$

bekanntlich in $[0, 1]$ fast überall (siehe J. Khintchine—A. N. Kolmogorov [1]).

§ 2. Gleichmäßig beschränkte orthonormierte Funktionensysteme.

In diesem Paragraphen wird gezeigt, daß *in den Sätzen* I *und* II *gefordert werden kann, daß das orthonormierte Funktionensystem gleichmäßig beschränkt ist.*

Der Beweis dieser Behauptung erfolgt mit Benützung der Grundideen von D. MENCHOFF. Der Beweis wird nicht ausführlich ausgearbeitet, sondern es wird manchmal auf die betreffenden Stellen der Arbeit [2] von D. MENCHOFF hingewiesen werden. Er ist dem Beweis von Satz I ähnlich, aber doch davon ganz unabhängig, so daß wir also den Satz I in einer verschärften Form nochmals beweisen. Der Beweis der verschärften Behauptung ist aber viel komplizierter als der frühere.

Wir werden das folgende Lemma benützen.

Lemma von Menchoff (D. MENCHOFF [2], S. 104.) *Es seien d und q positive ganze Zahlen, $0<d<q$. Zu jedem Indexpaar (i,j) mit $1\leqq i\leqq q, 1\leqq j\leqq q$ und $|i-j|=d$ soll eine von Null verschiedene Zahl $\alpha_{i,j}$ zugeordnet werden; wir bezeichnen mit β_d das Maximum der absoluten Beträge der Zahlen $\alpha_{i,j}$. In jedem Intervall (u,v) mit*

$$v-u>2\beta_d \tag{2.1}$$

können dann Funktionen $\varphi_l(x)$ $(l=1,\ldots,q)$ derart definiert werden, daß die folgenden Bedingungen erfüllt werden: $\varphi_l(x)$ ist eine Treppenfunktion und es gilt:

$$|\varphi_l(x)|=1 \qquad (u<x\leqq v;\ l=1,\ldots,q),$$

$$\int_u^v \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx=-\alpha_{i,j} \qquad (|i-j|=d,\ 1\leqq i\leqq q,\ 1\leqq j\leqq q),$$

$$\int_u^v \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx=0 \qquad (i\neq j,\ |i-j|\neq d,\ 1\leqq i\leqq q,\ 1\leqq j\leqq q).$$

Mit der Hilfe dieses Lemmas kann der dem Hilfssatz II entsprechende folgende Hilfssatz bewiesen werden.

Hilfssatz II′. *Es sei $p(\geqq 2)$ eine natürliche Zahl und es sei*

$$1\leqq c\leqq \frac{1}{4}p. \tag{2.2}$$

Es existiert eine von c und p unabhängige Zahl β, so daß im Intervall $[-1,\beta]$ ein (von c und p abhängiges) orthonormiertes System von den Treppenfunktionen $\{g_l(c,p;x)\}$ $(l=1,\ldots,p^2)$ angegeben werden kann, welches die folgenden Bedingungen erfüllt:

es gibt eine von c und p unabhängige positive Zahl M, so daß

(2.3) $$|g_l(c,p;x)| < M \quad (-1 \leqq x \leqq \beta;\ l=1,\dots,p^2)$$

ist, es existiert ferner für jeden Punkt $x \in \left[\frac{1}{2c}, \frac{1}{c}\right)$ *eine von x abhängige natürliche Zahl* $m(x)\,(<p^2)$, *so daß die Funktionswerte* $g_1(c,p;x),\dots,g_{m(x)}(c,p;x)$ *positiv sind und*

(2.4) $$\sum_{l=1}^{m(x)} g_l(c,p;x) > C\sqrt{c}\,p\log p$$

gilt, wo C eine von c, p und x unabhängige positive Zahl ist.

Für $c=1$ wurde dieser Hilfssatz im wesentlichen von D. MENCHOFF ([2], S. 110) bewiesen.

Beweis von Hilfssatz II'. Es sei für $l=1,\dots,p^2$

$$\omega_l(c,p;x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{cp}}{cp^2x-l-\sqrt{cp}} & \text{für } -\infty<x<\dfrac{l}{cp^2},\\[2ex] \dfrac{\sqrt{cp}}{cp^2x-l+\sqrt{cp}} & \text{für } \dfrac{l}{cp^2}\leqq x<\infty.\end{cases}$$

Offenbar ist

$$\omega_l(c,p;x)>0 \quad \text{für} \quad \frac{l}{cp^2}\leqq x$$

und

(2.5) $$|\omega_l(c,p;x)|\leqq 1 \qquad (-\infty<x<\infty),$$

ferner kann gezeigt werden, daß

(2.6) $$\left|\int_{-1}^{2}\omega_i(c,p;x)\omega_j(c,p;x)dx\right| < \frac{1}{\log e}\,\frac{4\sqrt{cp}}{d(d+2\sqrt{cp})}\log\frac{d+\sqrt{cp}}{\sqrt{cp}}+\frac{2}{p^2}$$

ist. (Siehe D. MENCHOFF [2], S. 111.)

Es sei $x\in\left[\frac{1}{2c},\frac{1}{c}\right)$. Dann gibt es eine von x abhängige natürliche Zahl $m(x)$, $\frac{p^2}{2}\leqq m(x)<p^2$, so daß

$$x\in\left[\frac{m(x)}{cp^2},\ \frac{m(x)+1}{cp^2}\right)$$

ist, und nach (2.2)

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{m(x)} \omega_l(c,p;x) &= \sqrt{cp}\sum_{l=1}^{m(x)} \frac{1}{cp^2x-l+\sqrt{cp}} \leqq \sqrt{cp}\sum_{l=1}^{m(x)} \frac{1}{m(x)-l+\sqrt{cp}+1} = \\ &= \sqrt{cp}\sum_{k=1}^{m(x)} \frac{1}{k+\sqrt{cp}} > \sqrt{cp}\int_0^{p^2/2} \frac{dx}{x+\sqrt{cp}} > \frac{1}{2}\sqrt{cp}\log p\end{aligned} \tag{2.7}$$

besteht.

Da jede Funktion $\omega_l(c,p;x)$ mit der Ausnahme eines einzigen Punktes, wo sie eine Unstetigkeit von erster Art hat, im Intervall $[-1,2]$ überall stetig ist, so gibt es in $[-1,2]$ Funktionen $\bar{g}_l(c,p;x)$ $(l=1,\ldots,p^2)$, die die folgenden Bedingungen erfüllen: $\bar{g}_l(c,p;x)$ ist eine Treppenfunktion, für $\frac{l}{cp^2}\leqq x\leqq 2$ ist

$$\bar{g}_l(c,p;x)>0,$$

und es gilt im Intervall $[-1,2]$ überall

$$|\bar{g}_l(c,p;x)-\omega_l(c,p;x)|<\frac{1}{p^2}\min\left(1,\frac{1}{4}\sqrt{cp}\log p\right).$$

Auf Grund von (2.5) ist

$$|\bar{g}_l(c,p;x)|<2 \qquad (-1\leqq x\leqq 2;\ l=1,\ldots,p^2) \tag{2.8}$$

und nach (2.7) kann zu jedem Punkt $x\in\left[\frac{1}{2c},\frac{1}{c}\right)$ eine von x abhängige natürliche Zahl $m(x)$ $(<p^2)$ derart angegeben werden, daß die Funktionswerte $\bar{g}_1(c,p;x),\ldots,\bar{g}_{m(x)}(c,p;x)$ positiv sind und

$$\sum_{l=1}^{m(x)} \bar{g}_l(c,p;x)>\frac{1}{4}\sqrt{cp}\log p \tag{2.9}$$

gilt. Endlich erhalten wir auf Grund von (2.6)

$$|\alpha_{i,j}(c,p)|<\gamma_d(c,p) \qquad (|i-j|=d;\ 1\leqq i\leqq p^2;\ 1\leqq j\leqq p^2;\ d=1,\ldots,p^2-1), \tag{2.10}$$

wo

$$\alpha_{i,j}(c,p)=\int_{-1}^{2}\bar{g}_i(c,p;x)\bar{g}_j(c,p;x)dx,$$

$$\gamma_d(c,p)=\frac{1}{\log e}\,\frac{4\sqrt{cp}}{d(d+2\sqrt{cp})}\log\frac{d+\sqrt{cp}}{\sqrt{cp}}+\frac{9}{p^2}$$

sind.

Es sei

$$u_0(c,p)=2,\quad u_d(c,p)=2\left(1+\sum_{n=1}^{d}\gamma_n(c,p)\right) \qquad (d=1,\ldots,p^2-1).$$

Dann ist

$$u_d(c,p)-u_{d-1}(c,p)>2\gamma_d(c,p) \qquad (d=1,\ldots,p^2-1), \tag{2.11}$$

ferner kann nach den obigen gezeigt werden, daß

$$u_{p^2-1}(c,p)<20+8\sqrt{cp}\int_0^\infty \frac{1}{y(y+2\sqrt{cp})}\log\frac{y+\sqrt{cp}}{\sqrt{cp}}\,dy=$$

$$=20+8\int_0^\infty \frac{\log(1+t)}{t(t+2)}\,dt=\beta$$

gilt, wo β offenbar eine von c und p unabhängige Zahl ist, $\beta>2$. (Siehe D. MENCHOFF [2], S. 113.)

Der übrige Teil des Beweises ist identisch mit dem Beweis des entsprechenden Menchoffschen Hilfssatzes (siehe D. MENCHOFF [2], S. 114—115). Der Vollständigkeit halber sei aber auch dieser Schluß in Einzelheiten ausgeführt.

Es sei $1\leqq d\leqq p^2-1$. Nach (2.10) und (2.11) wird die Bedingung (2.1) für die Zahlen $a_{i,j}(c,p)$ ($|i-j|=d$, $1\leqq i\leqq p^2$, $1\leqq j\leqq p^2$) und für das Intervall $(u_{d-1}(c,p), (u_d(c,p)]$ erfüllt. So kann man mit Anwendung des Lemmas von D. MENCHOFF die Definition der Funktionen $\bar{g}_l(c,p;x)$ ($l=1,\ldots,p^2$) auf das Intervall $(2, u_{p^2-1}(c,p)]$ erweitern, derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind: $\bar{g}_l(c,p;x)$ ist eine Treppenfunktion, ferner ist

$$|\bar{g}_l(c,p;x)|=1, \tag{2.12}$$

$$\int_{u_{d-1}(c,p)}^{u_d(c,p)} \bar{g}_i(c,p;x)\bar{g}_j(c,p;x)\,dx=-\alpha_{i,j}(c,p)$$

$$(|i-j|=d;\ 1\leqq i\leqq p^2;\ 1\leqq j\leqq p^2;\ d=1,\ldots,p^2-1)$$

und

$$\int_{u_{d-1}(c,p)}^{u_d(c,p)} \bar{g}_i(c,p;x)\,\bar{g}_j(c,p;x)\,dx=0$$

$$(i\neq j;\ |i-j|\neq d;\ 1\leqq i\leqq p^2;\ 1\leqq j\leqq p^2;\ d=1,\ldots,p^2-1).$$

Schließlich im Intervall $(u_{p^2-1}(c,p), \beta]$ werden die Funktionen $\bar{g}_l(c,p;x)$ ($l=1,\ldots,p^2$) wie folgt definiert. Es sei

$$\bar{g}_l(c,p;x)=(-1)^s \tag{2.13}$$

$$(z_{s-1}(c,p;l)<x\leqq z_s(c,p;l);\ s=1,\ldots,2^l;\ l=1,\ldots,p^2),$$

wo

$$z_s(c,p;l)=u_{p^2-1}(c,p)+\frac{s}{2^l}(\beta-u_{p^2-1}(c,p))$$

ist.

Nach dem obigen ist es klar, daß die so im Intervall $[-1, \beta]$ definierten Funktionen $\bar{g}_l(c, p; x)$ Treppenfunktionen sind, zueinander orthogonal sind und für sie (2.9) erfüllt wird. Ferner gilt nach (2.8), (2.12) und (2.13)

$$(2.14)\qquad |\bar{g}_l(c, p; x)| < 2 \qquad (-1 \leqq x \leqq \beta;\ 1 \leqq l \leqq p^2).$$

Es sei gesetzt

$$g_l(c, p; x) = \left\{ \int_{-1}^{\beta} \bar{g}_l^2(c, p; x)\,dx \right\}^{-1/2} \bar{g}_l(c, p; x) \qquad (l = 1, \ldots, p^2).$$

Da nach (2.8), (2.12) und (2.13)

$$0 < \beta - 2 < \int_{-1}^{\beta} \bar{g}_l^2(c, p; x)\,dx < 4(\beta + 1)$$

ist, so folgt für die Funktionen $g_l(c, p; x)$ die Ungleichung (2.3) aus (2.14) und die Ungleichung (2.4) aus (2.9).

Damit ist der Hilfssatz II' bewiesen.

Ist $I = [u, v]$ ein beliebiges endliches Intervall, so sei

$$g_l(c, p, I; x) = \begin{cases} \sqrt{\beta+1}\, g_l\left(c, p; -1 + (\beta+1)\dfrac{x-u}{v-u}\right) & \text{für } u < x < v, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(l = 1, \ldots, p^2)$, und sei

$$G(c, I) = \left[\frac{v-u}{\beta+1}\left(\frac{1}{2c} + 1\right) + u,\ \frac{v-u}{\beta+1}\left(\frac{1}{c} + 1\right) + u\right).$$

Es ist klar, daß

$$(2.15)\qquad \int_I g_i(c, p, I; x) g_j(c, p, I; x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j, \\ \mu(I) & \text{für } i = j. \end{cases}$$

Aus (2.3) folgt ferner die Ungleichung

$$(2.16)\qquad |g_l(c, p, I; x)| < \sqrt{\beta+1}\, M \qquad (u \leqq x \leqq v).$$

Endlich ist

$$(2.17)\qquad \mu(G(c, I)) = \frac{\mu(I)}{2(\beta+1)} \frac{1}{c}$$

und für $x \in G(c, I)$ gibt es nach (2.4) eine von x abhängige natürliche Zahl $m(x)\,(< p^2)$, derart, daß die Funktionswerte $g_1(c, p, I; x), \ldots, g_{m(x)}(c, p, I; x)$ alle positiv sind und

$$(2.18)\qquad \sum_{l=1}^{m(x)} g_l(c, p, I; x) > \sqrt{\beta+1}\, C \sqrt{c}\, p \log p$$

gilt.

Mit Anwendung des Hilfssatzes II' kann das Entsprechende des Hilfssatzes III bewiesen werden.

Hilfssatz III'. *Es sei $\{a_n\}$ eine positive, monoton nichtzunehmende Zahlenfolge, die die Bedingung* (1. 1) *erfüllt. Es kann dann eine Indexfolge* $(3 \leqq)\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_m < \cdots$ *und ein im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ angegeben werden, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind: die Funktionen $\Phi_n(x)$ sind gleichmäßig beschränkt:*

$$|\Phi_n(x)| < M' \qquad (a \leqq x \leqq b; \quad n = 0, 1, \ldots); \tag{2.19}$$

zu fast allen Punkten x des Intervalls $[a, b]$ gibt es für unendlich viele Indizes m eine von x und m abhängige natürliche Zahl $n_m(x)$ $(< 4^{\mu_{m+1}} - 1)$, so daß die Funktionswerte $\Phi_{N_m}(x), \ldots, \Phi_{N_m + n_m(x)}(x)$ gleiches Vorzeichen haben und

$$|\Phi_{N_m}(x) + \cdots + \Phi_{N_m + n_m(x)}(x)| > D \frac{1}{a_{N_{m+1}}} \tag{2.20}$$

ist, wobei $N_0 = 0$, $N_m = 4^{\mu_1} + \cdots + 4^{\mu_m}$ $(m \geqq 1)$ bedeutet und D eine von m und x unabhängige positive Zahl ist.

Beweis von Hilfssatz III'. Da die Folge $\{a_n\}$ positiv und monoton nichtzunehmend ist und die Bedingung (1. 1) erfüllt, kann mit der bei dem Beweis des Hilfssatzes III angewendeten Methode gezeigt werden, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4^{n+1} a^2_{4^{n+1}} \log^2 4^{n+1} = \infty \tag{2.21}$$

ist. Es seien $\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_m < \cdots$ diejenigen Indizes $n (\geqq 3)$, für die

$$4^{n+1} a^2_{4^{n+1}} \log^2 4^{n+1} \geqq 2^{3-n} \tag{2.22}$$

ist. Da die auf die übrigen Indizes erstreckte Teilsumme der Reihe (2. 21) offenbar endlich ist, so folgt aus (2. 21):

$$\sum_{m=1}^{\infty} 4^{\mu_m+1} a^2_{4^{\mu_m+1}} \log^2 4^{\mu_m+1} = \infty. \tag{2.23}$$

Es sei

$$c_m = \left(4^{\mu_m+1} a^2_{4^{\mu_m+1}} \log^2 4^{\mu_m+1}\right)^{-1} + 1 \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Da $\mu_m \geqq 3$ $(m = 1, 2, \ldots)$ gilt, so ist auf Grund von (2. 22)

$$1 \leqq c_m \leqq 2^{\mu_m - 2} \qquad (m = 1, 2, \ldots). \tag{2.24}$$

Ferner ist

$$\frac{1}{c_m} \geqq \frac{1}{2} \min \{1, 4^{\mu_m+1} a^2_{4^{\mu_m+1}} \log^2 4^{\mu_m+1}\} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

und so ergibt sich nach (2. 23), daß

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{c_m} = \infty \tag{2.25}$$

gilt. Es soll noch bemerkt werden, daß

(2. 26) $N_m = 4^{\mu_1} + \cdots + 4^{\mu_m} < 4^{\mu_m} + 4^{\mu_m - 1} + \cdots + 4^{\mu_m - m} < 4^{\mu_m + 1}$ $(m = 1, 2, \ldots)$

ist.

Mit der bei dem Beweis des Hilfssatzes III angewendeten Methode werden wir nun ein aus Treppenfunktionen bestehendes, im Intervall $[a, b]$ orthonormiertes und gleichmäßig beschränktes Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ und eine Folge von meßbaren Mengen $G_m \subseteqq [a, b]$ konstruieren, derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a′) zu jedem $x \in G_m$ gibt es eine natürliche Zahl $n_m(x)$ $(< 4^{\mu_m + 1} - 1)$, so daß die Funktionswerte $\Phi_{N_m}(x), \ldots, \Phi_{N_m + n_m(x)}(x)$ gleiches Vorzeichen haben und (2. 20) erfüllt wird;

b′) die Mengen G_m $(m = 0, 1, \ldots)$ sind stochastisch unabhängig und es gilt

(2. 27) $$\mu(G_m) = \frac{b - a}{2(\beta + 1)} \frac{1}{c_{m+1}}.$$

Die Konstruktion werden wir mit vollständiger Induktion folgenderweise durchführen.

Nach (2. 24) wird die Bedingung (2. 2) für die Zahlen $c_1, p_1 = 2^{\mu_1}$ erfüllt und daher kann der Hilfssatz II′ angewendet werden. Es sei

$$\Phi_{l-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{b - a}} g_l(c_1, p_1, [a, b]; x) \qquad (l = 1, \ldots, 4^{\mu_1})$$

und $G_0 = G(c_1, [a, b])$. Nach dem Hilfssatz II′ sind diese Funktionen Treppenfunktionen, die nach (2. 15) ein in $[a, b]$ orthonormiertes System bilden und für die infolge (2. 16) die Ungleichung (2. 19) mit $M' = \left(\frac{\beta + 1}{b - a}\right)^{1/2} M$ besteht. Nach (2. 17) besteht (2. 27) für $m = 0$ und für $x \in G_0$ existiert es nach (2. 18) eine von x abhängige natürliche Zahl $n_0(x)$ $(< 4^{\mu_1} - 1)$, so daß die Funktionswerte $\Phi_0(x), \ldots, \Phi_{n_0(x)}(x)$ gleiches Vorzeichen haben und

$$|\Phi_0(x) + \cdots + \Phi_{n_0(x)}(x)| > \left(\frac{\beta + 1}{b - a}\right)^{1/2} C \{(4^{\mu_1 + 1} a^2_{4^{\mu_1 + 1}} \log^2 4^{\mu_1 + 1})^{-1} + 1\}^{1/2} 2^{\mu_1} \mu_1 >$$
$$> \left(\frac{\beta + 1}{b - a}\right)^{1/2} C (2^{\mu_1 + 1} a_{4^{\mu_1 + 1}} \log 4^{\mu_1 + 1})^{-1} 2^{\mu_1} \mu_1$$

gilt, woraus sich auf Grund der Monotonität der Folge $\{a_n\}$ und der Ungleichung (2. 26) ergibt, daß (2. 20) für $m = 0$ mit $D = \frac{1}{8} \left(\frac{\beta + 1}{b - a}\right)^{-1} C$ besteht. Also wird die Bedingung a′) für $m = 0$ erfüllt.

