Bibliographie.

B. L. van der Waerden, Erwachende Wissenschaft, Ägyptische, Babylonische und Griechische Mathematik. Aus dem Holländischen übersetzt von H. Habicht, mit Zusätzen vom Verfasser. 488 Seiten, Basel—Stuttgart, Birkhäuser-Verlag, 1956.

Der bekannte Verf. der „Modernen Algebra" veröffentlichte als leidenschaftlich interessierter Historiker der Mathematik schon mehrere wichtige Beiträge zur Geschichte der exakten Wissenschaften im Altertum. Vorliegendes Werk (1950 holländisch und 1954 auch englisch herausgebracht) umfaßt die Geschichte der ägyptischen, babylonischen und griechischen Mathematik bis etwa zur Mitte des 6. Jh. Der Schwerpunkt der Behandlung fällt — wie es auch im voraus betont wird (S. 16 f.) — auf die Griechen, nach dem ja bei ihnen zuerst die Mathematik zur deduktiven Wissenschaft wurde. Der erste Teil des Buches (S. 23—130) faßt unsere gegenwärtigen Kenntnisse über die altorientalische Mathematik zusammen. Innerhalb dessen überblickt ein Sonderkapitel das Problem „Zahlensysteme, Ziffern und Rechenkunst" (S. 59—99) bis in das 16. Jh. hinein. Die scheinbare Abschweifung wird durch die Tatsache begründet, daß Zahlenschreibweise und zugehörige Rechentechnik von sehr großer Bedeutung für die Entwicklung der Mathematik sind. — Interessant, daß nach der Ansicht des Verf. einerseits der verhältnismäßig hohe Entwicklungsstand der Zahlenschreibweise und Rechentechnik in Babylonien die höhere Entfaltung der Mathematik selbst für diejenigen Griechen erleichterte, die die orientalische Erbschaft übernahmen, andrerseits aber eben „technische Unzulänglichkeiten" auch zum Steckenbleiben, ja zum Verfall der griechischen Wissenschaft beitrugen (S. 440 f.). — In der Tat sind die großen Fortschritte der Mathematik seit der Antike zum wesentlichen Teil mit dadurch bedingt, daß es gelang einen brauchbaren, leistungsfähigen Formalismus zu schaffen, wie es einen in der Antike noch nicht gab.

Leider, ist es hier nicht möglich, die neuen Ergebnisse des ausgezeichneten und sehr reichhaltigen Buches alle im einzelnen zu besprechen, oder sie auch nur aufzuzählen. Van der Waerdens Zusammenfassung wird ja voraussichtlich noch für lange Zukunft Grundlage jeder weiteren historischen Forschung auf diesem Gebiete. Ein Rezensent der holländischen Ausgabe hat übrigens schon zusammengestellt, was in der Arbeit gegenüber früheren Darstellungen der antiken Mathematik neu ist. Überholt ist diese ältere Rezension (O. Becker, *Gnomon*, 1951) eigentlich nur deswegen, weil der Verf. auch seitdem sein Buch vervollständigt hatte. Man denke dabei nicht nur an die Zusätze, Ergänzungen und kleinere Verbesserungen, die zum Teil von der Kritik verlangt wurden, sondern noch mehr an jene tiefgreifende Auseinandersetzung mit der anderweitigen Forschung, die für den Verf. ermöglicht, seine Ergebnisse immer mehr zu vervollständigen.

