Über die Bedeutung der strukturellen Eigenschaften einer Funktion für die Konvergenz ihrer Orthogonalentwicklungen.

Von G. ALEXITS und D. KRÁLIK in Budapest.

1. Bei Reihenentwicklungen nach Orthogonalfunktionen betrachtet man oft Sätze von folgendem Typus: Sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein im Intervall $[a, b]$ vorgegebenes Orthonormalsystem; gilt für die reellen Zahlen $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ die Beziehung

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \lambda(n) < \infty$$

mit einer positiven, wachsenden und nach ∞ strebenden Faktorfolge $\lambda(n)$, so ist die Reihe

$$(2) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

auf einer Menge E konvergent bzw. summierbar (nach irgendeiner Summationsart). Eine Konvergenz- bzw. Summierbarkeitsbedingung von der Form (1) wollen wir im folgenden eine *Koeffizientenbedingung* nennen.

Eine wohlbekannte Koeffizientenbedingung ist z. B.

$$(3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 (\log n)^2 < \infty,$$

aus welcher die Konvergenz jeder Orthogonalreihe (2) fast überall folgt (RADEMACHER [14] und MENCHOFF [10]). Die Koeffizientenbedingung

$$(4) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} c_n^2 (\log \log n)^2 < \infty$$

sichert die (C, α)-Summierbarkeit fast überall jeder Orthogonalreihe (2) für alle $\alpha > 0$ (MENCHOFF [11] und KACZMARZ [7]).

Für trigonometrische Reihen kann (3) durch die schwächere Bedingung

$$(5) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \log n < \infty$$

ersetzt werden (KOLMOGOROFF—SELIVERSTOFF [8] und PLESSNER [13]). Ähnliches läßt sich auch für eine breite Klasse von Orthogonalpolynomentwicklungen behaupten (B. SZ.-NAGY [15]).

Diese Koeffizientenbedingungen sagen über die Struktur der in die Orthogonalreihe (2) entwickelten Funktion $f(x)$ unmittelbar nichts aus. Daher erhebt sich die Frage, ob es sich eine nur auf die entwickelte Funktion $f(x)$ beziehende *Strukturbedingung* angeben läßt, welche die Koeffizientenbedingung (1) ersetzen könnte, oder mit ihr sogar gleichwertig wäre, und somit die Konvergenz bzw. Summierbarkeit der Entwicklung (2) unmittelbar aus den Eigenschaften der Funktion $f(x)$ abzulesen ermöglichte.

Im Fall spezieller Orthogonalsysteme kennt man derartige Strukturbedingungen. So z. B. haben ALEXITS [1] und STEČKIN [16] unabhängig voneinander gezeigt, daß die Koeffizientenbedingung (5) für Fourierreihen mit folgender Strukturbedingung vollkommen äquivalent ist: Es gibt eine positive, monoton wachsende Funktion $\Phi(x)$ mit der Eigenschaft

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\,\Phi(x)} < \infty, \tag{6}$$

so daß für den quadratischen Stetigkeitsmodul[1] $\omega_2(\delta, f)$ von $f(x)$ die Beziehung

$$\omega_2(\delta, f) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi(1/\delta)}}\right) \tag{7}$$

besteht. Diese und auch manche andere Strukturbedingungen haben über die entsprechende Koeffizientenbedingung den Vorteil, daß sie lokalisiert werden können. Wenn nämlich die Funktion $f(x)$ nur über einem Teilintervall $[\alpha, \beta]$ von $[0, 2\pi]$ quadratisch integrierbar ist, und nur der „lokale" quadratische Stetigkeitsmodul

$$\omega_2(\delta, f; \alpha, \beta) = \sup_{|h| \leqq \delta} \left\{ \int_\alpha^\beta [f(x+h) - f(x)]^2\, dx \right\}^{1/2}$$

die Bedingungen (6) und (7) erfüllt, so konvergiert die Fourierreihe von $f(x)$ im Intervall $[\alpha, \beta]$ fast überall, obzwar in diesem Fall auch $\sum_{n=1}^\infty (a_n^2 + b_n^2) = +\infty$ sein kann (ALEXITS [1], STEČKIN [16]). Mit der Bedingung (5) ist auch die Strukturbedingung

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[f(x+t) - f(x-t)]^2}{t}\, dt\, dx < \infty$$

---

[1]) $\omega_2(\delta, f) = \sup_{|h| \leqq \delta} \left\{ \int_0^{2\pi} [f(x+h) - f(x)]^2\, dx \right\}^{1/2}.$

äquivalent (PLESSNER [13]), welche ebenfalls lokalisiert werden kann (ULJANOV [18]). Strukturbedingungen von ähnlichem Typ für die Konvergenz von Orthogonalpolynomentwicklungen haben KOLMOGOROFF [9], ALEXITS [2] und ULJANOV [17] angegeben.