Es sei nun k $(\geqq 1)$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(n = 0, \ldots, N_k - 1)$ und die Mengen G_m $(m = 0, \ldots, k - 1)$

schon definiert wurden: die $\Phi_n(x)$ sind Treppenfunktionen, bilden im Intervall $[a, b]$ ein orthonormiertes System und die Bedingung (2. 19) ist erfüllt, ferner sind die Bedingungen a'), b') erfüllt, insbesondere sind die Mengen $G_0, \ldots, G_{k-1}$ stochastisch unabhängig.

Man kann das Intervall $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle I_ϱ $(\varrho = 1, \ldots, r)$ zerlegen, so daß in den einzelnen Teilintervallen die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(n = 0, \ldots, N_k - 1)$ konstant sind. Bezeichnen wir mit I_ϱ' bzw. mit I_ϱ'' die zwei Hälften des Intervalls I_ϱ $(\varrho = 1, \ldots, r)$. Auf Grund von (2. 24) wird die Bedingung (2. 2) für die Zahlen c_{k+1}, $p_{k+1} = 2^{\mu_{k+1}}$ erfüllt und so kann der Hilfssatz II' angewendet werden. Es sei gesetzt:

$$\Phi_{N_k+l-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \left\{ \sum_{\varrho=1}^{r} g_l(c_{k+1}, p_{k+1}, I_\varrho'; x) - \sum_{\varrho=1}^{r} g_l(c_{k+1}, p_{k+1}, I_\varrho''; x) \right\}$$

$(l = 1, \ldots, 4^{\mu_{k+1}})$ und

$$G_k = \bigcup_{\varrho=1}^{r} \left(G(c_{k+1}, I_\varrho') \cup G(c_{k+1}, I_\varrho'') \right).$$

Nach dem Hilfssatz II' sind auch diese Funktionen Treppenfunktionen. Mit Anwendung von (2. 15) kann mit der bei dem Beweis des Hilfssatzes III angewendeten Methode gezeigt werden, daß auch die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(n = 0, \ldots, N_{k+1} - 1)$ ein orthonormiertes System bilden und nach (2. 16) besteht für die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(n = N_k, \ldots, N_{k+1} - 1)$ die Ungleichung (2. 19) mit dem gleichen M'. Nach (2. 17) kann leicht eingesehen werden, daß (2. 27) auch für $m = k$ besteht. Für $x \in G_k$ existiert nach (2. 18) eine von x abhängige natürliche Zahl $n_k(x)$ $(< 4^{\mu_{k+1}} - 1)$, so daß die Funktionswerte $\Phi_{N_k}(x), \ldots$ $\ldots, \Phi_{N_k+n_k(x)}(x)$ gleiches Vorzeichen haben und

$$|\Phi_{N_k}(x) + \cdots + \Phi_{N_k+n_k(x)}(x)| >$$
$$> \left(\frac{\beta+1}{b-a}\right)^{1/2} C \left\{ \left(4^{\mu_{k+1}+1} a^2_{4^{\mu_{k+1}+1}} \log^2 4^{\mu_{k+1}+1}\right)^{-1} + 1 \right\}^{1/2} 2^{\mu_{k+1}} \mu_{k+1} >$$
$$> \left(\frac{\beta+1}{b-a}\right)^{1/2} C \left(2^{\mu_{k+1}+1} a_{4^{\mu_{k+1}+1}} \log 4^{\mu_{k+1}+1}\right)^{-1} 2^{\mu_{k+1}} \mu_{k+1}$$

ist, woraus sich auf Grund der Monotonität der Folge $\{a_n\}$ und der Ungleichung (2. 26) ergibt, daß (2. 20) auch für $m = k$ besteht, wenn D wie oben gewählt wird. Also wird auch für $m = k$ die Bedingung a') erfüllt. Endlich ist es klar, daß auch die Mengen $G_0, \ldots, G_k$ stochastisch unabhängig sind.

Damit ist unsere Konstruktion mit vollständiger Induktion erbracht.

Ist $x \in \overline{\lim_{m\to\infty}} G_m$, so besteht (2. 20) für unendlich viele Indizes m. Nach (2. 25) und (2. 27) ist

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mu(G_m) = \infty,$$

hieraus und aus der stochastischen Unabhängigkeit der Mengen G_m mit Anwendung des zweiten Borel—Cantellischen Lemmas folgt, daß $\mu(\overline{\lim_{m\to\infty}} G_m) = b-a$ ist.

Damit ist der Hilfssatz III' bewiesen.

Mit der Anwendung des Hilfssatzes III' können dann die Sätze I, II ebenso wie in § 1 bewiesen werden, aber die erhaltenen Funktionensysteme sind jetzt gleichmäßig beschränkt.

§ 3. Partialsummen der quadratisch integrierbaren Entwicklungen.

Um zu zeigen, daß die Abschätzung (6) nicht verbessert werden kann, beweisen wir den folgenden Satz.

Satz III. *Es sei $\{w(n)\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, die die Bedingung*

$$w(n) = o(\log n)$$

erfüllt. Es kann eine Koeffizientenfolge $\{a_n\} \in l^2$ und ein im Intervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ derart angegeben werden, daß in $[a, b]$ überall gilt:

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{w(N)} \left| \sum_{n=0}^{N} a_n \Phi_n(x) \right| = \infty. \tag{3.1}$$

Das Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ kann auch gleichmäßig beschränkt gewählt werden.

Beweis von Satz III. Es sei $\{\overline{w}(n)\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, die die Bedingungen

$$w(n) = o(\overline{w}(n)) \tag{3.2}$$

und

$$\overline{w}(n) = o(\log n) \tag{3.3}$$

erfüllt, z. B. sei

$$\overline{w}(n) = w(n) \left(\frac{\log n}{w(n)}\right)^{\alpha} \quad (n = 2, 3, \ldots, 0 < \alpha < 1).^{10)}$$

Auf Grund von (3.3), mit Anwendung von Hilfssatz I gibt es dann eine positive, monoton nichtabnehmende Folge $\{v(n)\}$, für die

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\overline{w}^2(n)}{(n \log^3 n)\, v^2(n)} < \infty$$

---

[10]) Für $n = 0, 1$ setze man z. B. $\overline{w}(0) = \overline{w}(1) = \overline{w}(2)$.

und

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n \log n)\, v^2(n)} = \infty \tag{3.4}$$

gelten. Es sei $\bar{a}_n = \left(\sqrt{n \log^3 n}\, v(n)\right)^{-1}$ für $n \geqq 2$ und $\bar{a}_0 = \bar{a}_1 = \bar{a}_2$. Dann ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n^2 \bar{w}^2(n) < \infty \tag{3.5}$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n^2 \log^2 n = \infty.$$

Nach Satz I kann ein im Intervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ angegeben werden, so daß die orthogonale Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n \Phi_n(x) \tag{3.6}$$

in $[a, b]$ überall divergiert; das Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ kann auch gleichmäßig beschränkt gewählt werden.

Wird die Bezeichnung

$$s_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\nu} \bar{w}(n) \bar{a}_n \Phi_n(x)$$

eingeführt, so erhalten wir mit einer Abelschen Transformation:

$$\sum_{n=0}^{N} \bar{a}_n \Phi_n(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\bar{w}(n)} \bar{w}(n) \bar{a}_n \Phi_n(x) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\bar{w}(n)} - \frac{1}{\bar{w}(n+1)} \right) s_\nu(x) + \frac{1}{\bar{w}(N)} s_N(x),$$

und so ist

$$\frac{1}{\bar{w}(N)} \sum_{n=0}^{N} \bar{w}(n) \bar{a}_n \Phi_n(x) = \sum_{n=0}^{N} \bar{a}_n \Phi_n(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\bar{w}(n)} - \frac{1}{\bar{w}(n+1)} \right) s_n(x). \tag{3.7}$$

Da die Folge $\{\bar{w}(n)\}$ monoton nichtabnehmend ist, so ergibt sich auf Grund von (3.5), daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\bar{w}(n)} - \frac{1}{\bar{w}(n+1)} \right) \int_a^b |s_n(x)|\, dx \leqq$$

$$\leqq (b-a)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\bar{w}(n)} - \frac{1}{\bar{w}(n+1)} \right) \left(\int_a^b s_n^2(x)\, dx \right)^{1/2} \leqq$$

$$\leqq (b-a)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n^2 \bar{w}^2(n) \right)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\bar{w}(n)} - \frac{1}{\bar{w}(n+1)} \right) < \infty$$

ist, und so nach dem B. Levischen Satz konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\overline{w}(n)}-\frac{1}{\overline{w}(n+1)}\right)s_n(x)$$

fast überall in $[a, b]$.

Da die Reihe (3.6) in $[a, b]$ überall divergiert, divergiert die rechte Seite von (3.7) fast überall und daher ist fast überall

$$\frac{1}{\overline{w}(N)}\sum_{n=0}^{N}\overline{w}(n)\bar{a}_n\,\Phi_n(x) \neq o(1).$$

Daraus ist nach (3.2) klar, daß für die Koeffizientenfolge $a_n=\overline{w}(n)\bar{a}_n$ $(n=0, 1, \ldots)$ und für das oben definierte Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ die Relation (3.1) fast überall in $[a, b]$ besteht. Nach (3.5) ist $\{a_n\}\in l^2$.

Wir bezeichnen mit E die Menge der Punkte von $[a, b]$, wo (3.1) nicht besteht ($\mu(E)=0$). Es sei $\Phi_n(x)=1$ $(n=0, 1, \ldots)$ für $x\in E$. Das so erhaltene Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ bleibt in $[a, b]$ orthonormiert und gleichmäßig beschränkt, wenn es auch früher gleichmäßig beschränkt war, und für dieses System bleibt (3.1) in den Punkten $x\notin E$ gültig. Dann ist

$$\sum_{n=0}^{N}a_n\,\Phi_n(x)=\sum_{n=0}^{N}a_n$$

für $x\in E$. Nach (3.4), auf Grund der Definition der Folge $\{a_n\}$ ergibt sich mit einer einfachen Rechnung, daß

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\,\frac{1}{\log N}\sum_{n=0}^{N}a_n=\infty$$

ist. Hieraus folgt nach (3.2) und (3.3), daß für dieses Funktionensystem (3.1) auch in den Punkten von E erfüllt wird.

Damit haben wir den Satz III vollständig bewiesen.

§ 4. Über die Rademachersche Abschätzung.

Daß die Rademachersche Abschätzung (8) im allgemeinen nicht verbessert werden kann, wird durch den folgenden Satz gezeigt.

Satz IV. *Es sei $\{l_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, die die Bedingung*

(4.1) $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log^2 n}{l_n^2}=\infty$$

erfüllt. Es kann im Intervall $[a, b]$ ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$

angegeben werden, so daß in $[a, b]$ *überall*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{l_N}\left|\sum_{n=0}^{N} \Phi_n(x)\right| = \infty \tag{4.2}$$

ist. Dieses Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ *kann sogar gleichmäßig beschränkt gewählt werden.*

Beweis von Satz IV. Wir zeigen zuerst, daß es eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge $\{\bar{l}_n\}$ gibt, für die die Bedingungen

$$l_n = o(\bar{l}_n), \tag{4.3}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \bar{l}_n^{-2} \log^2 n = \infty \tag{4.4}$$

und

$$\sum_{n=2}^{\infty} \bar{l}_n^{-2} \log^{1+\varepsilon} n < \infty \qquad (0<\varepsilon<1) \tag{4.5}$$

erfüllt sind.

Es sei $l_n^* = \max\{l_n, \log n\}$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Offenbar ist

$$l_n \leqq l_n^* \qquad (n = 2, 3, \ldots) \tag{4.6}$$

und

$$l_n^* \leqq l_{n+1}^* \qquad (n = 2, 3, \ldots). \tag{4.7}$$

Wird die Bezeichnung

$$s_m = \sum_{n=2}^{m} (l_n^*)^{-2} \log^2 n \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

eigeführt, so folgt aus (4.1) und aus der Definition der Folge $\{l_n^*\}$, daß

$$s_m < m \qquad (m = 2, 3, \ldots) \tag{4.8}$$

und

$$s_m < s_{m+1} \quad (m = 2, 3, \ldots), \qquad \lim_{m\to\infty} s_m = \infty \tag{4.9}$$

ist.

Es sei $n_0 (\geqq 2)$ die kleinste natürliche Zahl, für die $s_{n_0} > 2$ ist. Es ist klar, daß

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{\log^2 n}{(l_n^*)^2 s_{n-1} \log s_{n-1}} = \infty \tag{4.10}$$

gilt. Diese Summe ist nämlich eine obere Summe des divergenten Integrals

$$\int_{s_{n_0}}^{\infty} \frac{dx}{x \log x},$$

die zu der mit den Teilpunkten $s_{n_0}, s_{n_0+1}, \ldots$ angegebenen Einteilung der Halbgerade $[s_{n_0}, \infty)$ gehört.

Für $0<\varepsilon<1$ ist

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{\log^2 n}{(l_n^*)^2 s_n \log^{2-\varepsilon} s_n} < \infty, \tag{4.11}$$

da diese Summe die untere Summe des konvergenten Integrals

$$\int_{s_{n_0}}^{\infty} \frac{dx}{x \log^{2-\varepsilon} x}$$

ist, die zu der mit den Teilpunkten $s_{n_0}, s_{n_0+1}, \ldots$ angegebenen Einteilung der Halbgerade $[s_{n_0}, \infty)$ gehört. Auf Grund der Definition der Folge $\{l_n^*\}$ und der Zahl n_0 ist es klar, daß für $n>n_0$ $s_{n-1} > \frac{1}{2} s_n$ ist und so folgt nach (4.11):

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{\log^2 n}{(l_n^*)^2 s_{n-1} \log^{2-\varepsilon} s_{n-1}} < \infty \qquad (0<\varepsilon<1).$$

So erhalten wir auf Grund von (4.8):

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{\log^{1+\varepsilon} n}{(l_n^*)^2 s_{n-1} \log s_{n-1}} < \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{\log^2 n}{(l_n^*)^2 s_{n-1} \log^{2-\varepsilon} s_{n-1}} < \infty \qquad (0<\varepsilon<1). \tag{4.12}$$

Es sei nun $\bar{l}_n = l_n^* \sqrt{s_{n-1} \log s_{n-1}}$ für $n>n_0$ und $\bar{l}_n = l_{n_0+1}$ für $0 \leqq n \leqq n_0$. Nach (4.6), (4.7), (4.9) und nach der Definition der Zahl n_0 ist es evident, daß die Zahlenfolge $\{l_n\}$ positiv, monoton nichtabnehmend ist und die Bedingung (4.3) erfüllt; wegen (4.10) und (4.12) werden auch die Bedingungen (4.4) und (4.5) erfüllt. Nach (4.5) gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{l}_n^{-2} < \infty$$

und so folgt aus der Monotonität der Folge $\{\bar{l}_n\}$, daß

$$\sqrt{n}\ \bar{l}_n^{-1} = o(1) \tag{4.13}$$

ist.

Da $\{\bar{l}_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge ist und die Bedingung (4.4) erfüllt, existiert nach Satz I ein in $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$, für welches die orthogonale Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{l}_n^{-1} \Phi_n(x) \tag{4.14}$$

in $[a, b]$ überall divergiert.

Wird die Bezeichnung

$$s_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\nu} \Phi_n(x)$$

eingeführt, so ergibt sich mit einer Abelschen Transformation:

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{l_n} \Phi_n(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{l_n} - \frac{1}{l_{n+1}}\right) s_n(x) + \frac{1}{l_N} s_N(x)$$

und so gilt

$$\frac{1}{l_N} \sum_{n=0}^{N} \Phi_n(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{l_n} \Phi_n(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{l_n} - \frac{1}{l_{n+1}}\right) s_n(x). \tag{4.15}$$

Mit einer einfachen Rechnung bekommen wir die folgende Abschätzung:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{l_n} - \frac{1}{l_{n+1}}\right) \int_a^b |s_n(x)|\,dx \leqq (b-a)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{l_n} - \frac{1}{l_{n+1}}\right) \left(\int_a^b s_n^2(x)\,dx\right)^{1/2} =$$
$$= (b-a)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} \left(\frac{1}{l_n} - \frac{1}{l_{n+1}}\right). \tag{4.16}$$

Für jedes s ist

$$\sum_{n=0}^{s} \sqrt{n+1} \left(\frac{1}{l_n} - \frac{1}{l_{n+1}}\right) = \frac{1}{l_0} + \sum_{n=1}^{s} \frac{1}{l_n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - \sqrt{s+1}\, \frac{1}{l_{s+1}},$$

woraus sich nach (4.13) ergibt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} \left(\frac{1}{l_n} - \frac{1}{l_{n+1}}\right) = \frac{1}{l_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l_n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}). \tag{4.17}$$

Mit Anwendung der Cauchyschen Ungleichung erhalten wir auf Grund von (4.5):

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{l_n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = O(1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\log^{1+\epsilon} n)^{1/2}}{l_n} \frac{1}{(n \log^{1+\epsilon} n)^{1/2}} \leqq$$
$$\leqq O(1) \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log^{1+\epsilon} n}{l_n^2} \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^{1+\epsilon} n} \right\}^{1/2} < \infty,$$

woraus sich ergibt, daß die Reihe (4.17) konvergent ist. Auf Grund von (4.16) und dem B. Levischen Satz konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{l_n} - \frac{1}{l_{n+1}}\right) s_n(x)$$

fast überall in $[a, b]$. Da die Reihe (4.14) in $[a, b]$ überall divergiert, so divergiert auch die rechte Seite von (4.15) fast überall, und folglich ist fast überall

$$\frac{1}{l_N} \sum_{n=0}^{N} \Phi_n(x) \neq o(1).$$

Daraus folgt nach (4.3), daß (4.2) fast überall in $[a, b]$ erfüllt wird.

Wir bezeichnen mit E die Menge der Punkte von $[a, b]$, wo (4.2) nicht besteht ($\mu(E)=0$). Es sei $\Phi_n(x)=1$ ($n=0, 1, \ldots$) für $x \in E$. Nach (4.4) ist $\overline{\lim\limits_{N\to\infty}}\, N/\bar{l}_N=\infty$ und so besteht (4.2) für dieses Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ überall in $[a, b]$.

Damit wurde der Satz IV vollständig bewiesen.

§ 5. Über die Größenordnung der orthonormierten Funktionen.

In diesem Paragraphen wird gezeigt, daß auch die Abschätzungen (10) und (11) im allgemeinen nicht verbessert werden können. Nämlich gilt der folgende

Satz V. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine positive Zahlenfolge, für die die Bedingung*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}=\infty \tag{5.1}$$

erfüllt wird. Dazu kann ein im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ angegeben werden, so daß in $[a, b]$ überall

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\, \frac{1}{\lambda_N}\,|\Phi_N(x)|=\infty \tag{5.2}$$

ist.

Aus (5.2) folgt, daß auch die Relation

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\, \frac{1}{\lambda_N^2}\sum_{n=0}^{N} \Phi_n^2(x)=\infty$$

überall in $[a, b]$ besteht.

Der Satz V kann mit einer einfachen Konstruktion leicht bewiesen werden.

Beweis von Satz V. Nach einem bekannten Satz[11]) kann auf Grund von (5.1) eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge $\{\bar{\lambda}_n\}$ angegeben werden, die die Bedingungen

$$\lambda_n=o(\bar{\lambda}_n) \tag{5.3}$$

---

[11]) Dieser Satz lautet folgenderweise: *Divergiert die Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ ($u_n>0$; $n=0,1,\ldots$), *so existiert eine positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendliche strebende Zahlenfolge* $\{t_n\}$, *so daß* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n/t_n=\infty$ *ist.* (Siehe z. B. G. H. Hardy—J. E. Littlewood—G. Pólya [1], S. 120—121.)