Der Verf. wendet sich mit besonderem Interesse der Frage zu, wie sich die praktisch-empirischen Kenntnisse der altorientalischen Völker bei den Griechen zu einer theoretischen Wissenschaft entwickelten. Die frühen Ansätze einer solchen Entwicklung werden jedesmal mit Recht hervorgehoben. So heißt es z. B. im Zusammenhang mit den sog. Hau-Rechnungen der Ägypter (die also *nicht* Problemen aus der Praxis entspringen): „Sie zeugen von dem *rein theoretischen Interesse* der ägyptischen Rechenmeister. Sie sind offensichtlich von solchen Leuten ausgedacht, die Spaß am reinen Rechnen hatten und ihren Schülern schwere Aufgaben zur Übung aufgeben wollten. Wie jede Kunst, so hat auch die Rechenkunst die Neigung, sich bis an ihre äußersten Grenzen zu entfalten." Ein andermal wird die Lückenhaftigkeit unserer Kenntnisse in bezug auf Babylonien betont: „Schade, daß fast alle Texte nur Aufgaben und Lösungen, aber keine Herleitungen enthalten. Man gibt die Lösung wie eine Art Rezept ohne zu sagen, wie man sie gefunden hat. *Und doch müßen diese Rezepte irgendwie hergeleitet sein, und die Lehrer müßen ihren Schülern gesagt haben, wie sie Unbekannte aus Gleichungen auflösen und eine Unbekannte durch eine andere ausdrücken konnten*". Die Vermutung wird wohl zutreffen, doch müßte man auf der anderen Seite umso schärfer betonen, daß solche grundlegenden Begriffe wie *Satz*, *Beweis*. *Definition*, *Axiom* und *Postulat* in der vorgriechischen Wissenschaft allem Anschein nach noch gar nicht existierten. Wie kam es dazu, daß man solche Begriffe schuf? — Diese Frage wird im Buch nicht gestellt, und doch kann man eben nach VAN DER WAERDENS Vorbild auch solche Fragen anpacken, nur muß man dazu die Arbeit des historisch interessierten Mathematikers von der Philosophiegeschichte und der Philologie her ergänzen. Um nur ein Beispiel zu nennen: der Verf. hat in der Beurteilung der Wissenschaft von THALES wohl Recht (S. 145 f.). THALES hat seine Sätze allerdings schon *bewiesen*. Aber welcher Art seine *Beweise* gewesen sein mögen? — Schade, daß zu dieser Frage eine Arbeit von K. v. FRITZ (*Archiv f. Begriffsgesch.*, 1955) noch nicht berücksichtigt werden konnte. Man hat nämlich inzwischen wahrscheinlich machen können, daß die thaletischen Beweise noch vorwiegend *empirischer Art* sein mußten. Diese Vermutung wird auch dadurch noch erhärtet, daß der math. Terminus der Griechen für „beweisen" der Wortbedeutung nach eigentlich „zeigen", „veranschaulichen" heißt. Es hat also wohl eine Entwicklungsstufe gegeben, in der die math. Evidenz noch unmittelbar empirisch, anschaulich war. Die Forderung nach einer anderen Art (*logischer*) Evidenz wird wohl erst auf der nächsten Entwicklungsstufe ausschlaggebend.

Gewiß, hat der Verf. Recht, wenn er betont (S. 18), daß man erfolgreich Mathematik-Geschichte betreiben kann, auch ohne die klassischen Autoren im Urtext zu lesen. Aber will man auf demselben Wege, der durch ihn so gangbar gemacht wurde, weiterkommen, so wird einiges wohl auch noch die Philologie beisteuern können. VAN DER WAERDEN hat z. B. auf die logischen Mängel des 8. Euklidischen Buches hingewiesen; sein Verf. (ARCHYTAS) ränge ständig mit der Ausdrucksweise. „Es macht fast den Eindruck, als hätte er Angst, auf den glitschigen Pfaden der Logik auszurutschen" (S. 253). Dagegen rühmte er die geschlossen kompakte Einheit und Eleganz des etwas früheren 7. Buches. Nun liest man aber das 7. Buch Euklids griechisch, so wird man auch an seiner Logik manches auszusetzen haben. Was soll man z. B. zu der sehr ungeschickten Formulierung des 15. Satzes sagen — der übrigens nur ein Spezialfall von Satz 9 ist? Die historische Erklärung dieser logischen Ungeschicklichkeit könnte wohl manches Licht auf die mathematisch-philosophischen Diskussionen des 5. Jh. werfen. Und von dieser Seite her würde man auch die logische Ungeschicklichkeit von ARCHYTAS etwas anders erklären, als es VAN DER WAERDEN tut.

Hervorgehoben seinen noch — neben den sehr eindrucksvollen Euklid-Analysen — die schönen Kapitel über ARCHIMEDES und APOLLONIOS. Was den Verfall der griechischen Math. betrifft, macht der Verf. mit Recht darauf aufmerksam, wie ganz anders die Entwicklung in der Astronomie verlaufen ist. Der Rückgang der Mathematik muß also seine „inneren Ursachen" haben.