Im folgenden wollen wir die Frage der Ersetzbarkeit der Koeffizientenbedingung (1) durch eine entsprechende Strukturbedingung ganz allgemein betrachten, um dadurch den Kern der ähnlichen speziellen Untersuchungen herauszubekommen. Die bisher erzielten speziellen Ergebnisse sind in unseren Resultaten als Korollare enthalten. Natürlich gibt unsere Untersuchung auch zur Aufstellung weiterer Strukturbedingungen Anlaß.

2. Es sei $\lambda(x)$ eine für alle genügend große x definierte positive, monoton wachsende, von unten konkave Funktion; wir betrachten die Reihe

$$\sum_{n=k_0}^{\infty} c_n^2 \lambda(n) \qquad \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty\right), \tag{8}$$

wo k_0 eine entsprechend gewählte natürliche Zahl ist. Wegen

$$\lambda(n) = \int_{k_0}^{n} \lambda'(x)\, dx + \lambda(k_0)$$

läßt sich

$$\begin{aligned} \sum_{n=k_0}^{\infty} c_n^2 \lambda(n) &= \sum_{n=k_0}^{\infty} c_n^2 \int_{k_0}^{n} \lambda'(x)\, dx + \lambda(k_0) \sum_{n=k_0}^{\infty} c_n^2 \leqq \sum_{n=k_0}^{\infty} c_n^2 \sum_{\nu=k_0}^{n} \lambda'(\nu) + O(1) = \\ &= \sum_{\nu=k_0}^{\infty} \lambda'(\nu) \sum_{n=\nu}^{\infty} c_n^2 + O(1) \end{aligned} \tag{9}$$

schreiben. Handelt es sich um ein Orthonormalsystem $\{\varphi_n(x)\}$, bei dem die Beziehung

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \varphi_k(x) \right\|_2 = \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2} = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)\right) \tag{10}$$

besteht, so folgt hieraus, daß die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=k_0}^{\infty} \lambda'(\nu) \cdot \omega_2^2\left(\frac{1}{\nu}, f\right) \tag{11}$$

die Konvergenz von (8) nach sich zieht. Die Reihe (11) und das Integral

$$\int_{k_0}^{\infty} \lambda'(x)\, \omega_2^2\left(\frac{1}{x}, f\right) dx$$

sind aber gleichzeitig konvergent oder divergent; aus der Konvergenz dieses Integrals folgt also die Bedingung (1). Hiemit ist der folgende Satz bewiesen:

Satz 1. *Erfüllt das Orthonormalsystem $\{\varphi_n(x)\}$ die Beziehung* (10), *gilt ferner für ein $f \in L^2(a, b)$ die Strukturbedingung*

$$\omega_2(\delta, f) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi(1/\delta)}}\right) \tag{12}$$

mit einem wachsenden $\Phi(x) > 0$, für welches

$$\int_1^\infty \frac{\lambda'(x)}{\Phi(x)}\,dx < \infty \tag{13}$$

ist, so ist auch die Koeffizientenbedingung (1) *erfüllt; also folgt aus* (12) *und* (13) *die Konvergenz bzw. Summierbarkeit der Entwicklung* (2) *in denselben Punkten, in welchen sie aus* (1) *gefolgert werden kann.*

Im Fall des trigonometrischen Systems kann man die Gültigkeit der Beziehung (10) leicht einsehen, so daß hier (1) stets durch eine entsprechende Strukturbedingung ersetzt werden kann. In diesem Fall läßt sich sogar mehr behaupten:

Satz 2. *Im Fall des trigonometrischen Systems sind die Koeffizientenbedingung* (1) *(mit $c_n^2 = a_n^2 + b_n^2$) und die Strukturbedingung* (12), (13) *vollkommen äquivalent.*

In diesem Fall besteht nämlich die Ungleichung

$$\omega_2^2\left(\frac{1}{n}, f\right) \leqq \frac{8\pi}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \sum_{\nu=k}^{\infty} c_\nu^2$$