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{\lambda}_n^{-2} = \infty \tag{5.4}$$

erfüllt.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß $\bar{\lambda}_0 \geqq \sqrt{b-a}$ ist.

Es sei

$$\alpha_{-1} = 0, \quad \alpha_m = \sum_{n=1}^{m} \bar{\lambda}_n^{-2} \qquad (m = 0, 1, \ldots)$$

und bezeichnen wir mit I_m das Intervall $[\alpha_{m-1}, \alpha_m)$. Dann ist

$$\mu(I_m) = \bar{\lambda}_m^{-2} \qquad (m = 0, 1, \ldots).$$

Im folgenden werden wir ein im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes System $\{\Phi_n(x)\}$ von Treppenfunktionen der Periode $(b-a)$ konstruieren derart, daß die Bedingung

$$\Phi_n(x) = \bar{\lambda}_n \quad \text{für} \quad x \in I_n \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{5.5}$$

erfüllt wird.

Es sei

$$\Phi_0(x) = \begin{cases} \bar{\lambda}_0 & \text{für} \quad x \in I_0 + l(b-a)\text{ [12]} \qquad (l = 0, \pm 1, \ldots), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offensichtlich ist $\Phi_0(x)$ eine Treppenfunktion der Periode $(b-a)$, gilt

$$\int_a^b \Phi_0^2(x)\,dx = \bar{\lambda}_0^2 \int_{I_0} dx = 1$$

und für $n = 0$ wird (5.5) erfüllt.

Es sei n eine beliebige natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Funktionen $\Phi_0(x), \ldots, \Phi_n(x)$ bereits definiert wurden derart, daß sie Treppenfunktionen der Periode $(b-a)$ sind, in $[a, b]$ ein orthonormiertes System bilden, und für die Indizes $0, \ldots, n$ (5.5) erfüllt wird. Dann kann eine Einteilung des Intervalls I_{n+1} in endlich viele Teilintervalle $\bar{I}_\varrho$ ($\varrho = 1, \ldots, r$) angegeben werden derart, daß in den einzelnen Teilintervallen die Funktionen $\Phi_0(x), \ldots, \Phi_n(x)$ konstant sind. Bezeichnen wir mit I'_ϱ, I''_ϱ die zwei Hälften des Intervalls $\bar{I}_\varrho$ ($\varrho = 1, \ldots, r$). Wir setzen

$$\Phi_{n+1}(x) = \begin{cases} \bar{\lambda}_{n+1} & \text{für} \quad x \in I'_\varrho + l(b-a) \quad (l = 0, \pm 1, \ldots), \\ -\bar{\lambda}_{n+1} & \text{für} \quad x \in I''_\varrho + l(b-a) \quad (l = 0, \pm 1, \ldots), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

[12]) Für $I = [u, v]$ bezeichnet $I + l(b-a)$ das Intervall $[u + l(b-a), v + l(b-a)]$.

Offensichtlich ist $\Phi_{n+1}(x)$ eine Treppenfunktion der Periode $(b-a)$, gilt

$$\int_a^b \Phi_{n+1}^2(x)\,dx = \bar{\lambda}_{n+1}^2 \int_{I_{n+1}} dx = 1$$

und für $0 \leqq m \leqq n$ ist

$$\int_a^b \Phi_m(x)\,\Phi_{n+1}(x)\,dx = \int_{I_{n+1}} \Phi_m(x)\,\Phi_{n+1}(x)\,dx =$$

$$= \bar{\lambda}_{n+1} \left\{ \sum_{\varrho=1}^{r} \int_{I'_\varrho} \Phi_m(x)\,dx - \sum_{\varrho=1}^{r} \int_{I''_\varrho} \Phi_m(x)\,dx \right\} = 0.$$

Durch vollständige Induktion erhalten wir also ein in $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$, für welches (5.5) erfüllt wird. Für jeden Punkt $x \in [a, b]$ ist wegen der Periodizität und nach der Bedingung (5.4) für unendlich viele Indizes

$$|\Phi_n(x)| = \bar{\lambda}_n,$$

woraus sich auf Grund von (5.3) ergibt, daß (5.2) für dieses Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ überall in $[a, b]$ erfüllt wird.

Damit haben wir den Satz V vollständig bewiesen.

§ 6. Über die Lebesgueschen Funktionen.

In diesem Paragraphen wird gezeigt, daß die Abschätzung (13) in der Einleitung nicht wesentlich verbessert werden kann. Es gilt nämlich der

Satz V. *Es sei $\{w(n)\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, für die die Bedingung*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n \log n)\, w^2(n)} = \infty \tag{6.1}$$

erfüllt wird. Es kann ein in dem Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\varrho_n(x)\}$ angegeben werden, so daß in $[a, b]$ überall

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\lambda_N} \int_a^b \left| \sum_{n=0}^{N} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt = \infty \quad , \qquad (\lambda_n = \sqrt{N \log N}\, w(N))$$

gilt.

Wir schicken zwei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz IV. *Es seien r und $\varkappa$ natürliche Zahlen. Ist*

$$\frac{2r}{2^{\varkappa}} \leqq 1,$$

so gilt für jede natürliche Zahl p die Abschätzung

$$\int_{\frac{2r}{2^{\varkappa}}}^{2} \left| \sum_{k=\varkappa}^{\varkappa+p-1} r_k(x) r_k(t) \right| dt > \frac{1}{4} p \tag{6.2}$$

die diadisch rationalen Punkte ausgenommen überall, dabei ist $r_k(x) = \operatorname{sign} \sin 2^k \pi x$ die k-te Rademachersche Funktion ($k=0, 1, \ldots$).

Beweis von Hifssatz IV. Ist x keine diadisch rationale Zahl, so ist $r_{\varkappa}(x) r_{\varkappa}(t)$ als Funktion von t betrachtet im Intervall $\left[\frac{2r}{2^{\varkappa}}, 2\right]$ streckenweise konstant, undzwar ist sein Wert in Intervallen von der Gesamtlänge $\frac{2^{\varkappa+1}-2r}{2^{\varkappa+1}}$ gleich $+1$, und in Intervallen von der gleichen Gesamtlänge gleich -1. Der Wert der Funktion $r_{\varkappa}(x) r_{\varkappa}(t) + r_{\varkappa+1}(x) r_{\varkappa+1}(t)$ ergibt sich aus demjenigen der Funktion $r_{\varkappa}(x) r_{\varkappa}(t)$ indem man in der ersten Hälfte der einzelnen Konstanzintervalle zu dieser Funktion $+1$ addiert und in der zweiten Hälfte $+1$ subtrahiert. Also nimmt die Funktion $r_{\varkappa}(x) r_{\varkappa}(t) + r_{\varkappa+1}(x) r_{\varkappa+1}(t)$ die Werte $+2$, 0, bzw. -2 der Reihe nach in Intervallsystemen von den Gesamtlängen

$$\frac{2^{\varkappa+1}-2r}{2^{\varkappa+2}}, \; 2\frac{2^{\varkappa+1}-2r}{2^{\varkappa+2}}, \; \frac{2^{\varkappa+1}-2r}{2^{\varkappa+2}}$$

an. Mit vollständiger Induktion erhalten wir, daß falls x keine diadisch rationale Zahl ist, die Funktion

$$\sum_{k=\varkappa}^{\varkappa+p-1} r_k(x) r_k(t)$$

als Funktion von t betrachtet die Werte $p, p-2, \ldots, p-2l, \ldots, -p+2, -p$ in Intervallsystemen von den Gesamtlängen

$$\binom{p}{0}\frac{2^{\varkappa+1}-2r}{2^{\varkappa+p}}, \ldots, \binom{p}{l}\frac{2^{\varkappa+1}-2r}{2^{\varkappa+p}}, \ldots, \binom{p}{p}\frac{2^{\varkappa+1}-2r}{2^{\varkappa+p}}$$

annimmt. Also ist

$$\int_{\frac{2r}{2^{\varkappa}}}^{2} \left| \sum_{k=\varkappa}^{\varkappa+p-1} r_k(x) r_k(t) \right| dt = \frac{2^{\varkappa+1}-2r}{2^{\varkappa}} \lambda_p \tag{6.3}$$

mit

$$\lambda_p = \frac{1}{2^{p-1}} \left\{ p \binom{p}{0} + (p-2) \binom{p}{1} + \cdots + \left(p - 2\left[\frac{p}{2}\right]\right) \binom{p}{\left[\frac{p}{2}\right]} \right\}.$$

Für $p = 1, 2$ ist $\lambda_p = 1$ und so ergibt sich (6. 2) aus (6. 3). H. RADEMACHER hat gezeigt, daß

$$\lambda_{2\sigma+1} = \lambda_{2\sigma+2} \qquad (\sigma = 0, 1, \ldots)$$

und

$$\lambda_{2\sigma+1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2\sigma+1}{\sqrt{\sigma}} e^{\frac{\vartheta}{24\sigma} - \frac{\vartheta'}{6\sigma}} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots)$$

gilt, wo ϑ und ϑ' von σ abhängigen Zahlen sind $(0 \leqq \vartheta, \vartheta' \leqq 1)$ (siehe H. RADEMACHER [1], S. 134). Auf Grund von diesen Formeln und (6. 3) erhalten wir, daß (6. 2) auch im Falle $p \geqq 3$ erfüllt wird.

Damit haben wir den Hilfssatz IV bewiesen.

Hilfssatz V. *Es seien eine beliebige, natürliche Zahl p und eine reelle Zahl c mit*

$$0 < \frac{1}{c} \leqq 1 \tag{6.4}$$

vorgegeben. Dann kann ein im Intervall $[0, 2]$ *orthonormiertes System von Treppenfunktionen* $\{h_l(c, p; x)\}$ $(l = 1, \ldots, p)$ *derart angegeben werden, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

$$\int_0^2 h_l(c, p; x)\, dx = 0 \qquad (l = 1, \ldots, p), \tag{6.5}$$

$$\int_0^2 \left| \sum_{l=1}^{p} h_l(c, p; x)\, h_l(c, p; t) \right| dt < \sqrt{2cp} \qquad (0 \leqq x \leqq 2), \tag{6.6}$$

ferner existiert eine meßbare Teilmenge $H(c)$ *von* $[0, 2]$ *mit*

$$\mu(H(c)) > \frac{1}{2c}, \tag{6.7}$$

für deren Punkte x gilt:

$$\int_0^2 \left| \sum_{l=1}^{p} h_l(c, p; x) h_l(c, p; t) \right| dt > \frac{1}{16}\sqrt{2cp}. \tag{6.8}$$

B e w e i s v o n H i l f s s a t z V. Es seien r und $\varkappa$ natürliche Zahlen, für die die Ungleichung

$$\frac{2r}{2^\varkappa} \leqq \frac{1}{c} < \frac{2r+1}{2^\varkappa} \tag{6.9}$$

erfüllt wird. Es sei für $l = 1, \ldots, p$

$$h_l(c, p; x) = \begin{cases} \theta_1 r_{\varkappa+l-1}(x) & \text{für } x \in \left[0, \frac{2r}{2^\varkappa}\right], \\ \theta_2 r_{\varkappa+l-1}(x) & \text{für } x \in \left(\frac{2r}{2^\varkappa}, 2\right], \end{cases}$$

wo

$$\theta_1 = \left(\frac{2^{\varkappa-2}}{r}\right)^{1/2} \tag{6.10}$$

und

$$\theta_2 = \left(4 - \frac{r}{2^{\varkappa-2}}\right)^{-1/2} \tag{6.11}$$

ist.

Aus der Definition ist es klar, daß die Funktionen $h_l(c, p; x)$ Treppenfunktionen sind und ein orthonormiertes System in $[0, 2]$ bilden, ferner (6.5) erfüllt wird.

Nach (6.9) ist

$$\frac{2r}{2^\varkappa} > \frac{1}{2c} \tag{6.12}$$

und nach (6.9) und (6.10)

$$\sqrt{c} > \theta_1 \geqq \sqrt{\frac{c}{2}}. \tag{6.13}$$

Ferner ist nach (6.4), (6.9) und (6.11)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \geqq \theta_2 > \frac{1}{2}. \tag{6.14}$$

Da die Funktionen $g_l(c, p; x)$ $(l = 1, \ldots, p)$ in $[0, 2]$ ein orthonormiertes System bilden, so ergibt sich mit Anwendung der Bunjakowski—Schwarzschen Ungleichung:

$$\int_0^2 \left| \sum_{l=1}^p h_l(c, p; x) h_l(c, p; t) \right| dt \leqq \sqrt{2} \left\{ \int_0^2 \left(\sum_{l=1}^p h_l(c, p; x) h_l(c, p; t) \right)^2 dt \right\}^{1/2} =$$

$$= \sqrt{2} \left\{ \sum_{l=1}^p h_l^2(c, p; x) \right\}^{1/2} \leqq \sqrt{2} \max\{\theta_1, \theta_2\} \sqrt{p},$$

und so auf Grund von (6.4), (6.13) und (6.14) erhalten wir (6.6).

Es sei $H(c)$ die Menge, die so entsteht, daß wir aus dem Intervall $\left[0, \frac{2r}{2^{\varkappa}}\right]$ die diadisch rationalen Punkte weglassen. Dann wird (6. 7) nach (6. 12) erfüllt und für $x \in H(c)$ gilt nach (6. 13). und (6. 14)

$$\int_0^2 \left| \sum_{l=1}^{p} h_l(c,p;x) h_l(c,p;t) \right| dt \geqq \int_{\frac{2r}{2^{\varkappa}}}^{2} \left| \sum_{l=1}^{p} h_l(c,p;x) h_l(c,p;t) \right| dt =$$

$$= \theta_1 \theta_2 \int_{\frac{2r}{2^{\varkappa}}}^{2} \left| \sum_{l=1}^{p} r_{\varkappa+l-1}(x) r_{\varkappa+l-1}(t) \right| dt > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{2}} \int_{\frac{2r}{2^{\varkappa}}}^{2} \left| \sum_{k=\varkappa}^{\varkappa+p-1} r_k(x) r_k(t) \right| dt.$$

Nach (6. 4) und (6. 9) wird die in dem Hilfssatz IV vorkommende Bedingung erfüllt, und so ergibt sich mit Anwendung des Hilfssatzes IV die Abschätzung (6. 8).

Also erfüllen die Funktionen $h_l(c,p;x)$ $(l=1,\ldots,p)$ alle im Hilfssatz V gestellten Bedingungen. Damit haben wir den Hilfssatz V bewiesen.

Ist $I=[u,v]$ ein beliebiges endliches Intervall, so sei

$$h_l(c,p,I;x) = \begin{cases} \sqrt{2}\, h_l\left(c,p; 2\dfrac{x-u}{v-u}\right) & \text{für} \quad u < x < v, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (l=1,\ldots,p)$$

und bezeichnen wir mit $H(c,I)$ das Bild der Menge $H(c)$ bei der Transformation $y = \frac{v-u}{2} x + u$. Auf Grund von (6. 5), (6. 6), (6. 7) und (6. 8) ist es klar, daß

$$\int_I h_l(c,p,I;x)\,dx = 0, \tag{6. 15}$$

$$\int_I h_i(c,p,I;x) h_j(c,p,I;x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad i \neq j, \\ \mu(I) & \text{für} \quad i = j, \end{cases} \tag{6. 16}$$

$$\int_I \left| \sum_{l=1}^{p} h_l(c,p,I;x) h_l(c,p,I;t) \right| dt < \mu(I) \sqrt{2cp} \qquad (u \leqq x \leqq v), \tag{6. 17}$$

$$\mu(H(c,I)) > \frac{\mu(I)}{4c} \tag{6. 18}$$

ist und für $x \in H(c,I)$

$$\int_I \left| \sum_{l=1}^{p} h_l(c,p,I;x) h_l(c,p,I;t) \right| dt > \mu(I) \frac{1}{16} \sqrt{2cp} \tag{6. 19}$$

gilt.

B e w e i s v o n S a t z VI. Nach (6. 1) ergibt sich, mit Anwendung des in der Fußnote[11]) erwähnten Satzes daß eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge $\{\overline{w}(n)\}$ existiert, die die Bedingungen

$$w(n)=o(\overline{w}(n)), \tag{6.20}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n\log n)\overline{w}^2(n)}=\infty \tag{6.21}$$

erfüllt.

Es sei n_1 die kleinste natürliche Zahl, für die

$$(n_1+1)\overline{w}^2(2^{n_1+1})\geqq 1$$

ist. Ferner sei d eine natürliche Zahl mit

$$2\log 64\leqq d \tag{6.22}$$

und man setze

$$n_m=n_1+d(m-1)\qquad (m=1,2,\ldots).$$

Offensichtlich ist wegen der Monotonität von $\overline{w}(n)$

$$(n_m+1)\overline{w}^2(2^{n_m+1})\geqq 1\qquad (m=1,2,\ldots), \tag{6.23}$$

ferner ist

$$N_m=2^{n_m}+2^{n_{m-1}}+\cdots+2^{n_1}=2^{n_m}+2^{n_m-d}+\cdots+2^{n_m-(m-1)d}<2^{n_m+1} \tag{6.24}$$

$(m=1,2,\ldots)$ und wegen $n_k=n_m-d(m-k)$

$$\sum_{k=1}^{m-1}2^{n_k/2}=2^{n_m/2}\sum_{k=1}^{m-1}2^{-d(m-k)/2}=2^{n_m/2}\sum_{l=1}^{m-1}(2^{-d/2})^l<$$

$$<2^{n_m/2}2^{-d/2}\sum_{l=0}^{\infty}(2^{-d/2})^l<2^{n_m/2}\cdot 2^{-d/2}\cdot 2;$$

hieraus ergibt sich nach (6.22) die Abschätzung

$$\sum_{k=1}^{m-1}2^{n_k/2}<\frac{1}{32}2^{n_m/2}\qquad (m=2,3,\ldots). \tag{6.25}$$

Da für jedes s

$$\sum_{n=2^{n_1}}^{2^{n_s}-1}\frac{1}{(n\log n)\overline{w}^2(n)}=\sum_{m=1}^{s-1}\sum_{n=2^{n_m}}^{2^{n_{m+1}}-1}\frac{1}{(n\log n)\overline{w}^2(n)}\leqq\sum_{m=1}^{s-1}\frac{1}{n_m\overline{w}^2(2^{n_m})}\sum_{n=2^{n_m}}^{2^{n_{m+1}}-1}\frac{1}{n}$$

ist, so folgt aus (6.21);

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(n_m+1)\overline{w}^2(2^{n_m+1})}=\infty. \tag{6.26}$$

Im folgenden wird mit Anwendung des Hilfssatzes V ein von der Folge $\{\overline{w}(n)\}$ (und so auch von der Folge $\{w(n)\}$) abhängiges, im Intervall $[a,b]$ orthonormiertes System der Treppenfunktionen $\{\varrho_n(x)\}$ $(n=0,1,\ldots)$ und eine

Folge $\{H_m\}$ $(m=1,2,\ldots)$ von meßbaren Teilmengen von $[a,b]$ definiert, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

$\bar{a}$) für jeden Index $m(\geqq 1)$ gilt die Ungleichung

$$\int_a^b \left| \sum_{n=N_{m-1}}^{N_m-1} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt < \sqrt{2^{n_m+1}(n_m+1)\overline{w}(2^{n_m+1})} \qquad (a \leqq x \leqq b;\ N_0=0); \tag{6.27}$$

$\bar{b}$) für $x \in H_m$ besteht die Ungleichung

$$\int_a^b \left| \sum_{n=N_{m-1}}^{N_m-1} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt > \frac{1}{16}\sqrt{2^{n_m+1}(n_m+1)\overline{w}(2^{n_m+1})}; \tag{6.28}$$

$\bar{c}$) die Mengen H_m $(m=1,2,\ldots)$ sind stochastisch unabhängig und gilt

$$\mu(H_m) > \frac{b-a}{4}\left((n_m+1)\overline{w}^2(2^{n_m+1})\right)^{-1}. \tag{6.29}$$

Nach (6.23) erfüllt die Zahl $c_1=(n_1+1)\overline{w}^2(2^{n_1+1})$ die Bedingung (6.4), so daß für die Zahlen c_1 und $p_1=2^{n_1}$ der Hilfssatz V angewendet werden kann. Es sei

$$\varrho_{l-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}h_l(c_1,p_1,[a,b];x) \qquad (l=1,\ldots,2^{n_1})$$

und $H_1=H(c_1,[a,b])$. Nach dem Hilfssatz V sind die Funktionen $\varrho_n(x)$ $(n=0,\ldots,N_1-1)$ Treppenfunktionen und bilden nach (6.16) ein orthonormiertes System im Intervall $[a,b]$, ferner nach (6.17), (6.18) und (6.19) werden die Ungleichungen (6.27), (6.28) und (6.29) für $m=1$ erfüllt.