Das Buch, obwohl streng wissenschaftlich und weitere Nachforschungen anregend, ist überall allgemeinverständlich, klar und setzt nirgends mehr als die einfachste Schulmathematik voraus.

Árpád Szabó (Budapest)

V. Thébault, Parmi les belles figures de la géométrie dans l'espace (Géométrie du tétraèdre), XVI + 287 p., Paris, Vuibert, 1955.

Comme l'on le soupçonne déjà du titre, l'ouvrage n'est pas un traité au sens étroit. Le but de l'auteur est de faire passer quelques moments agréables au lecteur.

M. V. Théabult recherche depuis quarante ans les analogies existant entre la géométrie du triangle et celle du tétraèdre et arrivait à étendre de nombreuses relations du plan à l'espace. Après des rappels aux résultats de ses prédécesseurs il nous offre un receuil des principaux résultats de ses propres recherches sur le tétraèdre et les polygones gauches. Les raisonnements procèdent par assez de calculs; quant aux "belles figures", c'est le lecteur qui doit les construire.

La part la plus riche du livre est Chapitre III: Points de Lemoine, sphères d'Adams, de Tücker, de Lucas, de Hagge, l'orthopôle d'une droite.

Les résultats de l'auteur concernant des tétraèdres spéciaux (par ex. orthocentriques) franchiraient les limites du livre, mais entre les questions proposées quelques unes sont prises dans ce domaine. Il est à regretter que le livre ne contient pas une bibliographie détaillée et un index.

T. Bakos (Szeged)

E. Kamke, Mengenlehre (Sammlung Göschen, Band 999/999a), 192 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1955.

Die dritte, neugearbeitete Auflage dieses bekannten und bewährten Büchleins wurde gegenüber der zweiten Auflage (1947) mit verschiedenen Ergänzungen wesentlich erweitert: Neu ist ein Kapitel über das Rechnen mit Mengen (Formeln von Morgan, Suslin-Operation), ein Abschnitt über die Begründung der Mengenlehre, in dem unter anderem die Bedeutung des Auswahlprinzips diskutiert wird und einige Bemerkungen über die intuitionistische Mengendefinition von Brouwer gemacht werden. Neu sind ferner die §§ 34 und 35 über die Zerfällung und Zerlegung von Ordnungszahlen. In einem letzten Abschnitt werden neben der ausführlichen Behandlung des Wohlordnungssatzes die Sätze von Tukey, Hausdorff und Zorn behandelt.

Inhaltsübersicht: I. Aus den Anfängen der Mengenlehre. II. Über beliebige Mengen und ihre Kardinalzahlen. III. Bemerkung über die Begründung der Mengenlehre. IV. Über geordnete Mengen und ihre Ordnungstypen. V. Über wohlgeordnete Mengen und ihre Ordnungszahlen. VI. Der Wohlordnungssatz, verwandte Sätze und Folgerungen.

G. Fodor (Szeged)

H. Bachmann, Transfinite Zahlen (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, neue Folge, Heft 1), VII + 204 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1955.

Der vorliegende Bericht enthält deutliche und systematische Ausführungen über die Ergebnisse und Probleme der Theorie der transfiniten Zahlen (Ordnungszahlen und Mächtigkeiten). Das Zermelo—Fraenkelsche Axiomensystem der Mengenlehre bildet die Grundlage, es wird aber alles in der Sprache der naiven Mengenlehre formuliert.

In der Einleitung (Kap. I) findet man einen kurzen Abriß über die Mengenlehre und das Grundlagenproblem, über die üblichen Axiome der Mengenlehre und die fundamentalen

Definitionen der Äquivalenz, Ähnlichkeit, Wohlordnung, der transfiniten Induktion und der transfiniten Zahlen.

In Kapitel II werden behandelt: die Ordnungszahlen, stetige Funktionen von Ordnungszahlen, die ordinalen Anfangszahlen, Normalfunktionen, Iteration und kritische Zahlen und die Theorie der regressiven Funktionen.