(vgl. z. B. [1], oder [16]). Wir haben daher

$$\sum_{n=k_0}^{\infty} \lambda'(n)\, \omega_2^2\left(\frac{1}{n}, f\right) \leqq 8\pi \sum_{n=k_0}^{\infty} \frac{\lambda'(n)}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \sum_{\nu=k}^{\infty} c_\nu^2 = 8\pi \sum_{\nu=k_0}^{\infty} \nu \sum_{k=\nu}^{\infty} c_k^2 \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{\lambda'(n)}{n^2} + O(1).$$

Wegen der Konkavität der Funktion $\lambda(x)$ ist $\lambda'(x)$ monoton abnehmend, folglich ist

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{\lambda'(n)}{n^2} \leqq \lambda'(\nu) \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leqq \frac{2\lambda'(\nu)}{\nu},$$

woraus

$$\sum_{n=k_0}^{\infty} \lambda'(n)\, \omega_2^2\left(\frac{1}{n}, f\right) \leqq 16\pi \sum_{\nu=k_0}^{\infty} \lambda'(\nu) \sum_{n=\nu}^{\infty} c_n^2 + O(1)$$

folgt. Daraus ergibt sich wegen (9)

$$\sum_{n=k_0}^{\infty} \lambda'(n)\, \omega_2^2\left(\frac{1}{n}, f\right) \leqq O(1) \sum_{n=k_0}^{\infty} c_n^2 \lambda(n) + O(1),$$

d. h. die Strukturbedingung ist eine Folge der Koeffizientenbedingung, w. z. b. w.

Wenn für die Entwicklung (2) die Beziehung (10) und außerdem noch das Lokalisationsprinzip[2]) gültig ist, so kann der Satz 1 auch in einer lokalisierten Form ausgesprochen werden:

Bezeichne E die Menge jener Punkte von $[a, b]$, *in welchen die Konvergenz von* (2) *im Fall des Erfülltseins der Koeffizientenbedingung* (1) *gefolgert werden kann. Besteht für die Entwicklung* (2) *die Beziehung* (10) *und ist für sie auch das Lokalisationsprinzip gültig, erfüllt ferner die Funktion* $f(x)$ *in einem Teilintervall* $[\alpha, \beta]$ *von* $[a, b]$ *die Bedingung*

$$\omega_2(\delta, f; \alpha, \beta) = \sup_{|h| \leq \delta} \left\{ \int_\alpha^\beta [f(x+h) - f(x)]^2 \, dx \right\}^{1/2} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi(1/\delta)}}\right),$$

wo $\Phi(x)$ *der Bedingung* (13) *genügt, so konvergiert* (2) *in den Punkten des Durchschnittes* $E \cap [\alpha, \beta]$.

Der Beweis beruht auf der Erweiterbarkeit von der in $[\alpha, \beta]$ betrachteten Funktion $f(x)$ zu einer in $[a, b]$ definierten Funktion $g(x)$, welche die Strukturbedingung in $[a, b]$ erfüllt (vgl. z. B. [1]). Das Übrige ergibt sich dann durch Anwendung des Lokalisationsprinzips und des Satzes 1.

Aus diesen allgemeinen Sätzen ergeben sich die bekannten speziellen Sätze als Korollare: Im Fall des trigonometrischen Systems setze man z. B. $\lambda(x) = \log x$, dann erhält man einerseits nach Satz 2 die Äquivalenz der Koeffizientenbedingung (5) und der Strukturbedingung (6), (7), andererseits nach dem soeben bewiesenen die lokalisierte Strukturbedingung von ALEXITS [1] und STEČKIN [16]. — Setzt man $\lambda(x) = x$, so folgt aus Satz 2 die Äquivalenz der Koeffizientenbedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2 + b_n^2) < \infty \tag{14}$$

und der Strukturbedingung

$$\int_1^{\infty} \omega_2^2\left(\frac{1}{x}, f\right) dx < \infty. \tag{15}$$

Sind a_n und b_n die Fourierkoeffizienten einer auf der Peripherie des Einheitskreises definierten stetigen Funktion $f(x)$, so ist das Erfülltsein von (14) für

---

[2]) Wir verstehen unter dem Ausdruck „für (2) gilt das Lokalisationsprinzip" die Gültigkeit des folgenden Satzes: Ist $f(x) = g(x)$ in einem Teilintervall I von $[a, b]$, so sind die Entwicklungen (2) von $f(x)$ und $g(x)$ in I äquikonvergent.

die Anwendbarkeit des Dirichletschen Prinzips auf den Einheitskreis notwendig und hinreichend (s. z. B. [5]), also ist (15) die notwendige und hinreichende Strukturbedingung für die Anwendbarkeit des Dirichletschen Prinzips auf die stetige Randfunktion $f(x)$ des Einheitskreises (FREUD und KRÁLIK [6]).