Es sei nun k eine beliebige natürliche Zahl >1. Wir nehmen an, daß in $[a,b]$ die Treppenfunktionen $\varrho_n(x)$ $(n=0,\ldots,N_{k-1}-1)$ und die meßbaren Mengen $H_1,\ldots,H_{k-1}$ bereits so definiert wurden, daß die $\varrho_n(x)$ ein orthonormiertes System bilden und die Bedingungen $\bar{a})-\bar{c})$ für die Indizes $m=1,\ldots,k-1$ erfüllt sind, insbesondere sind also die Mengen $H_1,\ldots,H_{k-1}$ stochastisch unabhängig.

Es gibt eine Einteilung des Grundintervalls $[a,b]$ in endlich viele Teilintervalle I_ϱ $(\varrho=1,\ldots,r)$, so daß in den einzelnen Teilintervallen jede Funktion $\varrho_n(x)$ $(n=0,\ldots,N_{k-1}-1)$ konstant ist. Nach (6.23) wird für die Zahl $c_k=(n_k+1)\overline{w}^2(2^{n_k+1})$ die Bedingung (6.4) erfüllt und so kann für die Zahlen $c_k, p_k=2^{n_k}$ der Hilfssatz V angewendet werden. Es sei gesetzt:

$$\varrho_{N_{k-1}+l-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}\sum_{\varrho=1}^{r} h_l(c_k,p_k,I_\varrho;x) \qquad (l=1,\ldots,2^{n_k})$$

und

$$H_k=\bigcup_{\varrho=1}^{r} H(c_k,I_\varrho).$$

Nach dem Hilfssatz V sind auch die Funktionen $\varrho_n(x)$ $(N_{k-1} \leqq n < N_k)$ Treppenfunktionen.

Es seien n und l beliebige Indizes, $0 \leqq n \leqq N_{k-1}-1$, $0 \leqq l \leqq 2^{n_k}$. Bezeichnen wir mit $c_\varrho(n)$ den im Intervall I_ϱ angenommenen Wert der Funktion $\varrho_n(x)$ $(\varrho = 1, \dots, r)$. So ist nach (6. 15)

$$(6.30)\qquad \int_a^b \varrho_n(x)\varrho_{N_{k-1}+l-1}(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{b-a}}\sum_{\varrho=1}^{r} c_\varrho(n)\int_{I_\varrho} h_l(c_k, p_k, I_\varrho; x)\,dx = 0.$$

Es sei $1 \leqq i \leqq 2^{n_k}$, $1 \leqq j \leqq 2^{n_k}$. Nach (6. 16) ist

$$\int_a^b \varrho_{N_{k-1}+i-1}(x)\varrho_{N_{k-1}+j-1}(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\sum_{\varrho=1}^{r}\int_{I_\varrho} h_i(c_k, p_k, I_\varrho; x)\,h_j(c_k, p_k, I_\varrho; x)\,dx =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j, \\ \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\sum_{\varrho=1}^{r}\mu(I_\varrho) = 1 & \text{für } i = j. \end{cases}$$

Daraus folgt nach (6.30) daß die Funktionen $\varrho_n(x)$ $(n = 0, \dots, N_k - 1)$ in $[a, b]$ ein orthonormiertes System bilden.

Für $x \in [a, b]$ ist

$$\int_a^b \left|\sum_{n=N_{k-1}}^{N_k-1} \varrho_n(x)\varrho_n(t)\right| dt = \frac{1}{b-a}\sum_{\varrho=1}^{r}\int_{I_\varrho}\left|\sum_{l=1}^{2^{n_k}} h_l(c_k, p_k, I_\varrho; x)\,h_l(c_k, p_k, I_\varrho; t)\right| dt,$$

woraus sich nach (6. 17) ergibt, daß (6. 27) auch für $m = k$ erfüllt wird.

Es sei endlich $x \in H_k$. Dann existiert ein Index $\bar\varrho$ $(1 \leqq \bar\varrho \leqq r)$, so daß $x \in H(c_k, I_{\bar\varrho})$ gilt. Es sei $I_\varrho = [u_\varrho, v_\varrho]$ $(\varrho = 1, \dots, r)$. Dann erhalten wir mittels der Integraltransformationen

$$y = \frac{2}{v_\varrho - u_\varrho}(t - u_\varrho) \qquad (\varrho = 1, \dots, r),$$

daß

$$\int_a^b \left|\sum_{n=N_{k-1}}^{N_k-1} \varrho_n(x)\varrho_n(t)\right| dt = \frac{1}{b-a}\sum_{\varrho=1}^{r}\int_{I_\varrho}\left|\sum_{l=1}^{2^{n_k}} h_l(c_k, p_k, I_{\bar\varrho}; x)\,h_l(c_k, p_k, I_\varrho; t)\right| dt =$$

$$= \frac{1}{b-a}\sum_{\varrho=1}^{r}\mu(I_\varrho)\int_0^2\left|\sum_{l=1}^{2^{n_k}} h_l\left(c_k, p_k; \frac{2}{v_{\bar\varrho} - u_{\bar\varrho}}(x - u_{\bar\varrho})\right) h_l(c_k, p_k; y)\right| dy$$

ist. Da

$$\frac{2}{v_{\bar\varrho} - u_{\bar\varrho}}(x - u_{\bar\varrho}) \in H(c_k)$$

ist, so folgt nach (6.8), daß die Ungleichung (6.28) auch für $m=k$ erfüllt wird. Aus der Konstruktion folgt, daß die Mengen $H_1, \dots, H_k$ stochastisch unabhängig sind.

Nach (6.18), ist es klar, daß auch die Ungleichung (6.29) für $m=k$ besteht.

Somit haben wir durch vollständige Induktion ein im Intervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\varrho_n(x)\}$ und eine Folge von meßbaren Mengen $\{H_m\}$ konstruiert, so daß die Bedingungen $\bar{a})$—$\bar{c})$ erfüllt sind.

Aus den Bedingungen $\bar{a})$ und $\bar{b})$ und aus der Ungleichung (6.25) folgt für $x \in H_m$ $(m \geqq 2)$

$$\int_a^b \left| \sum_{n=0}^{N_m-1} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt \geqq \int_a^b \left| \sum_{n=N_{m-1}}^{N_m-1} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt - \sum_{k=0}^{m-2} \int_a^b \left| \sum_{n=N_k}^{N_{k+1}-1} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt >$$

$$> \sqrt{2} \left\{ \frac{1}{16} \sqrt{2^{n_m}(n_m+1)}\, \bar{w}(2^{n_m+1}) - \sum_{k=1}^{m-1} \sqrt{2^{n_k}(n_k+1)}\, \bar{w}(2^{n_k+1}) \right\} \geqq$$

$$\geqq \sqrt{2}\sqrt{n_m+1}\, \bar{w}(2^{n_m+1}) \left\{ \frac{1}{16} 2^{n_m/2} - \sum_{k=1}^{m-1} 2^{n_k/2} \right\} > \frac{\sqrt{2}}{32} \sqrt{2^{n_m}(n_m+1)}\, \bar{w}(2^{n_m+1}).$$

Daraus erhalten wir auf Grund von (6.24), daß für $x \in H_m$ $(m \geqq 1)$

$$\text{(9.31)} \qquad \int_a^b \left| \sum_{n=0}^{N_m-1} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt > \frac{1}{32} \sqrt{N_m \log N_m}\, \bar{w}(N_m)$$

ist.

Es sei nun $x \in \overline{\lim_{m\to\infty}} H_m$. Dann wird (6.31) für unendlich viele Indizes m erfüllt. Nach (6.26), (6.29) und der Bedingung $\bar{c})$ erhalten wir mit Anwendung des zweiten Borel—Cantellischen Lemmas, daß $\mu(\overline{\lim_{m\to\infty}} H_m) = b-a$ ist. So ergibt sich auf Grund von (6.20), daß für das so definierte Funktionensystem $\{\varrho_n(x)\}$ die in der Behauptung des Satzes VI vorkommende Relation fast überall in $[a, b]$ erfüllt wird. Wir bezeichnen mit H die Teilmenge vom Maße Null des Intervalls $[a, b]$, wo diese Relation nicht erfüllt wird. Wir verändern die Funktionen $\{\varrho_n(x)\}$ in der Menge H wie folgt: für $x \in H$ sei

$$\varrho_n(x) = \sqrt{\frac{2c_m}{b-a}} \qquad (N_{m-1} \leqq n < N_m \quad m = 1, 2, \dots).$$

Nach dem obigen ist es klar, daß das so abgeänderte Funktionensystem $\{\varrho_n(x)\}$ orthonormiert bleibt und die in der Behauptung des Satzes VI vorkommende Relation überall in $[a, b]$ erfüllt wird.

Damit haben wir den Satz VI vollständig bewiesen.

Es bleibt offen, ob die im Satz VI vorkommende spezielle Folge $\lambda_n = \sqrt{n \log n}\, w(n)$ mit einer beliebigen, positiven, monoton, nichtabnehmenden Folge $\{\lambda_n\}$ ersetzt werden kann, für die die Bedingung (5.1) erfüllt wird.

§ 7. Cesàrosche Mittel der quadratisch integrierbaren Entwicklungen.

Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem. In diesem Paragraphen wird die n-te Teilsumme, bzw. die n-te (C, α)-Mittel $(\alpha > 0)$ der orthogonalen Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(x)$$

mit $s_n(x)$, bzw. mit $\sigma_n^{(\alpha)}(x)$ bezeichnet, d. h. ist

$$s_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \varphi_\nu(x), \qquad \sigma_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{A_n^{(\alpha)}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(\alpha)} a_\nu \varphi_\nu(x) \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

mit

$$A_m^{(\alpha)} = \binom{m+\alpha}{m} \qquad (\alpha \neq -1, -2, \ldots).$$

Offenbar ist $\sigma_n^{(0)}(x) = s_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Der Einfachheit halber bezeichnen wir die $(C, 1)$-Mittel mit $\sigma_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

Es ist bekannt, daß

$$c_1(\alpha) \leqq \frac{A_m^{(\alpha)}}{m^\alpha} \leqq c_2(\alpha) \qquad (m > 0,\ \alpha > -1) \tag{7.1}$$

gilt, wo $c_1(\alpha)$ und $c_2(\alpha)$ nur von α abhängige positive Zahlen sind, ferner gelten die Relationen

$$A_m^{(\alpha)} > 0 \qquad (m \geqq 0,\ \alpha > -1), \tag{7.2}$$

$$A_{m+1}^{(\alpha)} > A_m^{(\alpha)} \qquad (m \geqq 0,\ \alpha > 0), \tag{7.3}$$

$$A_m^{(\alpha+\beta+1)} = \sum_{\nu=0}^{m} A_{m-\nu}^{(\alpha)} A_\nu^{(\beta)}, \tag{7.4}$$

$$\sigma_n^{(\alpha+h)}(x) = \frac{1}{A_n^{(\alpha+h)}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(h-1)} A_\nu^{(\alpha)} \sigma_\nu^{(\alpha)}(x) \tag{7.5}$$

(siehe z. B. A. ZYGMUND [1], S. 42).

Zuerst werden wir die in der Einleitung erwähnte Abschätzung für die $(C, \alpha > 0)$-Mittel der quadratisch integrierbaren Entwicklungen beweisen.

Satz VII. *Ist* $\{a_n\} \in l^2$, *so ist für jedes* $\alpha > 0$

$$\sigma_N^{(\alpha)}(x) = o(\log\log N) \tag{7.6}$$

fast überall in $[a, b]$.

Um den Satz VII zu beweisen werden einige Hilfssätze vorausgeschickt.

Hilfssatz VI. *Es sei* $\{\mu(n)\}$ *eine positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendliche strebende Zahlenfolge. Wir nehmen an, daß die Abschätzung*

$$\sigma_N(x) = O(\mu(N))$$

für jede Folge $\{a_n\} \in l^2$ *im Intervall* $[a, b]$ *fast überall gültig ist. Dann ist auch die Abschätzung*

$$\sigma_N(x) = o(\mu(N))$$

für jede Koeffizientenfolge $\{a_n\} \in l^2$ *im Intervall* $[a, b]$ *fast überall gültig.*

Beweis von Hilfssatz VI. Es sei $\{a_n\} \in l^2$ eine beliebig gegebene Koeffizientenfolge. Man kann eine positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendliche strebende Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ derart angeben, daß

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu^2 a_\nu^2 < \infty \tag{7.7}$$

ist, man setze z. B.

$$\lambda_\nu = \left\{\sum_{n=\nu}^{\infty} a_n^2\right\}^{-1/4} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots).$$

Dann ist nämlich die Reihe (7.7) die untere Summe des konvergenten Integrals

$$\int_0^S \frac{dx}{\sqrt{x}} \qquad \left(S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\right),$$

die zu der mit den Teilpunkten $0, \ldots, S-(a_0^2+a_1^2)$, $S-a_0^2$, S angegebenen Einteilung des Intervalls $[0, S]$ gehört.

Die n-te Teilsumme, bzw. die n-te $(C, 1)$-Mittel der orthogonalen Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu a_\nu \varphi_\nu(x)$$

werden wir mit $s_n^*(x)$, bzw. mit $\sigma_n^*(x)$ bezeichnen:

$$s_n^*(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu a_\nu \varphi_\nu(x), \qquad \sigma_n^*(x) = \sum_{\nu=0}^{n}\left(1-\frac{\nu}{n+1}\right)\lambda_\nu a_\nu \varphi_\nu(x) \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Mit einer doppelten Abelschen Transformation ergibt sich:

$$\begin{aligned}\sigma_N(x) &= \sum_{n=0}^{N}\left(1-\frac{n}{N+1}\right)\frac{1}{\lambda_n}\lambda_n a_n \varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{N}\left(1-\frac{n}{N+1}\right)\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)s_n^*(x) + \\ &+ \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}}-\frac{1}{\lambda_{n+2}}\right)(n+1)\,\sigma_n^*(x) + \frac{1}{\lambda_{N+1}}\sigma_N^*(x).\end{aligned} \tag{7.8}$$

Auf Grund von (7. 3) und (7. 7) ist

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)\int_a^b |s_n^*(x)|\,dx \leqq (b-a)^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)\left(\int_a^b (s_n^*(x))^2 dx\right)^{1/2}=$$

$$=O(1)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda_\nu^2 a_\nu^2\right)^{1/2}\frac{1}{\lambda_0}<\infty$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}}-\frac{1}{\lambda_{n+2}}\right)\int_a^b |\sigma_n^*(x)|\,dx \leqq (b-a)^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}}-\frac{1}{\lambda_{n+2}}\right)\left(\int_a^b (\sigma_n^*(x))^2 dx\right)^{1/2}=$$

$$=O(1)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda_\nu^2 a_\nu^2\right)^{1/2}\frac{1}{\lambda_1}<\infty.$$

Aus den obigen erhalten wir mit der Anwendung des B. Levischen Satzes, daß die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)s_n^*(x),\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}}-\frac{1}{\lambda_{n+2}}\right)|\sigma_n^*(x)|$$

im Intervall $[a, b]$ fast überall konvergieren.

Da eine konvergente Reihe immer $(C, 1)$-summierbar ist, ist in $[a, b]$ fast überall

(7. 9) $$\sum_{n=0}^{N}\left(1-\frac{n}{N+1}\right)\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)s_n^*(x)=O(1).$$

Ferner ist

$$\left|\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}}-\frac{1}{\lambda_{n+2}}\right)(n+1)\sigma_n^*(x)\right|\leqq\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}}-\frac{1}{\lambda_{n+2}}\right)|\sigma_n^*(x)|$$

und so ist in $[a, b]$ fast überall

(7. 10) $$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}}-\frac{1}{\lambda_{n+2}}\right)(n+1)\sigma_n^*(x)=O(1).$$

Nach (7. 7) folgt gemäß unserer Annahme, daß fast überall in $[a, b]$

$$\sigma_N^*(x)=O(\mu(N))$$

ist. Daraus ergibt sich die Behauptung auf Grund von (7. 8), (7. 9) und (7. 10).

Damit haben wir den Hilfssatz VI bewiesen.

Hilfssatz VII. *Ist $\{a_n\}\in l^2$, so besteht für jedes $r>\frac{1}{2}$*

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\left(\sigma_n^{(r-1)}(x)-\sigma_n^{(r)}(x)\right)^2=o(1)$$

fast überall in $[a, b]$.

Dieser Hilfssatz ist bekannt (siehe A. ZYGMUND [2], S. 359).

Hilfssatz VIII. *Es sei $\{\mu(n)\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge. Wir nehmen an, daß $\{a_n\}\in l^2$ ist und*

$$\sigma_N(x)=o\big(\mu(N)\big)$$

fast überall in $[a,b]$ gilt. Dann ist

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}s_n^2(x)=o\big(\mu^2(N)\big)$$

fast überall in $[a,b]$.

Beweis von Hilfssatz VIII. Ist $\{a_n\}\in l^2$, so ist nach dem Hilfssatz VII

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\big(s_n(x)-\sigma_n(x)\big)^2=o(1)$$

fast überall in $[a,b]$. Mit Anwendung der Ungleichung

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}s_n^2(x)\leqq\frac{2}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\big(s_n(x)-\sigma_n(x)\big)^2+\frac{2}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sigma_n^2(x)$$

ergibt sich daraus die Behauptung.

Auf die Cesàroschen Mittel $\sigma_n^{(r)}$ beliebiger numerischer Reihen bezieht sich der

Hilfssatz IX. *Es sei $\{\mu(n)\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge. Ist für ein $r>-1/2$*

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\big(\sigma_n^{(r)}\big)^2=o\big(\mu^2(N)\big),$$

so ist für jedes $\varepsilon>0$

$$\sigma_N^{\left(r+\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}=o\big(\mu(N)\big).$$

Diesen Hilfssatz hat A. ZYGMUND mit $o(1)$ statt $o\big(\mu(N)\big)$ bewiesen. (Siehe A. ZYGMUND [2], S. 360—361.)

Beweis von Hilfssatz IX. Auf Grund von (7.1), (7.2), (7.4) und (7.5) ist

$$\left|\sigma_N^{\left(r+\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}\right|=\frac{1}{A_N^{\left(r+\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}\left|\sum_{n=0}^{N}A_{N-n}^{\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}A_n^{(r)}\sigma_n^{(r)}\right|\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{A_N^{\left(r+\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}\left(\sum_{n=0}^{N}\big(\sigma_n^{(r)}\big)^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=0}^{N}\left(A_{N-n}^{\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}A_n^{(r)}\right)^2\right)^{1/2}=$$

$$=\frac{o\big(\sqrt{N}\mu(N)\big)}{A_N^{\left(r+\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}\left(\sum_{n=0}^{N}A_{N-n}^{(-1+2\varepsilon)}A_n^{(2r)}\right)^{1/2}=\frac{o\big(\sqrt{N}\mu(N)\big)}{A_N^{\left(r+\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}\big(A_N^{(2r+2\varepsilon)}\big)^{1/2},$$

woraus mit Anwendug von (7.1) ergibt sich die Behauptung.

Mit Anwendung der Hilfssätze VII—IX kann der folgende Hilfssatz bewiesen werden.

Hilfssatz X. *Es sei $\{\mu(n)\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge. Es sei $\{a_n\} \in l^2$ und nehmen wir an, daß*

$$\sigma_N(x) = o(\mu(N))$$

fast überall in $[a, b]$ gilt. Dann ist auch die Abschätzung

$$\sigma_N^{(\alpha)}(x) = o(\mu(N)) \tag{7.11}$$

für jedes $\alpha > 0$ fast überall in $[a, b]$ gültig.