Kapitel III beschäftigt sich mit der Arithmetik der Ordnungszahlen. Zuerst werden die arithmetischen Operationen mit Ordnungszahlen auf mengentheoretischer Weise eingeführt. Sodann folgt die funktionale Theorie der arithmetischen Operationen. In diesem Kapitel findet man noch die Polynomdarstellung der Ordnungszahlen, die höheren arithmetischen Operationen, die Theorie der Hauptzahlen, die Umkehrungen der arithmetischen Operationen, die Zerlegung einer Ordnungszahl in unzerlegbare Zahlen, die Permutationen von Folgen von Ordnungszahlen und die Theorie der vertauschbaren Ordnungszahlen.

In Kapiteln IV und V wird die Theorie der Mächtigkeiten und Kardinalzahlen dargestellt, undzwar in Kapitel IV ohne das Auswahlaxiom zu benutzen, und in Kapitel V unter Verwendung des Auswahlaxioms. Es werden behandelt: die Mächtigkeit beliebiger Mengen und ihre Arithmetik, Vergleichung von Mächtigkeiten, die Potenzmenge einer beliebigen Menge, die Kardinalzahlen und die kardinalen Anfangszahlen, Arithmetik der Kardinalzahlen, Ungleichungen für unendliche Summen und Produkte von Kardinalzahlen, Beziehungen zwischen Kardinalzahlen und Mächtigkeiten, äquivalente Formen und Konsequenzen des Auswahlaxioms, die Beths, Summen von Beths, die Alephhypothese und ihre Folgerungen.

In Kapitel VI handelt es sich, etwas weniger eingehend, um die Anwendungen der transfiniten Zahlen in der Theorie der Punktmengen, das Axiom der Hauptfolgen, die formale Darstellung von Ordnungszahlen und schließlich um einige Alternativen zum Auswahlaxiom.

Das letzte Kapitel beschäftigt sich mit den unerreichbaren Zahlen.

Zum Schluß werden ausführliche Literaturangaben zu den einzelnen Kapiteln angeführt.

G. Fodor (Szeged)

R. Courant, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Erster Band: **Funktionen einer Veränderlichen.** Dritte, verbesserte Auflage, XI + 450 Seiten. Zweiter Band: **Funktionen mehrerer Veränderlicher.** Dritte, verbesserte Auflage, XI + 468 Seiten. Berlin, Göttingen und Heidelberg, Springer-Verlag, 1955.

Courants *Vorlesungen* sind wohl schon ein klassisches Werk geworden. Dies erweist sich auch daraus, daß sie schon in dritter Auflage vorliegen und auch in andere Sprachen übersetzt wurden. Dieser Erfolg ist u. a. dem zu danken, daß es dem Verf. gelingt, dem Stoff, ohne Verzicht auf Präzision, in einer undogmatischen, lesbaren Form darzustellen und abstrakte Begriffe anschaulich zu motivieren. Er hält die Schwierigkeiten der Anfänger immer vor den Augen. Darum sind die schwierigeren und engänzenden Probleme, die man beim ersten Studium übergehen kann, nur in den Anhängen betrachtet. Charakteristisch ist im Aufbau des Materials, daß das bestimmte Integral vor der Ableitung eingeführt wird und Differential- und Integralrechnung nebeneinander zur Behandlung kommen.

Diese dritte Auflage unterscheidet sich von der zweiten hauptsächlich durch die Aufnahme einer Reihe von Zusätzen. Diese betreffen u. a. die Intervalleinschachtelung und das Zahlenkontinuum, den zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung, den Weierstraßschen Approximationssatz (nach H. Lebesgue), das Iterationsprinzip für die numerische Auflösung gewisser Gleichungen, die Bernoullischen Polynome und die Eulersche Summenformel, das Integral von Fresnel und von Dirichlet, die Integration der Fourierreihen, das isoperimetrische Problem, die Differentiation und Integration von gebrochener Ordnung, die Wellengleichung und die Maxwellschen Gleichungen im leeren Raum.

In dieser ergänzten Form werden die *Vorlesungen* von Courant gewiß einen noch größeren Einfluß auf die Ausbildung der neuen Mathematikergenerationen haben.

J. Berkes (Szeged)

Arnaud Denjoy, Articles et mémoires. Reproduits et rassemblés avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique. VII + 1108 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1955.

On trouve dans ces deux volumes de remarquable étendue un recueil complet des reproductions photographiques des articles et des mémoires, écrits avant 1955, de l'éminent analyste. Les notes préliminaires, publiées pour la plupart dans les Comptes Rendus de Paris, feront le sujet d'une collection ultérieure.