3. Sei $\varrho(x) \geqq 0$ eine in $[a, b]$ L-integrierbare Funktion, die höchstens auf einer Nullmenge verschwindet. Die Belegungsfunktion $\varrho(x)$ bestimmt bekanntlich (bis auf das Vorzeichen) eindeutig ein Orthonormalpolynomsystem. Bezeichne jetzt $\{\varphi_n(x)\}$ dieses System; dann gilt bekanntlich für die Entwicklung einer stetigen Funktion $f(x)$ nach dem System $\{\varphi_n(x)\}$ der Jacksonsche Satz

$$|f(x)-P_n(x)| \leqq C_1 \cdot \omega\left(\frac{1}{n}, f\right),$$

wenn $P_n(x)$ das im Tschebyschewschen Sinn am besten approximierende Polynom $(n-1)$-ten Grades, $\omega\left(\frac{1}{n}, f\right)$ den Stetigkeitsmodul[3]) von $f(x)$ und C_1 eine absolute Konstante bedeutet. Es ist also

$$\left\| f(x)-\sum_{k=0}^{n-1} c_k \varphi_k(x) \right\|_2 \leqq \left\{ \int_a^b \varrho(x)\,[f(x)-P_n(x)]^2 dx \right\}^{1/2} \leqq C_2 \cdot \omega\left(\frac{1}{n}, f\right).$$

Daraus folgt durch Anwendung von (9) genau wie im Beweis des Satzes 1 der

Satz 3. *Genügt $\omega(\delta, f)$ der Strukturbedingung* (12), (13), *so folgt daraus die Konvergenz bzw. Summierbarkeit der Orthogonalpolynomentwicklung* (2) *in denselben Punkten, welche durch die Koeffizientenbedingung* (1) *bestimmt werden.*

Aus diesem Satz ergibt sich als unmittelbares Korollar die folgende Behauptung: *Ist die Strukturbedingung*

$$\omega(\delta, f) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi(1/\delta)}}\right) \tag{16}$$

mit einem $\Phi(x)$ erfüllt, für welches

$$\int_3^\infty \frac{\log x\,(\log\log x)^{1+\varepsilon}}{x\,\Phi(x)}\,dx < \infty \qquad (\varepsilon > 0)$$

gilt, so konvergiert die Orthogonalpolynomentwicklung (2) *in jeder Anordnung*

---

[3]) $\omega(\delta, f) = \sup_{|x'-x''| \leqq \delta} |f(x')-f(x'')|$.

fast überall (ULJANOV [17]). Man hat ja nur $\lambda(x) = \log^2 x \cdot (\log\log x)^{1+\varepsilon}$ zu setzen und einen bekannten Satz von ORLICZ [12] anzuwenden. — Setzt man $\lambda(x) = \log^2 x$, so ergibt sich als Korollar der folgende Satz von KOLMOGOROFF [9]: *Ist die Strukturbedingung* (16) *mit einem* $\Phi(x)$ *erfüllt, für welches*

$$(17) \qquad \int_3^\infty \frac{\log x}{x\,\Phi(x)}\,dx < \infty$$

gilt, so konvergiert die Orthogonalpolynomentwicklung (2) *fast überall.* — Ein weiteres, bisher explizite vielleicht nicht ausgesprochenes Korollar ist das folgende: *Ist die Strukturbedingung* (16) *mit einem* $\Phi(x)$ *erfüllt, für welches*

$$(18) \qquad \int_3^\infty \frac{\log\log x}{\Phi(x)\,x\log x}\,dx < \infty$$

gilt, so ist die Orthogonalpolynomentwicklung (2) *der stetigen Funktion* $f(x)$ *fast überall* $(C, \alpha > 0)$*-summierbar.*