Dieser Hilfssatz entspricht dem folgenden Satz von A. ZYGMUND: Ist eine quadratisch integrierbare Entwicklung fast überall $(C, 1)$-summierbar, so ist die fast überall $(C, \alpha > 0)$-summierbar. (Siehe A. ZYGMUND [2].)

Beweis von Hilfssatz X. Nach unserer Annahme ergibt sich mit Anwendung des Hilfssatzes VIII, daß

$$\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} (\sigma_n^{(0)}(x))^2 = o(\mu^2(N))$$

fast überall in $[a, b]$ erfüllt wird. Daraus ergibt sich mit Anwendug des Hilfssatzes IX für $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$, daß fast überall in $[a, b]$

$$\sigma_N^{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}(x) = o(\mu(N)) \tag{7.12}$$

ist. Da für jedes N

$$\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \left(\sigma_n^{\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)}(x)\right)^2 \leqq \frac{2}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \left(\sigma_n^{\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)}(x) - \sigma_n^{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}(x)\right)^2 +$$

$$+ \frac{2}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \left(\sigma_n^{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}(x)\right)^2$$

gilt, ergibt sich nach (7. 12) mit Anwendung des Hilfssatzes VII, daß

$$\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \left(\sigma_n^{\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)}(x)\right)^2 = o(\mu^2(N))$$

fast überall in $[a, b]$ erfüllt wird. Nach Hilfssatz IX mit $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ erhalten wir endlich, daß fast überall in $[a, b]$

$$\sigma_N^{(\alpha)}(x) = o(\mu(N))$$

ist.

Damit haben wir den Hilfssatz X bewiesen.

Nun gehen wir zum Beweis des Satzes VII über.

Beweis von Satz VII. Es sei $u_n = 1$ für $n = 1, 2, 3$ und $u_n = \log\log n$ für $n \geqq 4$. Es sei ferner $\{a_n\} \in l^2$ eine beliebige Koeffizientenfolge. Dann ist die orthogonale Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{u_\nu} \varphi_\nu(x)$$

nach einem Satz von D. MENCHOFF fast überall in $[a, b]$ $(C, 1)$-summierbar.[13]

Mit einer Abelschen Transformation erhalten wir:

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{N}\left(1-\frac{\nu}{N+1}\right)\frac{1}{u_\nu} a_\nu \varphi_\nu(x) = \sum_{\nu=0}^{N}\left(1-\frac{\nu}{N+1}\right)\left(\frac{1}{u_\nu}-\frac{1}{u_{\nu+1}}\right) s_\nu(x) + \\ + \frac{1}{N+1}\sum_{\nu=0}^{N-1}\left(\frac{1}{u_{\nu+1}}-\frac{1}{u_{\nu+2}}\right)(\nu+1)\sigma_\nu(x) + \frac{1}{u_{N+1}}\sigma_N(x).\end{aligned} \tag{7. 13}$$

Nach den obigen Bemerkungen konvergiert die linke Seite von (7. 13) fast überall in $[a, b]$ und daher ist fast überall in $[a, b]$

$$\sum_{\nu=0}^{N}\left(1-\frac{\nu}{N+1}\right)\frac{1}{u_\nu} a_\nu \varphi_\nu(x) = O(1). \tag{7. 14}$$

Da $\{a_n\} \in l^2$ ist, so kann man mit der Methode, die bei dem Beweis des Hilfssatzes VI angewendet wurde, zeigen, daß die Reihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{u_\nu}-\frac{1}{u_{\nu+1}}\right) s_\nu(x), \quad \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{u_{\nu+1}}-\frac{1}{u_{\nu+2}}\right)|\sigma_\nu(x)|$$

in $[a, b]$ fast überall konvergieren und so gilt fast überall

$$\sum_{\nu=0}^{N}\left(1-\frac{\nu}{N+1}\right)\left(\frac{1}{u_\nu}-\frac{1}{u_{\nu+1}}\right) s_\nu(x) = O(1) \tag{7. 15}$$

und

$$\frac{1}{N+1}\sum_{\nu=0}^{N-1}\left(\frac{1}{u_{\nu+1}}-\frac{1}{u_{\nu+2}}\right)(\nu+1)\,\sigma_\nu(x) = O(1). \tag{7. 16}$$

Nach (7. 13), (7. 14), (7. 15), und (7. 16) erhalten wir, daß die Abschätzung

$$\sigma_N(x) = O(\log\log N)$$

für $\{a_n\} \in l^2$ in $[a, b]$ fast überall gültig ist. Daraus ergibt sich nach dem Hilfssatz VI, daß für $\{a_n\} \in l^2$

$$\sigma_N(x) = o(\log\log N)$$

fast überall in $[a, b]$ besteht. Schließlich erhalten wir daraus mit Anwendung

[13]) Dieser Satz lautet wie folgt: *Ist* $\sum_{n=4}^{\infty} c_n^2 (\log\log n)^2 < \infty$, *so ist die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ *für jedes orthonormierte System* $\{\varphi_n(x)\}$ *im Grundintervall fast überall* $(C, 1)$*-summierbar.* (Siehe D. MENCHOFF [3], S. 65—66.)

des Hilfssatzes X, daß (7.6) im Falle $\{a_n\} \in l^2$ für jedes $\alpha > 0$ im Intervall $[a, b]$ fast überall gilt.

Damit haben wir den Satz VII vollständig bewiesen.

Im folgenden wird gezeigt, daß die in dem Satz VII vorkommende Abschätzung im allgemeinen nicht verbessert werden kann. Nämlich gilt der folgende

Satz VIII. *Es sei $\{w(n)\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, die die Bedingung*

$$w(n) = o(\log \log n) \tag{4.17}$$

erfüllt Dazu kann man eine Koeffizientenfolge $\{a_n\} \in l^2$ und ein im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ angeben, so daß für jedes $\alpha > 0$ überall in $[a, b]$

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{w(N)} \left| \frac{1}{A_N^{(\alpha)}} \sum_{\nu=0}^{N} A_{N-\nu}^{(\alpha)} a_\nu \Phi_\nu(x) \right| = \infty \tag{7.18}$$

besteht. Das Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ kann auch gleichmäßig beschränkt gewählt werden.

Beweis von Satz VIII. Es sei $\{\overline{w}(n)\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, die die Bedingungen

$$w(n) = o(\overline{w}(n)), \tag{7.19}$$

$$\overline{w}(n) = o(\log \log n) \tag{7.20}$$

erfüllt; man wähle z. B. die Folge

$$\overline{w}(n) = w(n) \left(\frac{\log \log n}{w(n)} \right)^{1/2} \qquad (n = 4, 5, \ldots)$$

(es sei etwa $\overline{w}(n) = \overline{w}(4)$ für $n = 0, 1, 2, 3$).

Aus (7.20) folgt, daß die positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge $\overline{\overline{w}}(n) = \overline{w}(2^n)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ die Bedingung

$$\overline{\overline{w}}(n) = o(\log n)$$

erfüllt. So kann mit Anwendung von Hilfssatz I eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge $\{w^*(n)\}$ angegeben werden, die die Bedingungen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n \log n) (w^*(n))^2} = \infty \tag{7.21}$$

und

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\overline{\overline{w}}^2(n)}{(n \log^3 n) (w^*(n))^2} < \infty \tag{7.22}$$

erfüllt.

Nach (7.21) kann der Hilfssatz III, bzw. III' angewendet werden und so ergibt sich die Existenz eines im Intervall $[a, b]$ orthonormierten Funktionensystems $\{\Phi_n^*(x)\}$, für welches die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* \Phi_n^*(x) \tag{7.23}$$

mit den Koeffizienten

$$a_0^* = a_1^* = \frac{1}{w^*(2)}, \quad a_n^* = \frac{1}{\sqrt{n \log^3 n}\, w^*(n)} \qquad (n \geqq 2)$$

fast überall in $[a, b]$ divergiert. Das Funktionensystem $\{\Phi_n^*(x)\}$ kann auch gleichmäßig beschränkt gewählt werden.

Bezeichne

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}' a_n^* \Phi_n^*(x) \tag{7.24}$$

die orthogonale Reihe, die wir aus der Reihe (7.23) erhalten, indem wir die Glieder mit den Indizes $n = N_m - 1$ $(m = 1, 2, \ldots)$ weglassen (N_m hat dieselbe Bedeutung wie in den Hilfssätzen III und III'). Nach den Hilfssätzen III, III' ist klar, daß auch die Reihe (7.24) fast überall in $[a, b]$ divergiert.

Wir ordnen jetzt die Funktionen $\Phi_n^*(x)$ in eine Reihenfolge um. Die Funktionen $\Phi_n^*(x)$ mit $n \neq N_m - 1$ $(m = 1, 2, \ldots)$ werden der Reihe nach mit $\Phi_{2^n}(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ und die Funktionen $\Phi_{N_m - 1}^*(x)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ der Reihe nach mit $\Phi_k(x)$ $(k = 0, \ldots;\ k \neq 2^n)$ bezeichnet. Aus der Koeffizientenfolge $\{a_n^*\}$ erhalten wir eine neue Folge $\{\bar{a}_n\}$, indem wir die a_n^* mit $n \neq N_m - 1$ $(m = 1, 2, \ldots)$ fortlaufend mit $\bar{a}_{2^n}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ bezeichnen und für die Indizes $k \neq 2^n$ $\bar{a}_k = 0$ setzen. Nach dem obigen ist es klar, daß $\bar{a}_{2^n} \leqq \left(\sqrt{n \log^3 n}\, w^*(n)\right)^{-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ gilt. Ferner ist es klar, daß das so erhaltene Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ auch orthonormiert ist, und falls das System $\{\Phi_n^*(x)\}$ gleichmäßig beschränkt ist, so ist das System $\{\Phi_n(x)\}$ ebenfalls gleichmäßig beschränkt.

Betrachten wir nun die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n \Phi_n(x). \tag{7.25}$$

Nach den obigen ist es evident, daß die 2^n-te Teilsumme der Reihe (7.25) mit der n-ten Teilsumme der Reihe (7.24) übereinstimmt. Da die Reihe (7.24) im Intervall $[a, b]$ fast überall divergiert, so ist die Reihe (7.25) nach einem bekannten Satz fast überall in $[a, b]$ nicht $(C, 1)$-summierbar.[14]) Auf Grund

---

[14]) Dieser Satz lautet wie folgt: *Es sei $\{\varphi_\nu(x)\}$ ein orthonormiertes Funktionensystem und sei $\{c_\nu\} \in l^2$. Die Reihe $\Sigma c_\nu \varphi_\nu(x)$ ist im Grundintervall dann und nur dann fast überall $(C, 1)$-summierbar, wenn die Folge der 2^n-ten Teilsummen der Reihe im Grundintervall fast überall konvergiert.* (Siehe A. N. Kolmogoroff [1].)

von (7.22) und nach dem obigen ist

$$(7.26)\qquad \sum_{n=2}^{\infty} \overline{w}^2(n)\bar{a}_n^2 \leqq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\overline{w}^2(2^n)}{(n\log^3 n)\,(w^*(n))^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\overline{\overline{w}}^2(n)}{(n\log^3 n)\,(w^*(n))^2} < \infty.$$

Also ist $\{\bar{a}_n\} \in l^2$ und so ergibt sich nach einem im Zusammenhang mit Hilfssatz X erwähnten Zygmundschen Satz, daß für jedes $\alpha > 0$ der Reihe (7.25) mit Ausnahme einer von α abhängigen Teilmenge vom Maße Null des Grundintervalls nirgends (C, α)-summierbar ist. (Dieses Ergebnis kann in der Mitteilung von D. MENCHOFF [3] gefunden werden; das oben beschriebene Verfahren kann abgesehen von einer kleinen Modifizierung bei S. KACZMARZ—H. STEINHAUS [1], S. 191 gefunden werden.)

Es sei r eine beliebige natürliche Zahl. Wir bezeichnen die n-te Teilsumme, bzw. die n-te (C, r)-Mittel der orthogonalen Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{w}(\nu)\bar{a}_\nu \Phi_\nu(x)$$

mit $\bar{s}_n(x)$, bzw. mit $\bar{\sigma}_n^{(r)}(x)$:

$$\bar{s}_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \overline{w}(\nu)\bar{a}_\nu \Phi_\nu(x), \quad \bar{\sigma}_n^{(r)}(x) = \frac{1}{A_n^{(r)}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(r)} \overline{w}(\nu)\bar{a}_\nu \Phi_\nu(x).$$

Wir erhalten mit einer r-fachen Abelschen Transformation:

$$(7.27)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{A_N^{(r)}} \sum_{\nu=0}^{N} A_{N-\nu}^{(r)} \bar{a}_\nu \Phi_\nu(x) &= \frac{1}{A_N^{(r)}} \sum_{\nu=0}^{N} A_{N-\nu}^{(r)} \left(\frac{1}{\overline{w}(\nu)} - \frac{1}{\overline{w}(\nu+1)}\right) \bar{s}_\nu(x) + \\ &+ \sum_{\mu=1}^{r} \frac{1}{A_N^{(r)}} \left\{ \sum_{\nu=0}^{N} A_{N-\nu}^{(r-\mu)} A_\nu^{(\mu)} \left(\frac{1}{\overline{w}(\nu+\mu)} - \frac{1}{\overline{w}(\nu+\mu+1)}\right) \bar{\sigma}_\nu^{(\mu)}(x) \right\} + \\ &+ \frac{1}{\overline{w}(N+r+1)} \bar{\sigma}_N^{(r)}(x) \end{aligned}$$

(vgl. K. TANDORI [4], S. 93).

Nach (7.26) kann mit der beim Beweis des Hilfssatzes VI angewendeten Methode gezeigt werden, daß die Reihen

$$(7.28)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\overline{w}(\nu)} - \frac{1}{\overline{w}(\nu+1)}\right) \bar{s}_\nu(x)$$

und

$$(7.29)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\overline{w}(\nu+\mu)} - \frac{1}{\overline{w}(\nu+\mu+1)}\right) |\bar{\sigma}_\nu^{(\mu)}(x)| \qquad (\mu = 1, \ldots, r)$$

im Intervall $[a, b]$ fast überall konvergieren.

Es sei $x \in [a, b]$ ein beliebiger Punkt, in dem die Reihen (7.29) konvergieren und es sei ε eine beliebige positive Zahl. Es gibt dann eine Zahl

$\nu_0 = \nu_0(x)$ derart, daß

$$(7.30)\qquad \sum_{\nu=\nu_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\overline{w}(\nu+\mu)}-\frac{1}{\overline{w}(\nu+\mu+1)}\right)|\overline{\sigma}_\nu^{(\mu)}(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad(\mu=1,\dots,r)$$

ist. Für $N\geqq \nu_0$ hat man nach (7.1), (7.2) und (7.30)

$$\left|\frac{1}{A_N^{(r)}}\sum_{\nu=0}^{N}A_{N-\nu}^{(r-\mu)}A_\nu^{(\mu)}\left(\frac{1}{\overline{w}(\nu+\mu)}-\frac{1}{\overline{w}(\nu+\mu+1)}\right)\overline{\sigma}_\nu^{(\mu)}(x)\right|<$$
$$<\frac{1}{A_N^{(r)}}\sum_{\nu=0}^{\nu_0}A_{N-\nu}^{(r-\mu)}A_\nu^{(\mu)}\left(\frac{1}{\overline{w}(\nu+\mu)}-\frac{1}{\overline{w}(\nu+\mu+1)}\right)|\overline{\sigma}_\nu^{(\mu)}(x)|+\frac{\varepsilon}{2}$$

$(\mu=1,\dots,r)$ und daraus folgt mit Anwendung von (7.1)

$$\left|\frac{1}{A_N^{(r)}}\sum_{\nu=0}^{N}A_{N-\nu}^{(r-\mu)}A_\nu^{(\mu)}\left(\frac{1}{\overline{w}(\nu+\mu)}-\frac{1}{\overline{w}(\nu+\mu+1)}\right)\overline{\sigma}_\nu^{(\mu)}(x)\right|<\varepsilon\qquad(\mu=1,\dots,r)$$

für genügend großes N. Also ist in diesem Punkt x

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{A_N^{(r)}}\sum_{\nu=0}^{N}A_{N-\nu}^{(r-\mu)}A_\nu^{(\mu)}\left(\frac{1}{\overline{w}(\nu+\mu)}-\frac{1}{\overline{w}(\nu+\mu+1)}\right)\overline{\sigma}_\nu^{(\mu)}(x)=0\qquad(\mu=1,\dots,r).$$

Da die Reihen (7.29) in $[a, b]$ fast überall konvergieren, so wird diese Relation in $[a, b]$ fast überall erfüllt.

Da die Reihe (7.28) in $[a, b]$ fast überall konvergiert, und eine konvergente Reihe immer (C, r)-summierbar ist, so konvergiert die erste Summe der rechten Seite von (7.27) im Grundintervall $[a, b]$ fast überall. Da die auf der linken Seite von (7.27) stehende Summe nach der Annahme für $N\to\infty$ in $[a, b]$ überall divergiert, erhalten wir auf Grund der obigen Bemerkungen und nach (7.27), daß in $[a, b]$ fast überall

$$\frac{1}{\overline{w}(N+r+1)}\,\overline{\sigma}_N^{(r)}(x)\neq o(1)$$

ist, mithin gilt in $[a, b]$ fast überall

$$(7.31)\qquad \overline{\lim_{N\to\infty}}\,\frac{1}{\overline{w}(N)}|\overline{\sigma}_N^{(r)}(x)|>0.$$

Wir bezeichnen mit $E(r)$ die meßbare Teilmenge des Grundintervalls $[a, b]$, für die (7.31) nicht erfüllt wird.

Es ist klar, daß $E(r)\subseteqq E(r+1)$. Es sei

$$E=\bigcup_{r=1}^{\infty}E(r).$$

Da für jedes r $\mu(E(r))=0$ ist, so gilt $\mu(E)=0$. Besteht (7.31) in einem

Punkt x für jede natürliche Zahl $r(\geqq 1)$, so ist nach (7.2), (7.4) und (7.5)

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\overline{w}(N)} |\overline{\sigma}_N^{(\alpha)}(x)| > 0$$

für jedes $\alpha > 0$. Es sei $a_n = \overline{w}(n)\overline{a}_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Es folgt nach (7.19), daß (7.18) für das oben definierte Funktionensystem mit jedem $\alpha > 0$ in der Menge CE überall besteht.

Wir werden beweisen, daß man mit einer geeigneten Veränderung der Funktionen $\{\Phi_n(x)\}$ in E erreichen kann, daß (7.18) für jedes $\alpha > 0$ überall in $[a, b]$ besteht.

Es sei $\Phi_n(x) = 1$ für $x \in E$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Es ist klar, daß das so erhaltene Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ in $[a, b]$ orthonormiert ist und die Funktionen $\Phi_n(x)$ gleichmäßig beschränkt sind, wenn sie ursprünglich gleichmäßig beschränkt waren; ferner besteht (7.18) für jedes $\alpha > 0$ überall in CE.

Wir werden beweisen, daß (7.18) für das so modifizierte Funktionensystem bei jedem positiven Parameterwert α auch in der Menge E erfüllt wird. Nach (7.17) ist es genügend zu zeigen, daß für jedes $\alpha > 0$

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\log\log N} \frac{1}{A_N^{(\alpha)}} \sum_{\nu=0}^{N} A_{N-\nu}^{(\alpha)} a_\nu = \infty \tag{7.32}$$

gilt. Nach (7.1) und auf Grund der obigen Definition der Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ ergibt sich für $\alpha > 0$

$$\frac{1}{A_N^{(\alpha)}} \sum_{\nu=0}^{N} A_{N-\nu}^{(\alpha)} a_\nu \geqq c(\alpha) \sum_{\nu=0}^{[N/2]} \overline{a}_\nu \qquad (N = 0, 1, \ldots), \tag{7.33}$$

wo $c(\alpha)$ eine nur von α abhängige positive Zahl ist. Ferner folgt aus der Definition der Folge $\{\overline{a}_n\}$:

$$\sum_{\nu=0}^{2N} \overline{a}_\nu \geqq \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{N} a_\nu^*. \tag{7.34}$$

So ergibt sich (7.32) auf Grund von (7.33) und (7.34), wenn es gezeigt wird, daß

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{\nu=2}^{N} \frac{1}{\sqrt{n \log^3 n\, w^*(n)}} = \infty$$

ist. Dies ist aber klar. Im gegengesetzten Fall existierte nämlich eine positive Zahl K, für die

$$\frac{1}{\log N} \sum_{\nu=2}^{N} \frac{1}{\sqrt{n \log^3 n\, w^*(n)}} < K \qquad (N \geqq 2)$$

ist, woraus auf Grund der Monotonität der Folge $\{w^*(n)\}$ sich ergäbe, daß

$$\frac{n}{2} \frac{1}{\sqrt{n \log^3 n\, w^*(n)}} < K \log n \qquad (n \geqq 4)$$

ist, also würde die Ungleichung

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n \log n)\left(w^{*}(n)\right)^{2}} < 4K^{2} \sum_{n=4}^{\infty} \frac{\log^{4} n}{n^{2}} < \infty$$

bestehen, die der Bedingung (7. 21) widerspricht.