Le premier volume embrasse les ouvrages qui traitent de la théorie des fonctions d'une variable complexe, le second comprend ceux qui s'occupent des fonctions réelles et des questions de la théorie des ensembles, en particulier de la topologie. On y trouve encore un article de T. J. Boks, écrit sous la direction d'A. Denjoy, et trois notices de l'auteur qui donnent un aspect général sur son oeuvre, datant des années 1921, 1934 et 1942.

Dans nos jours, une grande partie des résultats de l'auteur sont à trouver dans les monographies sur la théorie des fonctions réelles, il y en a même qui font partie des manuels. Tous les analystes conviendront de ce que ces faits ne rendent pas superflu l'étude des publications originales; celui qui désire étudier la genèse des idées et s'enfoncer dans la profondeur de celles-ci, aura à les consulter dans la forme dans laquelle l'auteur même les a présentées. On ne peut donc que saluer avec joie la parution de ce recueil qui facilite l'accès des travaux d'un des plus illustres analystes de notre époque.

Á. Császár (Budapest)

R. W. Weitzenböck, Der vierdimensionale Raum (Wissenschaft und Kultur, Bd. 10), 223 Seiten, mit 54 Figuren, Basel und Stuttgart, Birkhäuser Verlag, 1956.

Die Entwicklung der Mathematik und der Physik in den letzten hundert Jahren — wir denken dabei insbesondere an die Relativitätstheorien von Einstein — hat unsere wissenschaftliche Auffassung des Raumes auf grundlegende Weise umgestaltet. Die neu entstandenen Begriffe, wie der der mehrdimensionalen Räume, sind in der Weiterentwicklung der Geometrie von entscheidender Bedeutung geworden, die man auch in der mathematischen Beschreibung der Naturgesetze nicht entbehren kann. Die abstrakten Begriffe der Wissenschaft sind sogar gewissermaßen auch in die „öffentliche Meinung" eingedrungen; über die „vierte Dimension" hat man z. B. eine Unmenge von Werken, Artikeln, Notizen geschrieben, von wissenschaftlichen oder halbwissenschaftlichen bis zu scherzhaften im Stil der „Fliegenden Blätter."

Verf. war ein aktiver Teilnehmer der großen wissenschaftlichen Arbeit, die zur Ausgestaltung der neuen Begriffe geführt hat, und so nimmt der Mathematiker-Leser sein Buch mit gesteigertem Interesse in die Hände. Das Buch — eine Entwicklung und Umarbeitung des 1929 bei Vieweg in Braunschweig unter demselben Titel erschienenen Werkes — ist aber in erster Reihe dem gebildeten großen Publikum bestimmt, sein Hauptziel ist die Neugier dieses Publikums zu vertiefen und zu befriedigen. Immerhin wird vom Leser eine gewisse Geschultheit im mathematischen Denken gefordert, eine Vertrautheit mit einigen mathematischen Begriffen und Sätzen (auf S. 107/108 wird z. B. die Differentialgleichung der geodätischen Linien in einer gekrümmten Metrik angeführt). Doch kann man ja die Mathematik ohne Mathematik — auf dem „Wege der Könige" nicht kennen lernen. Jedes Werk, das die Wissenschaft verbreiten will (ich habe absichtlich nicht „popularisieren" gesagt), steht vor einem Dilemma: entweder bleibt man an der Oberfläche um völlig verständlich zu sein, oder aber spricht man auch über tiefer liegende Dinge auf die Gefahr hin, nicht recht verstanden zu werden.

Kapitel I *(Die Grundlagen)* dient zur Vorbereitung. Sich vorwiegend auf die koordinatengeometrische Methode stützend, zeigt Verf., daß der vierdimensionale Raum zwar eine abstrakte mathematische Konstruktion ist, doch die Struktur gewisser konkreten Mannigfaltigkeiten spiegelt.