Sowohl das letzte wie auch das vorangehende Korollar (Kolmogoroffscher Satz) kann lokalisiert werden, wenn das Orthonormalpolynomsystem $\{\varphi_n(x)\}$ in einem Teilintervall $[\alpha, \beta]$ von $[a, b]$ gleichmäßig beschränkt ist. Dann gilt nämlich, wie leicht ersichtlich, das Lokalisationsprinzip für $\{\varphi_n(x)\}$ und daher kann man den Gedankengang der lokalisierten Form des Satzes 1 mit $\omega(\delta, f; \alpha, \beta)$ statt $\omega_2(\delta, f; \alpha, \beta)$ anwenden:

Ist das Orthonormalpolynomsystem $\{\varphi_n(x)\}$ *in* $[\alpha, \beta]$ *beschränkt und gilt für den in* $[\alpha, \beta]$ *definierten Stetigkeitsmodul* $\omega(\delta, f; \alpha, \beta)$ *die Strukturbedingung* (16) *mit einem* $\Phi(x)$, *das* (17) *bzw.* (18) *erfüllt, so ist die Entwicklung* (2) *der in* $[\alpha, \beta]$ *stetigen, sonst nur bezüglich* $\varrho(x)$ *quadratisch integrierbaren Funktion* $f(x)$ *in* $[\alpha, \beta]$ *fast überall konvergent bzw.* $(C, \alpha > 0)$*-summierbar.*[4])

4. Bekanntlich folgt die Konvergenz fast überall der Reihe (2) schon aus der Bedingung

$$(19) \qquad \sum_{n=1}^\infty c_n^2 \log n < \infty,$$

falls das Orthonormalpolynomsystem $\{\varphi_n(x)\}$ in jedem ganz im Inneren von (a, b) liegenden abgeschlossenen Teilintervall $[\alpha, \beta]$ gleichmäßig beschränkt ist [15]. Daher gilt nach Satz 3 die folgende Behauptung: *Ist das Orthonormalpolynomsystem* $\{\varphi_n(x)\}$ *in* $[\alpha, \beta]$ *beschränkt, genügt ferner* $\omega(\delta, f)$ *der Bedingung*

---

[4]) Setzt man statt der Beschränktheit von $\{\varphi_n(x)\}$ in $[\alpha, \beta]$ die Beschränktheit im ganzen Intervall $[a, b]$ voraus, so läßt sich die Voraussetzung der quadratischen Integrierbarkeit von $f(x)$ in $[a, b]-[\alpha, \beta]$ bezüglich $\varrho(x)$ durch die gewöhnliche Integrierbarkeit bezüglich $\varrho(x)$ ersetzen.

(16) *mit einem $\Phi(x)$, welches die unter* (6) *geforderte Eigenschaft besitzt, so konvergiert* (2) *fast überall.* Auf Grund des Lokalisationsprinzips können wir diese Behauptung auch in lokalisierter Form aussprechen, womit wir einen Konvergenzsatz von ALEXITS [2] wesentlich verallgemeinern:

Satz 4. *Ist das Orthonormalpolynomsystem $\{\varphi_n(x)\}$ in einem ganz im Inneren von (a, b) liegenden abgeschlossenen Teilintervall $[\alpha, \beta]$ beschränkt, genügt ferner der auf $[\alpha, \beta]$ bezogene Stetigkeitsmodul $\omega(\delta, f; \alpha, \beta)$ der $L^2_{\varrho(x)}$-integrierbaren Funktion $f(x)$ der Bedingung* (16) *mit einem der Bedingung* (6) *genügenden $\Phi(x)$, so konvergiert die Orthogonalpolynomentwicklung* (2) *von $f(x)$ in $[\alpha, \beta]$ fast überall.*

Es sei $g(x)$ die Funktion, die in $[\alpha, \beta]$ mit $f(x)$ zusammenfällt und in den Intervallen $[a, \alpha)$, $(\beta, b]$ die konstanten Werte $f(\alpha)$ bzw. $f(\beta)$ annimmt. Der Stetigkeitsmodul $\omega(\delta, g; a, b)$ erfüllt die für $\omega(\delta, f; \alpha, \beta)$ geforderte Strukturbedingung im ganzen Intervall $[a, b]$; nach Satz 3 besteht also für die Entwicklungskoeffizienten von $g(x)$ die Beziehung (19), woraus die Konvergenz der Entwicklung von $g(x)$ in $[\alpha, \beta]$ fast überall folgt (vgl. [4] und [15]). Die Konvergenz der Entwicklung von $f(x)$ fast überall in $[\alpha, \beta]$ ergibt sich mithin aus dem Lokalisationsprinzip.