Damit haben wir den Satz VIII vollständig bewiesen.

§ 8. Cesàrosche Mittel der orthogonalen Funktionen.

Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem. In diesem Paragraphen werden wir die folgenden Bezeichnungen verwenden:

$$s_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu(x), \quad \sigma_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{A_n^{(\alpha)}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(\alpha)} \varphi_\nu(x) \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Der Einfachheit halber werden die $(C, 1)$-Mittel mit $\sigma_n(x)$ bezeichnet.

Zuerst werden wir die in der Einleitung erwähnte Abschätzung (16) beweisen.

S a t z IX. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, die die Bedingung*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty \tag{8. 1}$$

erfüllt. Dann gilt für jedes $\alpha > 0$ die Abschätzung

$$\sigma_N^{(\alpha)}(x) = o(\lambda_N) \tag{8. 2}$$

fast überall im Intervall $[a, b]$.

Zum Beweis benötigen wir einige Hilfssätze.

H i l f s s a t z XI. *Wenn die positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ die Bedingung (8. 1) erfüllt, dann ist für jedes $\alpha > 0$*

$$\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \left(\sigma_n^{(r-1)}(x) - \sigma_n^{(r)}(x)\right)^2 = o(\lambda_N^2) \qquad \left(r > \frac{1}{2}\right)$$

fast überall im Intervall $[a, b]$.

B e w e i s v o n H i l f s s a t z XI. Da für jedes s

$$\sum_{n=2}^{2^s} \frac{1}{\lambda_n^2} = \sum_{m=1}^{s} \sum_{n=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{1}{\lambda_n^2} \geqq \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{s} \frac{2^m}{\lambda_{2^m}^2}$$

gilt, erhalten wir auf Grund von (8. 1):

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m}{\lambda_{2^m}^2} < \infty. \tag{8. 3}$$

Nach der Definition der Koeffizienten $A_m^{(\alpha)}$ ist für jedes n

$$\sigma_n^{(r-1)}(x)-\sigma_n^{(r)}(x)=\frac{1}{A_n^{(r-1)}A_n^{(r)}}\sum_{\nu=0}^{n}(A_{n-\nu}^{(r-1)}A_n^{(r)}-A_{n-\nu}^{(r)}A_n^{(r-1)})\varphi_\nu(x)=$$

$$=\frac{1}{rA_n^{(r)}}\sum_{\nu=0}^{n}\nu A_{n-\nu}^{(r-1)}\varphi_\nu(x)$$

und daher ist für jedes n

$$\int_a^b(\sigma_n^{(r-1)}(x)-\sigma_n^{(r)}(x))^2\,dx=\frac{1}{r^2(A_n^{(r)})^2}\sum_{\nu=0}^{n}\nu^2(A_{n-\nu}^{(r-1)})^2.$$

Daraus ergibt sich mit einer einfachen Rechnung, daß für jedes n

$$\int_a^b\left\{\sum_{n=0}^{2^{m+1}}(\sigma_n^{(r-1)}(x)-\sigma_n^{(r)}(x))^2\right\}dx=\frac{1}{r^2}\sum_{n=0}^{2^{m+1}}\frac{1}{(A_n^{(r)})^2}\sum_{\nu=0}^{n}\nu^2(A_{n-\nu}^{(r-1)})^2=\tag{8.4}$$

$$=\frac{1}{r^2}\sum_{\nu=0}^{2^{m+1}}\nu^2\sum_{n=\nu}^{2^{m+1}}\left(\frac{A_{n-\nu}^{(r-1)}}{A_n^{(r)}}\right)^2$$

gilt. Da nach (7. 1)

$$\sum_{n=\nu}^{2^{m+1}}\left(\frac{A_{n-\nu}^{(r-1)}}{A_n^{(r)}}\right)^2<\frac{M}{\nu}\qquad(\nu=1,\ldots,2^{m+1};\ m=1,2,\ldots)\tag{8.5}$$

ist, wo M eine von m und ν unabhängige positive Zahl bezeichnet[15]), so erhalten wir aus (8. 4) und (8. 5), daß für jedes $m(\geqq 1)$

$$\frac{1}{\lambda_{2^m}^2}\int_a^b\left\{\frac{1}{2^m}\sum_{n=0}^{2^{m+1}}(\sigma_n^{(r-1)}(x)-\sigma_n^{(r)}(x))^2\right\}dx=O(1)\frac{2^m}{\lambda_{2^m}^2}$$

gilt. Daraus und aus (8. 3) ergibt sich mit Anwendung des B. Levischen Satzes, daß die Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{2^m}^2}\left\{\frac{1}{2^m}\sum_{n=0}^{2^{m+1}}(\sigma_n^{(r-1)}(x)-\sigma_n^{(r)}(x))^2\right\}$$

im Intervall $[a, b]$ fast überall konvergiert. Nach dem Kroneckerschen Lemma besteht also

$$\frac{1}{2^m}\sum_{n=0}^{2^{m+1}}(\sigma_n^{(r-1)}(x)-\sigma_n^{(r)}(x))^2=o(\lambda_{2^m}^2)\tag{8.6}$$

im Intervall $[a, b]$ fast überall.

---

15) Siehe z. B. A. ZYGMUND [2], S. 360.

Ist $2^m < N \leqq 2^{m+1}$, so hat man

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\left(\sigma_n^{(r-1)}(x)-\sigma_n^{(r)}(x)\right)^2 = O(1)\frac{1}{2^m}\sum_{n=0}^{2^{m+1}}\left(\sigma_n^{(r-1)}(x)-\sigma_n^{(r)}(x)\right)^2,$$

woraus die Behauptung auf Grund von (8.6) folgt.

Damit haben wir den Hilfssatz XI bewiesen.

Hilfssatz XII. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, die die Bedingung* (8.1) *erfüllt. Ist im Intervall* $[a, b]$ *fast überall*

(8.7) $$\sigma_N(x) = o(\lambda_N),$$

so besteht auch

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} s_n^2(x) = o(\lambda_N^2)$$

fast überall in $[a, b]$.

Beweis von Hilfssatz XII. Aus der Ungleichung

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} s_n^2(x) \leqq \frac{2}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\left(s_n(x)-\sigma_n(x)\right)^2+\frac{2}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sigma_n^2(x)$$

ergibt sich die Behauptung mit Anwendung des Hilfssatzes XI.

Nun gehen wir zum Beweis des Satzes IX über.

Beweis von Satz IX. Zuerst wird gezeigt, daß (8.7) im Intervall $[a, b]$ fast überall erfüllt wird. Dieser Beweis wird durch eine kleine Abänderung eines Gedankens von G. Alexits durchgeführt. (Siehe G. Alexits [1].) Da

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b \frac{\sigma_{2^n}^2(x)}{\lambda_{2^n}^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+1}{\lambda_{2^n}^2}$$

ist, so ergibt sich nach (8.3) mit Anwendung des B. Levischen Satzes, daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sigma_{2^n}^2(x)}{\lambda_{2^n}^2}.$$

im Intervall $[a, b]$ fast überall konvergiert und so ist fast überall in $[a, b]$

(8.8) $$\sigma_{2^n}(x) = o(\lambda_{2^n}).$$

Da für jedes $m(\geqq 1)$

$$\sigma_n(x)-\sigma_{n-1}(x) = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{\nu=0}^{n}\nu\varphi_\nu(x)$$

ist, gilt nach (8.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b n\left(\frac{\sigma_n(x)-\sigma_{n-1}(x)}{\lambda_{n-1}}\right)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n}{(n(n+1))^2}\sum_{\nu=0}^{n}\nu^2\right\}\frac{1}{\lambda_{n-1}^2} = O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{n-1}^2} < \infty$$

und so ergibt sich mit Anwendung des B. Levischen Satzes, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{\sigma_n(x)-\sigma_{n-1}(x)}{\lambda_{n-1}}\right)^2$$

im Intervall $[a, b]$ fast überall konvergiert. Also ist fast überall in $[a, b]$

$$\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} n\left(\frac{\sigma_n(x)-\sigma_{n-1}(x)}{\lambda_{n-1}}\right)^2 = o(1) \qquad (m\to\infty). \tag{8. 9}$$

Für $2^m < N \leqq 2^{m+1}$ hat man auf Grund von (8. 9) fast überall in $[a, b]$

$$\left|\frac{\sigma_N(x)}{\lambda_N}-\frac{\sigma_{2^m}(x)}{\lambda_{2^m}}\right| \leqq \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\left|\frac{|\sigma_n(x)|}{\lambda_n}-\frac{|\sigma_{n-1}(x)|}{\lambda_{n-1}}\right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{|\sigma_n(x)-\sigma_{n-1}(x)|}{\lambda_{n-1}} \leqq \left\{\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} n\left(\frac{\sigma_n(x)-\sigma_{n-1}(x)}{\lambda_{n-1}}\right)^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\frac{1}{n}\right\}^{1/2} = o(1),$$

woraus sich nach (8. 8) ergibt, daß für $\alpha=1$ die Abschätzung (8.2) im Intervall $[a, b]$ fast überall gilt.

Da (8. 7) im Intervall $[a, b]$ fast überall erfüllt wird, erhalten wir mit Anwendung des Hilfssatzes XII, daß

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}(\sigma_n^{(0)}(x))^2 = o(\lambda_N^2)$$

in $[a, b]$ fast überall gilt. Daraus folgt mit Anwendung des Hilfssatzes IX mit $\varepsilon=\alpha/2$, daß

$$\sigma_N^{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}(x) = o(\lambda_N) \tag{8. 10}$$

in $[a, b]$ fast überall ist. Da für jedes N

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\left(\sigma_n^{\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)}(x)\right)^2 \leqq \frac{2}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\left(\sigma_n^{\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)}(x)-\sigma_n^{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}(x)\right)^2+\frac{2}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\left(\sigma_n^{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}(x)\right)^2$$

gilt, so erhalten wir nach dem obigen und nach (8. 10), mit Anwendung des Hilfssatzes XI, daß fast überall in $[a, b]$

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\left(\sigma_n^{\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)}(x)\right)^2 = o(\lambda_N^2)$$

gilt. Deshalb ergibt sich endlich mit Anwendung des Hilfssatzes IX, daß im Intervall $[a, b]$ fast überall

$$\sigma_N^{(\alpha)}(x) = o(\lambda_N)$$

ist.

Damit haben wir den Satz IX volständig bewiesen.

Im folgenden wir gezeigt, daß die im Satz IX angegebene Abschätzung im wesentlichen nicht verbessert werden kann.

Satz X. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, die die Bedingung*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = \infty \tag{8.11}$$

erfüllt. Dazu kann ein im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ angegeben werden, derart, daß für jedes $\alpha > 0$

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\lambda_N} \left| \frac{1}{A_N^{(\alpha)}} \sum_{\nu=0}^{N} A_{N-\nu}^{(\alpha)} \Phi_\nu(x) \right| = \infty \tag{8.12}$$

im Intervall $[a, b]$ überall gilt.

Beweis von Satz X. Da die Bedingung (8.11) erfüllt wird, kann auf Grund des in der Fußnote [11]) angeführten Satzes eine positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendliche strebende Zahlenfolge $\{\bar\lambda_n\}$ angegeben werden, die die Bedingungen

$$\lambda_n = o(\bar\lambda_n) \tag{8.13}$$

und

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\bar\lambda_n^2} = \infty \tag{8.14}$$

erfüllt. Aus (8.14) folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\bar\lambda_{2n}^2} = \infty. \tag{8.15}$$

Nach (7.1) existiert für jede natürliche Zahl r eine positive Zahl $c(r)$ mit

$$\frac{A_{M-m}^{(r)}}{A_M^{(r)}} \geqq c(r) \qquad \left(0 \leqq m \leqq \frac{M}{2};\quad M = 1, 2, \ldots\right). \tag{8.16}$$

Die Zahlen $c(r)$ können auch so gewählt werden, daß die Bedingung

$$1 \geqq c(r) \geqq c(r+1) \qquad (r = 1, 2, \ldots) \tag{8.17}$$

erfüllt wird.

Im folgenden werden wir mit vollständiger Induktion Indexfolgen $\{N_r\}$ und $\{m_n\}$ definieren, die den folgenden Bedingungen genügen:

$$2N_{r-1} \leqq N_r \qquad (r = 1, 2, \ldots), \tag{8.18}$$

$$\frac{1}{2\bar\lambda_{2m_0}^2} < \sum_{n=N_{r-1}+1}^{N_r} \frac{1}{\bar\lambda_{2m_n}^2} < \frac{b-a}{2} \qquad (r = 1, 2, \ldots) \tag{8.19}$$

und

$$\sum_{i=0}^{r-1} \bar\lambda_{2m_{N_i}} \leqq \frac{c(r)}{2} \bar\lambda_{2m_{N_r}} \qquad (r = 1, 2, \ldots). \tag{8.20}$$

Es sei $N_0=0$ und es sei m_0 die kleinste natürliche Zahl, für die $\bar{\lambda}_{2m_0}>(b-a)^{-1/2}$ gilt. Wir nehmen an, daß die Indizes $N_0,\ldots,N_{s-1},m_0,\ldots,m_{N_{s-1}}$ $(s>1)$ bereits definiert sind derart, daß für $r=0,\ldots,s-1$ die Bedingungen (8. 18), (8. 19) und (8. 20) erfüllt werden. Es sei dann $\bar{N}_s$ die kleinste natürliche Zahl, für die die Ungleichungen

$$2N_{s-1}\leqq \bar{N}_s,\quad \sum_{i=0}^{s-1}\bar{\lambda}_{2m_{N_i}}\leqq \frac{c(s)}{2}\bar{\lambda}_{2\bar{N}_s} \tag{8.21}$$

gelten, es sei ferner $k_s\,(>m_{N_{s-1}})$ die kleinste natürliche Zahl, für die

$$\frac{1}{\bar{\lambda}_{2k_s}^2}<\frac{1}{2(\bar{N}_s-N_{s-1})\bar{\lambda}_{2m_0}^2} \tag{8.22}$$

ist. Nach (8. 15) ist

$$\sum_{n=k_s}^{\infty}\frac{1}{\bar{\lambda}_{2n}^2}=\infty.$$

Aus (8. 13) folgt, daß $\bar{\lambda}_n$ für $n\to\infty$ gegen ∞ strebt, und folglich kann eine unendliche Indexfolge $(k_s\leqq)\nu_1<\cdots<\nu_n<\cdots$ definiert werden, so daß

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\bar{\lambda}_{2\nu_n}^2}=\frac{b-a}{2} \tag{8.23}$$

besteht. Es existiert also ein Index N_s (wir nehmen den kleinsten), für den

$$\frac{1}{2\bar{\lambda}_{2m_0}^2}<\sum_{n=1}^{N_s-N_{s-1}}\frac{1}{\bar{\lambda}_{2\nu_n}^2} \tag{8.24}$$

gilt. Aus (8. 23) und (8. 24) folgt:

$$\frac{1}{2\bar{\lambda}_{2m_0}^2}<\sum_{n=1}^{N_s-N_{s-1}}\frac{1}{\bar{\lambda}_{2\nu_n}^2}<\frac{b-a}{2}. \tag{8.25}$$

Ferner ist wegen (8. 22) $N_s>\bar{N}_s$ und so besteht nach (8. 21) die Ungleichung (8. 18) für $r=s$. Es sei $m_{n+N_{s-1}}=\nu_n$ $(n=1,\ldots,N_s-N_{s-1})$, dann wird wegen (8. 25) die Bedingung (8. 19) erfüllt, und wegen $m_{N_s}\geqq N_s$ und (8. 21) wird (8. 20) auch für $r=s$ erfüllt.

Somit haben wir die Indexfolgen $\{N_r\}$ und $\{m_n\}$ durch vollständige Induktion definiert, nach Konstruktion gelten die Bedingungen (8. 18)—(8. 20) für jedes r. Aus (8. 19) folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\bar{\lambda}_{2m_n}^2}=\infty. \tag{8.26}$$

Nun wird mit der im Paragraphen 5 angegebenen Methode ein im Intervall $[a,b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ $(n=0,1,\ldots)$ von

Treppenfunktionen mit der Periode $b-a$ definiert, für das die folgende Bedingung erfüllt wird: für jede natürliche Zahl n ist

$$(8.27) \qquad |\Phi_n(x)| = \begin{cases} \bar{\lambda}_{2m_n} & \text{für} \quad x \in I_n + l(b-a) \quad (l = 0, \pm 1, \ldots), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wo $I_n = [\alpha_{n-1}, \alpha_n)$ $(n = 0, 1, \ldots)$, $\alpha_{-1} = 0$, $\alpha_n = \sum_{i=0}^{n} \bar{\lambda}_{2m_n}^{-2}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ bedeutet.

Es sei

$$\Phi_0(x) = \begin{cases} \bar{\lambda}_{2m_0} & \text{für} \quad x \in I_0 + l(b-a) \quad (l = 0, \pm 1, \ldots), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist klar, daß diese Funktion eine Treppenfunktion von der Periode $b-a$ ist, ihre Norm gleich 1 ist und die Bedingung (8.27) für $n = 0$ erfüllt wird.

Es sei k eine beliebige natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Funktionen $\Phi_0(x), \ldots, \Phi_{k-1}(x)$ bereits definiert wurden, so daß sie Treppenfunktionen von der Periode $b-a$ sind, ein im Intervall $[a, b]$ orthonormiertes System bilden und die Bedingung (8.27) für $n = 0, \ldots, k-1$ erfüllt wird.

Es gibt eine Einteilung des Intervalls I_k in endlich viele Teilintervalle I_ϱ $(\varrho = 1, \ldots, r)$, auf denen die Funktionen $\Phi_0(x), \ldots, \Phi_{k-1}(x)$ alle konstant sind. Die zwei Hälften des Intervalls I_ϱ seien mit I'_ϱ und I''_ϱ bezeichnet $(\varrho = 1, \ldots, r)$. Es sei

$$\Phi_k(x) = \begin{cases} \bar{\lambda}_{2m_k} & \text{für} \quad x \in I'_\varrho + l(b-a) \quad (l = 0, \pm 1, \ldots), \\ -\bar{\lambda}_{2m_k} & \text{für} \quad x \in I''_\varrho + l(b-a) \quad (l = 0, \pm 1, \ldots) \end{cases} \qquad (\varrho = 1, \ldots, r).$$

Es ist klar, daß auch $\Phi_k(x)$ eine Treppenfunktion von der Periode $b-a$ ist, ihre Norm gleich 1 ist und in $[a, b]$ die Funktionen $\Phi_0(x), \ldots, \Phi_k(x)$ orthogonal sind, und für $n = k$ die Bedingung (8.27) auch erfüllt wird.