Kapitel II *(Das Feenreich der Geometer)* umfaßt ein recht beträchtliches Erkenntnismaterial. Solche grundlegende Begriffe, wie die der linearen Unterräume des vierdimensionalen Raumes, ihrer Durchschnitts- und Verbindungsräume, ihrer Parallelheit und Orthogonalität usw. werden auf klare Weise eingeführt und verständlich gemacht. Es wird auch die Möglichkeit einer Darstellung in der zweidimensionalen Ebene besprochen. Die vierdimensionalen Simplexe und Polytope sowie auch einige nichtlineare Gebilde werden eingehend behandelt. Man spricht sogar auch über die Einbettung der dreidimensionalen hyperbolischen Geometrie in den vierdimensionalen euklidischen Raum.

Kapitel III *(Raum und Zeit)* behandelt die Entwicklung des Begriffs des vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuums, und die Raumbegriffe der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie. Es wird betont, daß die Einsteinsche Geometrie nur ein spezieller Fall von allgemeineren Differentialgeometrien ist.

Die beiden letzten Kapitel (IV. *Der R_4 und andere Wissensgebiete*, V. *Der R_4 in der phantastischen Literatur)* sind zwar vielleicht eine zerstreuende Lektüre, haben aber mit der Wissenschaft nichts zu tun: sie zeigen nur, zu welchen Phantasmagorien und Dummheiten das Mißverständnis wissenschaftlicher Begriffe unter den Laien führen kann.

F. Kárteszi (Budapest)

Carl Ludwig Siegel, Vorlesungen über Himmelsmechanik (Grundlehren d. math. Wissenschaften, Bd. 85), VIII + 212 Seiten, Berlin, Springer-Verlag, 1956.

Wie auch im Vorworte betont wird, hat der Verfasser bei seinen Vorlesungen hauptsächlich den Zweck verfolgt, diejenigen Sätze und Methoden der Theorie der Differentialgleichungen herauszuarbeiten, welche zur Darstellung der Sundmannschen Ergebnisse, der periodischen Lösungen und der Stabilitätsfragen in der Himmelsmechanik nötig sind.

Das erste Kapitel bringt die notwendigen Vorkenntnisse aus der Transformationstheorie der kanonischen Differentialgleichungen. Dann wird durch eine von Levi-Cività herrührende Transformation der binäre Stoß beim Dreikörperproblem regularisiert. Mit den so gewonnenen Hilfsmitteln gibt dann der Verf. eine bequem lesbare Darstellung der Sundmannschen Ergebnisse zum Dreikörperproblem. Zuerst werden die Hilfssätze über die untere Grenze des Dreieckumfanges und die obere Grenze der kleinsten Geschwindigkeit hergeleitet. Diese Hilfssätze genügen dann zum Beweis des Hauptsatzes, welcher besagt, daß — im Falle eines nichtverschwindenden Dralles — die Koordinaten der drei Körper und die Zeit sich in konvergente Potenzreihen einer Hilfsvariable entwickeln lassen.

Das zweite Kapitel beginnt mit der Herleitung der Lagrangeschen periodischen Lösungen. Nach einem allgemeinen Existenzsatz über periodische Lösungen folgen die eigenen Ergebnisse des Verfassers über die periodischen Lösungen des Dreikörperproblems in der Nähe der Kreisbahnlösungen. Auch die Poincarésche Fixpunktmethode wird in diesem Kapitel geschildert.

Im dritten Kapitel werden zuerst die klassischen Stabilitätsuntersuchungen von Dirichlet und Ljapunov erläutert.

Bei diesen Untersuchungen wird der quadratische Teil der analytisch vorausgesetzten Hamiltonschen Funktion in der Umgebung einer Gleichgewichtsstelle durch eine lineare kanonische Transformation in eine in den Produkten der konjugierten Variabelpaaren homogene lineare Form transformiert. Als naturgemäße Weiterentwickelung dieser Idee erscheint beim Verf. die analytische kanonische Transformation in einer solchen Normalform, bei welcher die Hamiltonsche Funktion nur von den Produkten der konjugierten Variabelpaaren abhängt. Die Konvergenz dieser viel versprechenden und formal immer möglichen Transformation wird aber gerade durch die eigene Untersuchungen des Verf. als eine Ausnahmefall erwiesen. In diesem Kapitel werden auch topologische Methoden (Wiederkehrsatz) besprochen.