Es ist zu bemerken, daß wir uns von der Stetigkeit der Funktion $f(x)$ in $[\alpha, \beta]$ befreien können, wenn wir die Belegungsfunktion $\varrho(x)$ durch die Bedingung

$$0 \leqq \varrho(x) \leqq \frac{K}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \tag{20}$$

einschränken, wobei K eine Konstante bedeutet. Durch die Transformation $x = \frac{b-a}{2} \cdot \cos \vartheta + \frac{b+a}{2}$ erhalten wir die Funktion

$$g(\vartheta) = f\left(\frac{b-a}{2} \cdot \cos \vartheta + \frac{b+a}{2}\right),$$

auf welche wir einen Gedankengang von ALEXITS [3] anwenden dürfen, woraus sich die folgende Verschärfung der Behauptung des Satzes 4 ergibt: *Genügt $\varrho(x)$ der Bedingung* (20) *und ist $\{\varphi_n(x)\}$ in $[\alpha, \beta]$ beschränkt, erfüllt ferner $\omega_2(\delta, g; \beta', \alpha')$ die Bedingung* (7) *mit einem durch* (6) *eingeschränkten $\Phi(x)$, wobei α', β' die auf der ϑ-Achse liegenden Bildpunkte von α, β sind, so konvergiert die Entwicklung von $f(x)$ in $[\alpha, \beta]$ fast überall.*

Literaturverzeichnis.

[1] G. Alexits, Über den Einfluß der Struktur einer Funktion auf die Konvergenz fast überall ihrer Fourierreihe, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **4** (1953), 95—101.

[2] ——— Über die Konvergenz der Orthogonalpolynomentwicklungen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), 1—4.

[3] ——— Sur la convergence et la sommabilité presque partout des séries de polynomes orthogonaux, *Acta Sci. Math. Szeged*, **12B** (1950), S. 223—225.

[4] ——— Sur la convergence des séries de polynomes orthogonaux, *Commentarii Math. Helv.*, **16** (1944), 200—208.

[5] R. Courant, *Dirichlet's Principle, Conformal Mapping and Minimal Surfaces* (New-York, 1950).

[6] G. Freud - D. Králik, Über die Anwendbarkeit des Dirichletschen Prinzips für den Kreis, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **7** (1956), 411—416.

[7] S. Kaczmarz, Über die Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Math. Zeitschrift*, **26** (1927), 99—105.

[8] A. Kolmogoroff—G. Seliverstoff, Sur la convergence des séries de Fourier, *Comptes Rendus Acad, Sci. Paris*, **178** (1925), 303—305 und *Rendiconti Acad. Lincei Roma*, **3** (1926), 307—310.

[9] А. Н. Колмогоров, О сходимости рядов по ортогональным полиномам, Доклады Акад. Наук СССР, **1** (1934), 291—294.

[10] D. Menchoff, Sur les séries de fonctions orthogonales. I, *Fund. Math.*, **4** (1923), 82—105.

[11] ——— Sur les séries de fonctions orthogonales. II, *Fund. Math.*, **8** (1926), 56—108.

[12] W. Orlicz, Zur Theorie der Orthogonalreihen, *Bull. Intern. Acad. Polonaise, classe A des Sciences math. et nat.*, 1927, 81—115.

[13] A. Plessner, Über Konvergenz von trigonometrischen Reihen, *Journal f. reine u. angew. Math.*, **155** (1926), 15—25.

[14] H. Rademacher, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen*, **87** (1922), 112—138.

[15] B. Sz.-Nagy, Über die Konvergenz von Reihen orthogonaler Polynome, *Math. Nachrichten*, **4** (1951), 50—55.

[16] С. Б. Стечкин, О теореме Колмогорова—Селиверстова, Известия Акад. Наук СССР, **17** (1953), 499—512.

[17] П. Л. Ульянов, О безусловной сходимости почти всюду, Матем. Сборник, **40** (1956), 95—100.

[18] П. Л. Ульянов, Обобщение теоремы Марцинкевича, Известия Акад. Наук СССР, **17** (1953), 513—524.

(Eingegangen am 14. April 1957.)