Somit haben wir durch vollständige Induktion ein in $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ konstruiert, das aus Funktionen von der Periode $b-a$ besteht und für welches (8.27) für jedes n erfüllt wird. Wir zeigen, daß für dieses Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ auch (8.12) für jedes $\alpha > 0$ überall erfüllt wird. Nach (7.2), (7.4) und (7.5) ist es klar, daß falls (8.12) für $\alpha_0 > 0$ erfüllt wird, es auch für jedes $\alpha \leqq \alpha_0$ überall erfüllt wird. Daher ist es genügend zu zeigen, daß für einen beliebig großen Parameterwert $\alpha = r_0$ (r_0 ist eine natürliche Zahl) (8.12) überall gültig ist. Es sei $x_0 \in [a, b]$ und seien $(0 \leqq)\, n_0 < \cdots < n_s < \cdots$ die sämtlichen Indizes, für die die Relation $x_0 \in I_{n_s} + l(b-a)$ mit irgendeiner ganzen Zahl l erfüllt wird; wegen (8.26) gibt es unendlich viele solche Indizes. Wir betrachten einen beliebigen solchen Index $n_s (> N_{r_0})$ und wählen r derart, daß $N_r < n_s \leqq N_{r+1}$ besteht; offenbar ist $r \geqq r_0$. Auf Grund von (8.18) und (8.19) ergibt sich, daß im Falle $n_s < n \leqq 2\, n_s$ $(\leqq N_{r+2})$ die Relation $x_0 \in I_n + l(b-a)$ für keine ganze Zahl l besteht und $n_{s-1} \leqq N_{r-1}$, $n_{s-2} \leqq N_{r-2}, \ldots$ ist (nach (8.19) ist notwendigerweise $s \leqq r$).

Es sei

$$\overline{\sigma}_n^{(r_0)}(x) = \frac{1}{A_n^{(r_0)}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(r_0)} \Phi_\nu(x) \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Nach den obigen Bemerkungen und auf Grund von (7.3), (8.16) und (8.27) ist

$$(8.28) \qquad |\overline{\sigma}_{2n_s}^{(r_0)}(x_0)| = \frac{A_{n_s}^{(r_0)}}{A_{2n_s}^{(r_0)}} |\Phi_{n_s}(x_0)| - \sum_{i=0}^{s-1} |\Phi_{n_i}(x_0)| \geqq c(r_0)\overline{\lambda}_{2m_{n_s}} - \sum_{i=0}^{s-1} \overline{\lambda}_{2m_{n_i}}.$$

Jedoch nach den obigen Bemerkungen und nach (8.20) gilt

$$(8.29) \qquad \sum_{i=0}^{s-1} \overline{\lambda}_{2m_{n_i}} \leqq \sum_{j=0}^{r-1} \overline{\lambda}_{2m_{N_j}} \leqq \frac{c(r)}{2} \overline{\lambda}_{2m_{N_r}}.$$

Da $n_s \geqq N_r$, so gilt $\overline{\lambda}_{2m_{n_s}} \geqq \overline{\lambda}_{2m_{N_r}}$. Da $r \geqq r_0$ ist, so erhalten wir aus (8.29) nach (8.17)

$$c(r_0)\overline{\lambda}_{2m_{n_s}} - \sum_{i=0}^{s-1} \overline{\lambda}_{2m_{n_i}} \geqq \frac{c(r_0)}{2} \overline{\lambda}_{2m_{n_s}}.$$

Da $m_{n_s} \geqq n_s$, erhalten wir nach (8.28):

$$|\overline{\sigma}_{2n_s}^{(r_0)}(x_0)| \geqq \frac{c(r_0)}{2} \overline{\lambda}_{2n_s}.$$

Nach dem obigen ist diese Abschätzung für unendlich viele Indizes n_s gültig, und so besteht nach (8.13)

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\lambda_N} |\overline{\sigma}_N^{(r_0)}(x_0)| = \infty.$$

Da $x_0 \in [a, b]$ beliebig ist, wird diese Relation im Intervall $[a, b]$ überall erfüllt. Da auch r_0 beliebig ist, so ergibt sich, daß für dieses Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ (8.12) für jedes $\alpha > 0$ in $[a, b]$ überall besteht.

Damit haben wir den Satz X vollständig bewiesen.

Es bleibt die Frage offen, ob das System $\{\Phi_n(x)\}$ gleichmäßig beschränkt gewählt werden kann.

§ 9. Die Lebesgueschen Funktionen der Cesàroschen Summation.

In diesem Paragraphen werden wir zeigen, daß auch die Abschätzungen (17) und (18) im allgemeinen nicht verbessert werden können.

Satz XI. *Es sei $\{w(n)\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, für die die Bedingung*

$$(9.1) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n \log n) w^2(n)} = \infty$$

erfüllt wird. Es kann ein im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\varrho_n(x)\}$ angegeben werden, für welches die Relation

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\sqrt{N \log N} w(N)} \int_a^b \left| \frac{1}{A_N^{(\alpha)}} \sum_{\nu=0}^{N} A_{N-\nu}^{(\alpha)} \varrho_\nu(x) \varrho_\nu(t) \right| dt = \infty \tag{9.2}$$

für jedes $\alpha > 0$ und für jedes x in $[a, b]$ besteht.

Ferner kann auch für jedes $\alpha > 0$ ein in $[a, b]$ gleichmäßig beschränktes orthonormiertes Funktionensystem $\{r_n^{(\alpha)}(x)\}$ angegeben werden, derart, daß in $[a, b]$ überall

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\sqrt{N}} \int_a^b \left| \frac{1}{A_N^{(\alpha)}} \sum_{\nu=0}^{N} A_{N-\nu}^{(\alpha)} r_\nu^{(\alpha)}(x) r_\nu^{(\alpha)}(t) \right| dt > \delta (>0) \tag{9.3}$$

gilt.

Für den Beweis dieses Satzes benötigen wir den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz XIII. *Es sei p eine natürliche Zahl und c eine reelle Zahl mit*

$$0 < \frac{1}{c} \leqq 1, \tag{9.4}$$

ferner sei $\{a_i\}$ $(i = 1, \ldots, 2p)$ eine endliche Folge von positiven Zahlen, für die die Bedingungen

$$1 \geqq a_i > 0 \quad (i = 1, \ldots, 2p), \quad a_i > \frac{1}{2^\omega} \quad (i = 1, \ldots, p) \tag{9.5}$$

mit einer positiven ganzen Zahl ω erfüllt sind. Es kann dann ein aus Treppenfunktionen bestehendes, im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes System $\{h_l(c, p, \{a_i\}; x)\}$ $(l = 1, \ldots, 2p)$ angegeben werden, das die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\int_0^2 h_l(c, p, \{a_i\}; x) dx = 0 \quad (l = 1, \ldots, 2p), \tag{9.6}$$

für $0 \leqq \bar{a}_l \leqq 1$ $(l = 1, \ldots, 2p)$ gilt

$$\int_0^2 \left| \sum_{l=1}^{2p} \bar{a}_l h_l(c, p, \{a_i\}; x) h_l(c, p, \{a_i\}; t) \right| dt < 2^{\omega+1} \sqrt{cp} \quad (0 \leqq x \leqq 2), \tag{9.7}$$

es existiert eine meßbare Menge $H(c, \omega)$ $(\subseteq [a, b])$, so daß

$$\mu(H(c, \omega)) > \frac{1}{2^{2\omega+2}} \frac{1}{c} \tag{9.8}$$

ist, und für $x \in H(c, \omega)$ *gilt*

$$(9.9) \qquad \int_0^2 \left| \sum_{l=p+1}^{2p} a_l h_l(c, p, \{a_i\}; x)\, h_l(c, p, \{a_i\}; t) \right| dt = 0$$

und

$$(9.10) \qquad \int_0^2 \left| \sum_{l=1}^{p} a_l h_l(c, p, \{a_i\}; x) h_l(c, p, \{a_i\}; t) \right| dt > \frac{1}{16} \sqrt{2cp}.$$

Dieser Hilfssatz ist das Analogon des Hilfssatzes IV.

B e w e i s v o n H i l f s s a t z XIII. Es seien r und $\varkappa$ natürliche Zahlen, für die die Ungleichung

$$(9.11) \qquad \frac{2r}{2^\varkappa} \leqq \frac{1}{c} < \frac{2r+1}{2^\varkappa}$$

besteht. Für $l = 1, \dots, p$ sei

$$h_l(c, p, \{a_i\}; x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a_l} \theta_1 r_{\varkappa+2\omega+l}(x) & \text{in } \left[0, \dfrac{2r}{2^{\varkappa+2\omega+1}}\right), \\ t_l \theta_1 r_{\varkappa+2\omega+l}(x) & \text{in } \left[\dfrac{2r}{2^{\varkappa+2\omega+1}}, \dfrac{2r}{2^\varkappa}\right), \\ \theta_2 r_{\varkappa+2\omega+l}(x) & \text{in } \left[\dfrac{2r}{2^\varkappa}, 2\right] \end{cases}$$

und für $l = p+1, \dots, 2p$ sei

$$h_l(c, p, \{a_i\}; x) = \begin{cases} 0 & \text{in } \left[0, \dfrac{2r}{2^{\varkappa+2\omega+1}}\right), \\ \theta r_{\varkappa+2\omega+l}(x) & \text{in } \left[\dfrac{2r}{2^{\varkappa+2\omega+1}}, 2\right], \end{cases}$$

dabei ist $r_k(x)$ $(k = 0, 1, \dots)$ die k-te Rademachersche Funktion,

$$(9.12) \qquad \theta_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{2^\varkappa}{r} \right)^{1/2},$$

$$(9.13) \qquad \theta_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r}{2^\varkappa} \right)^{-1/2},$$

ferner sind $t_1, \dots, t_p, \theta$ solche nichtnegative Zahlen, für die die Bedingung

$$\int^2 h_l^2(c, p, \{a_i\}; x)\, dx = 1 \qquad (l = 1, \dots, 2p)$$

erfüllt wird, die Existenz solcher Zahlen folgt aus (9. 4), (9. 5) und (9. 11). Offenbar ist

(9. 14) $$0 \leqq t_l \leqq 1 \qquad (l=1,\ldots,p)$$

und

(9. 15) $$0 < \theta \leqq 1.$$

Nach (9. 11) ist

(9. 16) $$\frac{2r}{2^\varkappa} > \frac{1}{2}\frac{1}{c}.$$

Daraus folgt nach (9. 11) und (9. 12):

(9. 17) $$\sqrt{c} > \theta_1 \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{c}.$$

Ferner folgt nach (9. 4) und (9. 13):

(9. 18) $$\frac{1}{\sqrt{2}} \geqq \theta_2 > \frac{1}{2}.$$

Es ist klar, daß die Funktionen $h_l(c,p,\{a_i\};x)$ $(l=1,\ldots,2p)$ Treppenfunktionen sind und im Intervall $[0,2]$ ein orthonormiertes System bilden. Mit Anwendung der Bunjakowski-Schwarzschen Ungleichung kann (9. 7) auf Grund von (9. 4), (9. 5), (9. 14), (9. 15), (9. 17) und (9. 18) leicht gezeigt werden. Endlich folgt (9. 6) offenbar aus der Definition.

Es sei $H(c,\omega)$ die meßbare Menge, welche aus dem Intervall $\left[0, \frac{2r}{2^{\varkappa+2\omega+1}}\right)$ durch Weglassen der diadisch rationalen Punkte entsteht. Aus (9. 16) folgt (9. 8). Nach der Definition ist (9. 9) klar.

Für $x \in H(c,\omega)$ ist nach (9. 17) und (9. 18)

$$\int_0^2 \left|\sum_{l=1}^{p} a_l h_l(c,p,\{a_i\};x) h_l(c,p,\{a_i\};t)\right| dt \geqq$$

(9. 19) $$\geqq \int_{\frac{2r}{2^\varkappa}}^{2} \left|\sum_{l=1}^{p} a_l h_l(c,p,\{a_i\};x) h_l(c,p,\{a_i\};t)\right| dt =$$

$$= \theta_1\theta_2 \int_{\frac{2r}{2^\varkappa}}^{2} \left|\sum_{l=1}^{p} r_{\varkappa+2\omega+l}(x) r_{\varkappa+2\omega+l}(t)\right| dt > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{2}} \int_{\frac{2r}{2^\varkappa}}^{2} \left|\sum_{k=\varkappa+2\omega+1}^{\varkappa+2\omega+p} r_k(x) r_k(t)\right| dt.$$

Da nach (9. 4) und (9. 11) die in dem Hilfssatz IV vorkommende Bedingung erfüllt wird, so folgt (9. 10) mit Anwendung des Hilfssatzes IV aus (9. 19).

Damit haben wir den Hilfssatz XIII vollständig bewiesen.

Ist $I=[u, v]$ ein beliebiges endliches Intervall, so sei

$$h_l(c, p, \{a_i\}, I; x)=\begin{cases}\sqrt{2}h_l\left(c, p, \{a_i\}; 2\frac{x-u}{v-u}\right) & \text{für} \quad u<x<v,\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

$(l=1, \ldots, 2p)$ und bezeichnen wir mit $H(c, \omega; I)$ das durch die Transformation $y=\frac{v-u}{2}x+u$ sich ergebende Bild der Menge $H(c, \omega)$. Dann ist es auf Grund von (9.6), (9.7), (9.8), (9.9) und (9.10) klar, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\text{(9.20)} \qquad \int_I h_l(c, p, \{a_i\}, I; x)\,dx=0 \qquad (l=1, \ldots, 2p),$$

für $0 \leqq \bar{a}_l \leqq 1$ $(l=1, \ldots, 2p)$ gilt

$$\text{(9.21)} \qquad \int_I \left|\sum_{l=1}^{2p} \bar{a}_l h_l(c, p, \{a_i\}, I; x)\, h_l(c, p, \{a_i\}, I; t)\right| dt<\mu(I)2^{\omega+1}\sqrt{cp} \quad (x \in I),$$

ferner ist

$$\text{(9.22)} \qquad \mu(H(c, \omega, I))>\frac{\mu(I)}{2^{2\omega+3}}\frac{1}{c},$$

$$\text{(9.23)} \qquad \int_I \left|\sum_{l=p+1}^{2p} a_l h_l(c, p, \{a_i\}, I; x)\, h_l(c, p, \{a_i\}, I; t)\right| dt=0 \quad (x \in H(c, \omega, I))$$

und

$$\text{(9.24)} \qquad \int_I \left|\sum_{l=1}^{p} a_l h_l(c, p, \{a_i\}, I; x)\, h_l(c, p, \{a_i\}, I; t)\right| dt>\frac{\mu(I)}{16}\sqrt{2cp}$$

$$(x \in H(c, \omega, I)).$$

B e w e i s v o n S a t z XI. Zuerst beschäftigen wir uns mit dem Beweis der ersten Behauptung. Mit Anwendung des in der Fußnote [11]) zitierten Satzes ergibt sich nach (9.1), daß eine positive, monoton nichtabnehmende Folge $\{\bar{w}(n)\}$ existiert, für die die Bedingungen

$$\text{(9.25)} \qquad w(n)=o(\bar{w}(n))$$

und

$$\text{(9.26)} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n \log n)\bar{w}^2(n)}=\infty$$

erfüllt sind.

Nach (7. 1) gibt es für jede natürliche Zahl r eine nur von r abhängige natürliche Zahl $\omega(r)$, so daß

$$\frac{A_{n-\nu}^{(r)}}{A_n^{(r)}} > \frac{1}{2^{\omega(r)}} \qquad \left(0 \leqq \nu \leqq \frac{n}{2};\, n=0, 1, \ldots\right) \tag{9.27}$$

ist; die Zahlen $\omega(r)$ können auch so gewählt werden, daß die Bedingung

$$\omega(r) \leqq \omega(r+1) \qquad (r=1, 2, \ldots) \tag{9.28}$$

erfüllt wird.

Wir werden eine Indexfolge $(1 \leqq) n_1 < \cdots < n_m < \cdots$ und eine aus ganzen Zahlen bestehende, ins Unendliche strebende Zahlenfolge $(1 \leqq) r_1 \leqq \cdots \leqq \leqq r_m \leqq \cdots$ definieren, für die die Bedingungen

$$\left((n_1+1)\overline{w}^2(2^{n_1+1})\right)^{-1} \leqq 1, \tag{9.29}$$

$$N_m = 2^{n_1} + \cdots + 2^{n_m} < 2^{n_m+1} \qquad (m=1, 2, \ldots), \tag{9.30}$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} 2^{n_k/2} < 2^{-\left(\omega(r_m)+5+\frac{1}{2}\right)} 2^{n_m/2} \qquad (m=2, 3, \ldots) \tag{9.31}$$

und

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-2\omega(r_m)}\left((n_m+1)\overline{w}^2(2^{n_m+1})\right)^{-1} = \infty \tag{9.32}$$

erfüllt sind.

Nach (9. 26) kann mit der bei dem Beweis des Satzes VI angeführten Methode eine Indexfolge $(1 \leqq) \nu_1^{(1)} < \cdots < \nu_l^{(1)} < \cdots$ definiert werden, für die die Bedingungen

$$\left((\nu_1^{(1)}+1)\overline{w}^2(2^{\nu_1^{(1)}+1})\right)^{-1} \leqq 1, \tag{9.33}$$

$$\sum_{i=1}^{l-1} 2^{\nu_i^{(1)}} < 2^{-\left(\omega(1)+5+\frac{1}{2}\right)} 2^{\nu_l^{(1)}/2} \qquad (l=2, 3, \ldots) \tag{9.34}$$

und

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left((\nu_l^{(1)}+1)\overline{w}^2(2^{\nu_l^{(1)}+1})\right)^{-1} = \infty$$

erfüllt sind. Es sei k die kleinste natürliche Zahl, für die

$$2^{-2\omega(1)} \sum_{l=1}^{k_1} \left((\nu_l^{(1)}+1)\overline{w}^2(2^{\nu_l^{(1)}+1})\right)^{-1} > \frac{1}{2} \tag{9.35}$$

besteht.

Es sei $n_l = \nu_l^{(1)}$, $r_l = 1$ für $l = 1, \ldots, k_1$. Auf Grund von (9. 33) wird (9. 29) erfüllt und nach (9. 34) wird auch die Bedingung (9. 31) für

$m=2, \ldots, k_1$ erfüllt. Nach (9. 35) ist

$$\sum_{l=1}^{k_1} 2^{-2\omega(r_l)}\left((n_l+1)\overline{w}^2(2^{n_l+1})\right)^{-1} > \frac{1}{2}.$$

Es sei $s>1$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die natürlichen Zahlen $n_1<n_2<\cdots<n_{k_{s-1}}$ und $r_1 \leqq r_2 \leqq \cdots \leqq r_{k_{s-1}} (=s-1)$ bereits definiert sind, so daß für die Indizes $m=1, \ldots, k_{s-1}$ die Bedingung (9. 31) erfüllt wird und

$$\sum_{l=1}^{k_{s-1}} 2^{-2\omega(r_l)}\left((n_l+1)\overline{w}^2(2^{n_l+1})\right) > \frac{s-1}{2} \tag{9.36}$$

ist. Es sei a_s die kleinste natürliche Zahl, für die

$$\sum_{k=1}^{k_{s-1}} 2^{n_k/2} < 2^{-\left(\omega(s)+5+\frac{1}{2}\right)} 2^{a_s/2}$$

gilt; offenbar ist $a_s > n_{k_{s-1}}$. Wegen (9. 26) ist

$$\sum_{n=2^{a_s}}^{\infty} \frac{1}{(n \log n)\overline{w}^2(n)} = \infty.$$

So kann mit der bei dem Beweis des Satzes VI angegebenen Methode eine Indexfolge $(a_s=)\nu_1^{(s)}<\nu_2^{(s)}<\cdots<\nu_l^{(s)}<\cdots$ definiert werden, derart, daß die Bedingungen

$$\sum_{k=1}^{k_{s-1}} 2^{n_k/2} + \sum_{i=1}^{l-1} 2^{\nu_i^{(s)}/2} < 2^{-\left(\omega(s)+5+\frac{1}{2}\right)} 2^{\nu_l^{(s)}/2} \qquad (l=2, 3, \ldots) \tag{9.37}$$

und

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left((\nu_l^{(s)}+1)\,\overline{w}^2(2^{\nu_l^{(s)}+1})\right)^{-1} = \infty$$

erfüllt werden. Es sei $k_s (>k_{s-1})$ die kleinste natürliche Zahl, für die

$$2^{-2\omega(s)} \sum_{l=1}^{k_s-k_{s-1}} \left((\nu_l^{(s)}+1)\,\overline{w}^2(2^{\nu_l^{(s)}+1})\right)^{-1} > \frac{1}{2} \tag{9.38}$$

besteht.