Der Verfasser, der die Entwicklung auf diesem Gebiete durch eigene Arbeiten wesentlich gefördert hat, gibt in diesen Vorlesungen einen sehr guten Überblick über die neueren Methoden und Resultate der Himmelsmechanik. Die Darstellung ist elegant und durch Benützung von Vektoren, Matrizen und komplexer Koordinaten sehr prägnant. Das Buch kann, besonders für vorwiegend mathematisch interessierte Leser, wärmstens empfohlen werden.

E. Egerváry (Budapest)

H. Boerner, Darstellungen von Gruppen (Die Grundlehren der Math. Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. LXXIV), S. XI + 287, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1955.

Das Ziel des vorliegenden Buches ist es, eine Einführung in diejenigen Teile der Darstellungstheorie der Gruppen zu bieten, die Anwendungen in der Physik haben. Stoffauswahl und Behandlungsweise werden demgemäß von praktischen Gesichtspunkten geführt; der größte Teil des Buches beschäftigt sich mit der Bestimmung der Darstellungen von wichtigeren Gruppen (unimodulare Gruppe, unitäre Gruppe usw.). Unter Darstellung ist immer eine endlichdimensionale zu verstehen. Die Entwicklung der allgemeinen Theorie (invariantes Integral, Theorie der Lieschen Gruppen) wird immer nur soweit geführt, als diese zu diesem Hauptziel des Buches erforderlich ist. Diese starke Abgrenzung der Behandlungsweise des Stoffes ist aber nicht immer glücklich zu nennen; gewiß hätte eine Einordnung des vorgetragenen Materials in größere Zusammenhänge auch aus dem Gesichtspunkt der Zielsetzung des Buches pädagogische Vorteile. Auch die Beschränkung auf endlichdimensionale Darstellungen scheint nicht durch die Bedürfnisse der Physik begründet zu sein. Trotzdem ist sicherlich zu erwarten, daß dieses äußerst klar und sorgfältig geschriebene Buch vielen eine genußreiche wenn auch nicht ganz leichte Anleitung zu diesem reizvollen Gebiet der Mathematik geben wird.

Das Buch besteht aus elf Kapiteln. Vor jedem Kapitel wird der Inhalt desselben mit Hinweisen auf den Zusammenhang mit anderen Kapiteln kurz zusammengestellt. Das erste

Kapitel behandelt die benötigten Hilfsmittel aus der Theorie der Matrizen. Das zweite bringt die Elemente der Theorie der endlichen und kontinuierlichen Gruppen. Im dritten Kapitel werden die Hauptsätze der Darstellungstheorie der endlichen Gruppen mit Verwendung der Gruppenalgebra entwickelt, und dann die entsprechenden Tatsachen bei kontinuierlichen Gruppen behandelt. Kapitel IV gibt die Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppen, Kapitel V berechnet die irreduziblen Darstellungen der vollen linearen, unimodularen und unitären Gruppen. Kapitel VI beschäftigt sich mit dem Zusammenhang der Charaktere der symmetrischen Gruppe mit denen der vollen linearen Gruppe. Kapitel VII beginnt mit einer Betrachtung über die Zusammenhangsverhältnisse der Drehgruppe; dann folgt die Bestimmung der eindeutigen Darstellungen derselben mit Heranziehung von transzendenten Methoden. Kapitel VIII behandelt dann die zweideutigen Darstellungen mit Hilfe der Cliffordschen Algebren; auch weitere spezielle Algebren werden betrachtet, die in der Physik von Bedeutung sind. Endlich beschäftigt sich Kapitel IX mit der Darstellungstheorie der Lorentzgruppe.

Zum Studium des Buches sind wenig Vorkenntnisse erforderlich; fast alle nötigen Hilfsmittel werden voll entwickelt.

L. Pukánszky (Szeged)

A. Speiser, Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. Vierte, erweiterte und berichtigte Auflage mit 43 Abbildungen, einer Farbtafel und einem Anhang (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Math. Reihe Bd. 22), XI + 271 Seiten, Basel und Stuttgart, Birkhäuser Verlag, 1956.

Dieses Buch ist von einem Anhang und einigen unwesentlichen Korrektionen abgesehen eine unveränderte Auflage der in der „Gelben Sammlung" von Springer erschienenen dritten Auflage. In dem Anhang ist die Herstellung von Gruppenbildern besprochen und der Unterschied zwischen der funktionentheoretischen Auffassung und der Substitution erörtert. Das Buch ist mit zu dem Siebeneck gehörigen farbigen Kleinschen Kreisfigur (als Titelbild) dekoriert.