Wir setzen $n_{k_{s-1}+l}=\nu_l^{(s)}$, $r_{k_{s-1}+l}=s$ für $l=1, \ldots, k_s-k_{s-1}$. Aus (9. 37) folgt, daß (9. 31) für jedes $m=2, \ldots, k_s$ besteht. Nach (9. 36) und (9. 38) ist

$$\sum_{l=1}^{k_s} 2^{-2\omega(r_l)}\left((n_l+1)\overline{w}^2(2^{n_l+1})\right)^{-1} > \frac{s}{2}. \tag{9.39}$$

Wenn dieses Verfahren unbegrenzt fortgesetzt wird, erhalten wir gegen ∞ strebende Folgen von natürlichen Zahlen $n_1<\cdots<n_m<\cdots$ und $r_1 \leqq \cdots \leqq$

$\leqq r_m \leqq \ldots$, so daß die Bedingung (9. 31) für jeden Index $m(\geqq 2)$ erfüllt wird, und es gibt eine Indexfolge $k_1 < \ldots < k_s < \ldots$, so daß (9. 39) für jedes s besteht. Also wird auch (9. 32) erfüllt. Da die Indexfolge $\{n_m\}$ streng wachsend ist, besteht auch (9. 30).

Wir werden ein aus Treppenfunktionen bestehendes und von der Folge $\{\overline{w}(n)\}$ (und so auch von der Folge $\{w(n)\}$) abhängiges, im Intervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\varrho_n(x)\}$ $(n=0, 1, \ldots)$ und eine Folge von meßbaren Mengen $H_m \subseteqq [a, b]$ $(m=1, 2, \ldots)$ definieren, für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$\overline{a}$) für jeden Index $m(\geqq 1)$ gilt

$$\int_a^b \left| \sum_{n=N_{m-1}}^{N_m-1} \overline{a}_n \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt < \sqrt{2}\, 2^{\omega(r_m)} \left(2^{n_m}(n_m+1)\right)^{1/2} \overline{w}(2^{n_m+1}), \tag{9.40}$$

wenn $0 \leqq \overline{a}_n \leqq 1$ $(N_{m-1} \leqq n < N_m;\ N_0=0)$ ist;

$\overline{b}$) für $x \in H_m$ ist

$$\int_a^b \left| \frac{1}{A^{(r_m)}_{N_m-1}} \sum_{n=N_{m-1}+2^{n_m-1}}^{N_m-1} A^{(r_m)}_{N_m-1-n}\, \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt = 0 \tag{9.41}$$

und

$$\int_a^b \left| \frac{1}{A^{(r_m)}_{N_m-1}} \sum_{n=N_{m-1}}^{N_{m-1}+2^{n_m-1}-1} A^{(r_m)}_{N_m-1-n}\, \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt > \frac{1}{16}\left(2^{n_m}(n_m+1)\right)^{1/2} \overline{w}(2^{n_m+1}); \tag{9.42}$$

$\overline{c}$) die Mengen H_m $(m=1, 2, \ldots)$ sind stochastisch unabhängig und es gilt;

$$\mu(H_m) > 2^{-2\omega(r_m)-3}\left((n_m+1)\,\overline{w}^2(2^{n_m+1})\right)^{-1}(b-a). \tag{9.43}$$

Es sei $c_1 = (n_1+1)\overline{w}^2(2^{n_1+1})$, $2p_1 = 2^{n_1}$, $a_i^{(1)} = A^{(r_1)}_{N_1-i} \big/ A^{(r_1)}_{N_1-1}$ $(i=1, \ldots, N_1)$, $\omega_1 = \omega(r_1)$. Dann werden wegen (7. 2), (9. 27) und (9. 29) die Bedingungen (9. 4) und (9. 5) erfüllt, und so kann der Hilfssatz XIII angewendet werden. Es sei

$$\varrho_{l-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} h_l\left(c_1, p_1, \{a_i^{(1)}\}, [a, b]; x\right) \qquad (l=1, \ldots, 2^{n_1})$$

und $H_1 = H(c_1, \omega_1, [a, b])$.

Nach dem Hilfssatz XIII sind die $\varrho_n(x)$ $(n=0, \ldots, N_1-1)$ Treppenfunktionen, die im Intervall $[a, b]$ ein orthonomiertes System bilden, ferner werden (9.40), (9.41), (9.42) und (9.43) nach (9.21), (9.22), (9.23) und (9.24) für $m=1$ erfüllt.

Es sei $s(>1)$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\varrho_n(x)$ $(n=0,\ldots,N_{s-1}-1)$ und die meßbaren Mengen $H_1,\ldots,H_{s-1}$ bereits definiert sind, so daß diese Funktionen im Intervall $[a,b]$ ein orthonormiertes System bilden und die Bedingungen $\bar{a})-\bar{c})$ für $m=1,\ldots,s-1$ erfüllt sind, insbesondere sind also die Mengen $H_1,\ldots,H_{s-1}$ stochastisch unabhängig.

Das Intervall $[a,b]$ kann in endlich viele Teilintervalle I_ϱ $(\varrho=1,\ldots,r)$ zerlegt werden, so daß die Funktionen $\varrho_n(x)$ $(0\leqq n<N_{s-1})$ in den einzelnen Teilintervallen konstant sind.

Wir setzen alsdann $c_s=(n_s+1)\bar{w}^2(2^{n_s+1})$, $2p_s=2^{n_s}$, $a_i^{(s)}=A^{(r_s)}_{N_s-N_{s-1}-i}\Big/A^{(r_s)}_{N_s-1}$ $(i=1,\ldots,2^{n_s})$, $\omega_s=\omega(r_s)$. Wegen (7.2), (9.27) und (9.29) sind die Bedingungen (9.4) und (9.5) erfüllt; folglich kann der Hilfssatz XIII angewendet werden. Es sei

$$\varrho_{N_{s-1}+l-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}\sum_{\varrho=1}^{r}h_l(c_s,p_s,\{a_i^{(s)}\},I_\varrho;x)\qquad(l=1,\ldots,2^{n_s})$$

und

$$H_s=\bigcup_{\varrho=1}^{r}H(c_s,\omega_s,I_\varrho).$$

Nach Hilfssatz XIII sind auch die Funktionen $\varrho_n(x)$ $(N_{s-1}\leqq n<N_s)$ Treppenfunktionen. Mit der bei dem Beweis des Satzes VI angewendeten Methode kann gezeigt werden, daß dieselben ein im Intervall $[a,b]$ orthonormiertes System bilden, und wegen (9.20) zu den Funktionen $\varrho_n(x)$ $(0\leqq n<N_{s-1})$ orthogonal sind. Auf Grund von (9.21), (9.22), (9.23) und (9.24) kann mit der bei dem Beweis des Satzes VI angewendeten Methode gezeigt werden, daß (9.40), (9.41), (9.42) und (9.43) auch für $m=s$ erfüllt werden. Es ist aus der Konstruktion klar, daß auch die Mengen $H_1,\ldots,H_s$ stochastisch unabhängig sind.

Somit haben wir durch vollständige Induktion die unendlichen Folgen von Funktionen $\varrho_n(x)$ und Mengen H_m derart definiert, daß die gestellten Bedingungen erfüllt sind.

Es sei nun α eine beliebige positive Zahl. Wegen $r_m\to\infty$ ist $r_m\geqq\alpha$ für genügend großes m. Wir betrachten einen solchen Index m, und sei $x\in H_m$. Dann ist nach (7.2) und (7.3)

$$0<\frac{A^{(r_m)}_{N_m-1-n}}{A^{(r_m)}_{N_m-1}}\leqq 1\qquad(0\leqq n\leqq N_m-1),$$

und so nach (9. 27), (9. 28), (9. 30), (9. 31), (9. 40), (9. 41) und (9. 42) gilt:

$$\int_a^b \left| \frac{1}{A^{(r_m)}_{N_m-1}} \sum_{n=0}^{N_m-1} A^{(r_m)}_{N_m-1-n} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt \geqq$$

$$\geqq \int_a^b \left| \frac{1}{A^{(r_m)}_{N_m-1}} \sum_{n=N_{m-1}}^{N_{m-1}+2^{n_m-1}-1} A^{(r_m)}_{N_m-1-n} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt -$$

(9. 44)
$$-\sum_{k=1}^{m-1} \int_a^b \left| \frac{1}{A^{(r_m)}_{N_m-1}} \sum_{n=N_{k-1}}^{N_k-1} A^{(r_m)}_{N_m-1-n} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt >$$

$$> \frac{1}{16}\left(2^{n_m}(n_m+1)\right)^{1/2} \bar{w}(2^{n_m+1}) - \sqrt{2} \sum_{k=1}^{m-1} 2^{\omega(r_k)} \left(2^{n_k}(n_k+1)\right)^{1/2} \bar{w}(2^{n_k+1}) \geqq$$

$$\geqq \sqrt{2}\, 2^{\omega(r_m)} (n_m+1)^{1/2}\, \bar{w}(2^{n_m+1}) \left\{ 2^{-(\omega(r_m)+4+\frac{1}{2})}\, 2^{n_m/2} - \sum_{k=1}^{m-1} 2^{n_k/2} \right\} >$$

$$> \frac{1}{32}\left(2^{n_m}(n_m+1)\right)^{1/2} \bar{w}(2^{n_m+1}) \geqq \frac{\sqrt{2}}{64} \sqrt{N_m \log N_m}\, \bar{w}(N_m).$$

Nach (7. 2), (7. 4) und (7. 5) ergibt sich, daß für genügend großes m ($r_m \geqq \alpha$) und für $x \in H_m$ gibt es ein Index M_m, $0 \leqq M_m < N_m$, so daß

(9. 45)
$$\int_a^b \left| \frac{1}{A^{(\alpha)}_{M_m}} \sum_{\nu=0}^{M_m} A^{(\alpha)}_{M_m-\nu} \varrho_\nu(x)\varrho_\nu(t) \right| dt \geqq$$

$$\geqq \int_a^b \left| \frac{1}{A^{(r_m)}_{N_m-1}} \sum_{n=0}^{N_m-1} A^{(r_m)}_{N_m-1-n} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt \geqq \frac{\sqrt{2}}{64} \sqrt{N_m \log N_m}\, \bar{w}(N_m)$$

gilt.

Ist nun $x \in \overline{\lim\limits_{m\to\infty}} H_m$, so wird (9. 44) für unendlich viele m erfüllt und so gibt es für unendlich viele Indizes m eine natürliche Zahl $0 \leqq M_m < N_m$, so daß (9. 45) besteht. Also gilt nach (9. 25)

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{\sqrt{N_m \log N_m}\, w(N_m)} \int_a^b \left| \frac{1}{A^{(\alpha)}_{M_m}} \sum_{\nu=0}^{M_m} A^{(\alpha)}_{M_m-\nu} \varrho_\nu(x)\varrho_\nu(t) \right| dt = \infty.$$

Daraus folgt, daß (9. 2) in jedem solchen Punkt x besteht.

Auf Grund von (9. 32), (9. 41) und der stochastischen Unabhängigkeit der Mengen H_m ergibt sich aber mit Anwendung des zweiten Borel-Cantellischen Lemmas, daß $\mu(\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} H_m) = b - a$. Also besteht (9. 2) für jedes $\alpha > 0$ fast überall in $[a, b]$.

Wir bezeichnen mit E die Teilmenge vom Maße Null des Grundintervalls $[a, b]$, auf der (9. 2) für irgendeinen Parameterwert $\alpha > 0$ nicht erfüllt wird. Wir verändern auf der Menge E die Werte der Funktionen $\varrho_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ wie folgt: für $x \in E$ setzen wir

$$\varrho_n(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{\sqrt{2}}{b-a}\right)^{1/2} \dfrac{A_{N_{m}-1}^{(r_m)}}{A_{N_m-1-n}^{(r_m)}} \sqrt{c_m} & \text{wenn } N_{m-1} \leqq n < N_{m-1} + 2^{n_{m-1}}, \\ 0 & \text{wenn } N_{m-1} + 2^{n_{m-1}} \leqq n < N_m \end{cases}$$

$(m = 1, 2, \ldots)$. Das so erhaltene Funktionensystem $\{\varrho_n(x)\}$ wird im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiert, und wie leicht zu sehen ist, wird (9. 2) für jedes $\alpha > 0$ in $[a, b]$ überall erfüllt.

Damit haben wir die erste Behauptung des Satzes XI bewiesen.

Nun gehen wir zum Beweis der zweiten Behauptung des Satzes XI über. Es kann mit der bei dem Beweis des Satzes VI angewendeten Methode eine Indexfolge $(1 \leqq) \mu_1 < \cdots < \mu_m < \cdots$ angegeben werden, so daß die Bedingungen

$$N_m = 2^{\mu_1} + \cdots + 2^{\mu_m} < 2^{\mu_m+1} \qquad (m = 1, 2, \ldots; \ N_0 = 0) \tag{9.46}$$

und

$$\sum_{k=1}^{m-1} 2^{n_k/2} < 2^{-(\omega(\alpha)+5+\frac{1}{2})} 2^{\mu_m/2} \qquad (m = 2, 3, \ldots) \tag{9.47}$$

erfüllt sind, wobei $\omega(\alpha)$ eine natürliche Zahl bedeutet, für die

$$\frac{A_{M-n}^{(\alpha)}}{A_M^{(\alpha)}} \geqq \frac{1}{2^{\omega(\alpha)}} \quad \left(0 \leqq n \leqq \frac{M}{2}; \ M = 0, 1, \ldots\right) \tag{9.48}$$

besteht.

Wir verrichten die beim Beweis der ersten Behauptung des Satzes XI angegebene Konstruktion, so daß der Hilfssatz XIII mit den Zahlen

$$c_m = 1, \ 2p_m = 2^{\mu_m}, a_i^{(m)} = A_{N_m-N_{m-1}-i}^{(\alpha)} \Big/ A_{N_m-1}^{(\alpha)} \quad (i = 1, \ldots, 2^{\mu_m}; \ m = 1, 2, \ldots),$$

$\omega = \omega(\alpha)$ angewendet wird; dies ist möglich, da (9. 4) erfüllt wird, und wegen (9. 48) auch (9. 5) besteht.

So erhalten wir ein im Intervall $[a, b]$ orthonormiertes, von α abhängiges Funktionensystem $\{r_n^{(\alpha)}(x)\}$ und eine Folge von meßbaren Mengen $O_m \subseteqq [a, b]$, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$\bar{\bar{a}}$) für jeden Index $m (\geqq 1)$ gilt

$$\int_a^b \left| \sum_{n=N_{m-1}}^{N_m-1} \bar{a}_n r_n^{(\alpha)}(x) r_n^{(\alpha)}(t) \right| dt < \sqrt{2}\, 2^{\omega(\alpha)} 2^{n_m/2} \qquad (a \leqq x \leqq b),$$

wenn $0 \leqq \bar{a}_n \leqq 1$ $(N_{m-1} \leqq n < N_m)$ ist;

$\bar{\bar{b}}$) für $x \in O_m$ ist

$$\int_a^b \left| \frac{1}{A^{(\alpha)}_{N_m-1}} \sum_{n=N_{m-1}+2^{n_m-1}}^{N_m-1} A^{(\alpha)}_{N_m-1-n} r^{(\alpha)}_n(x) r^{(\alpha)}_n(t) \right| dt = 0$$

und gilt

$$\int_a^b \left| \frac{1}{A^{(\alpha)}_{N_m-1}} \sum_{n=N_{m-1}}^{N_{m-1}+2^{n_m-1}-1} A^{(\alpha)}_{N_m-1-n} r^{(\alpha)}_n(x) r^{(\alpha)}_n(t) \right| dt > \frac{1}{16} 2^{n_m/2};$$

$\bar{\bar{c}}$) die Mengen O_m $(m = 1, 2, \ldots)$ sind stochastisch unabhängig und es gilt

$$\mu(O_m) > (b-a) 2^{-2\omega(\alpha)-3}. \tag{9.49}$$

Ferner ist nach (9.5), (9.14), (9.15), (9.17), (9.18), (9.48) und der Konstruktion

$$|r^{(\alpha)}_n(x)| \leqq \left(\frac{2}{b-a}\right)^{1/2} 2^{\omega(\alpha)} \qquad (n = 0, 1, \ldots; \; a \leqq x \leqq b).$$

Auf Grund der Bedingungen $\bar{\bar{a}}$), $\bar{\bar{b}}$) und nach (9.46), (9.47) ergibt sich in der oben angegebenen Weise, daß für $x \in O_m$

$$\int_a^b \left| \frac{1}{A^{(\alpha)}_{N_m-1}} \sum_{n=0}^{N_m-1} A^{(\alpha)}_{N_m-1-n} r^{(\alpha)}_n(x) r^{(\alpha)}_n(t) \right| dt > \frac{\sqrt{2}}{64} \sqrt{N_m}$$

gilt. Ist $x \in \overline{\lim_{m\to\infty}} O_m$, so wird diese Ungleichung für unendlich viele m erfüllt, also gilt (9.3).

Nach (9.49) und der stochastischen Unabhängigkeit der Mengen O_m folgt aber mit Anwendung des zweiten Borel-Cantellischen Lemmas, daß $\mu(\overline{\lim_{m\to\infty}} O_m) = b-a$ ist, also gilt (9.3) fast überall in $[a, b]$. Durch eine geeignete Veränderung der Werte der Funktionen $r^{(\alpha)}_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ auf einer Menge vom Maße Null kann erreicht werden (siehe den Beweis der ersten Behauptung des Satzes XI), daß (9.3) in $[a, b]$ überall gilt.

Damit haben wir auch die zweite Behauptung des Satzes XI vollständig bewiesen.

Es bleibt die Frage offen, ob die Folge $\lambda_n = \sqrt{n \log n}\, w(n)$ durch eine beliebige, positive, monoton nichtabnehmende Folge $\{\lambda_n\}$ ersetzt werden kann, welche die Bedingung (8.11) erfüllt.

Schriftenverzeichnis.

ALEXITS, G., [1] Sur les sommes de fonctions orthogonales, *Annales de la Société Polonaise de Math.*, **25** (1952), 183—187.

FELLER, W., [1] *An introduction to probability theory and its applications*, vol. I (New-York, 1950).

GÁL, I. S., [1] Sur les moyennes arithmétiques des suites de fonctions orthogonales, *Annales de l'Institut Fourier*, **1** (1949), 53—59.

HARDY, G. H. — LITTLEWOOD, J. E. — PÓLYA, G., [1] *Inequalities* (Cambridge, 1934).

KACZMARZ, S., [1] Sur la convergence et la sommabilité des développements orthogonaux, *Studia Math.*, **1** (1929), 87—121; [2] Notes on orthogonal series. II, *Studia Math.*, **5** (1934), 103—106.

KACZMARZ, S. — STEINHAUS, H., [1] *Theorie der Orthogonalreihen* (Warszawa-Lwów, 1935).

KHINTCHINE, J. — KOLMOGOROFF, A. N., [1] Über die Konvergenz der Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden, *Recueil math. Moscou*, **32** (1925), 668—677.

KOLMOGOROFF, A. N., [1] Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, *Fundamenta Math.*, **5** (1924), 96—97.

MENCHOFF, D., [1] Sur les séries de fonctions orthogonales (Première partie), *Fundamenta Math.*, **4** (1923), 82—105; [2] Sur les séries de fonctions orthogonales bornées dans leur ensemble, *Recueil math. Moscou*, **3** (43) (1938), 103—120; [3] Sur les séries de fonctions orthogonales, Deuxième partie, *Fundamenta Math.*, **8** (1926), 56—108.

RADEMACHER, H., [1] Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen*, **87** (1922), 112—138.

TANDORI, K., [1] Quelques évaluations sur les fonctions orthogonales, *Comptes Rendus de l'Acad. Sci. Paris*, **244** (1957), 836—838; [2] Sur les moyennes de Cesàro des séries orthogonales, *ebenda*, **244** (1957), 993—995; [3] Sur les constantes de Lebesgue des systèmes de fonctions orhogonales et normées, *ebenda*, **244** (1957), 1128—1130; [4] Über die Cesàrosche Summierbarkeit der orthogonalen Reihen, *Acta Sci. Math.*, **14** (1951-52), 85—95.

ZYGMUND, A., [1] *Trigonometrical series* (Warszawa-Lwów, 1935); [2] Sur l'application de la première moyenne arithmétique dans la théorie des séries de fonctions orthogonales, *Fundamenta Math.*, **10** (1927), 356—362.

(Eingegangen am 5. April 1957.)