Dieses schon klassisch gewordenes Werk wird in seiner schönen neuen äußerlichen Gestaltung gewiß noch viele Freunde der Gruppentheorie gewinnen.

J. Szép (Szeged)

Michio Suzuki, Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Reihe: Gruppentheorie), 96 pages, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer Verlag, 1956.

Lattice theory, one of the most recent branches of algebra, has many applications in various fields of mathematics, of which perhaps the most important belong to group theory. It is a well known fact that the set of all subgroups of a group G form a lattice $L(G)$ with respect to the operations of forming unions and intersections. Thus it is a natural idea to try getting information about the structure of a group by investigating its subgroup lattice. This particular field of investigation within group theory, whose history does not go back further than some thirty years, is already rich with important results. The present work is the first systematic account on this subject.

The first chapter is devoted to groups with a special kind of subgroup lattice. The results are concerned mostly with finite groups. Thus for instance the finite groups G with modular, lower semi-modular, upper semi-modular, complemented and relatively complemented $L(G)$, respectively, are characterized. Sufficient conditions are given for infinite groups to have a modular or upper semi-modular subgroup lattice. The structure of distributive groups (groups the subgroup lattice of which is distributive) is determined completely. These results lead in particular to a characterization of finite quasi-Hamiltonian groups and to a theorem stating that any quasi-Hamiltonian group is metabelian.

The second chapter deals with the isomorphisms of subgroup lattices. First projectivities (i. e. isomorphic mappings of a subgroup lattice $L(G)$ of a group G onto a subgroup lattice $L(H)$ of a group H) are discussed. For finite groups a theorem of Jones answers completely the question under what circumstances is a projectivity of G onto H induced by a group isomorphism. In this way results concerning abelian, locally free and modular groups, respectively, are discussed here. From the results concerning the index preserving projectivities of a group (i. e. projectivities such that $(U:V)=\varphi(U):\varphi(V))$ holds for any cyclic subgroup U of G and every subgroup V of U) one obtains also the theorem stating that every projectivity maps finite perfect groups onto finite perfect ones. A similar result holds for finite solvable groups. This chapter is closed by a section on so called "situation preserving mappings", which were investigated first by A. Rottländer, as a matter of fact, the theory of subgroup lattices began with her investigations in 1928.

The third chapter is devoted to the homomorphisms of subgroup lattices. A homomorphic mapping φ of the subgroup lattice $L(G)$ of G onto a lattice L is called an L-homomorphism of G onto L. φ is called complete, if $\varphi(\bigcap_\lambda U_\lambda)=\bigcap_\lambda \varphi(U_\lambda)$ and $\varphi(\bigcup_\lambda U_\lambda)=$ $=\bigcup_\lambda \varphi(U)$ hold for any number of subgroups. First the complete L-homomorphisms onto cyclic groups (i. e. onto the $L(Z)$ of a cyclic group Z) are discussed. Sufficient conditions are given under which a homomorphism of a group G onto H induces an L-homomorphism of G. From the results concerning the L-homomorphism of finite G groups one obtains an interesting theorem stating that if φ is an L-homomorphism of a perfect finite group onto a subgroup lattice $L(H)$ of a group H, then this group H is perfect. A similar result holds for finite solvable groups. This chapter also contains Zappa's results on meet-homomorphisms. Finally, the structure of finite groups admitting a proper L-homomorphism is treated.

The last short chapter deals with the dualisms of subgroup lattices. A dualism of the group G onto H means a dual-isomorphism between their subgroup lattices, and H is called a dual of G. A theorem of Baer determines completely the structure of abelian groups with duals. The book closes with investigations of the author, characterizing the structure of the nilpotent and the finite solvable groups with duals respectively.

The book is completed by a rich bibliography.

Of course, the author could not aim at completeness, yet he succeeds in giving a systematic and very clear presentation of the subject. Several results of the author, published here for the first time, and numerous original ideas enhance the value of the book. It will undoubtedly greatly contribute to further progress in the investigation of groups via their subgroup lattices.

J. Szendrei (Szeged)