Über die orthogonalen Funktionen. III (Lebesguesche Funktionen).

Von KÁROLY TANDORI in Szeged.

Einleitung.[1])

Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein im endlichen Grundintervall $[a,b]$ orthonormiertes Funktionensystem. Es ist bekannt, daß für jede positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge $\{l_n\}$, die die Bedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l_n^2} < \infty$$

erfüllt, im Intervall $[a,b]$ fast überall

$$\int_a^b \left| \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(x)\, \varphi_n(t) \right| dt = o(l_N)$$

gilt. (Siehe z. B. Mitteilung I, Einleitung.)

Diese Abschätzung kann im allgemeinen nicht verbessert werden. Nämlich gilt der folgende

Satz I. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, für die die Bedingung*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = \infty \tag{1}$$

erfüllt wird. Dann kann ein im Grundintervall $[a,b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\varrho_n(x)\}$ derart angegeben werden, daß in $[a,b]$ fast überall gilt:

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\lambda_N} \int_a^b \left| \sum_{n=1}^{N} \varrho_n(x)\, \varrho_n(t) \right| dt = \infty .$$

---

[1]) Bezüglich der gebrauchten Bezeichnungen und Begriffe verweisen wir auf Mitteilung I, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 57—130.

Diesen Satz haben wir in Mitteilung I (Satz VI) in dem speziellen Fall $\lambda_n = \sqrt{n \log n}\, w(n)$ bewiesen, wo $\{w(n)\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge mit

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n \log n)\, w^2(n)} = \infty$$

ist. In dieser Mitteilung werden wir sogar den folgenden noch schärferen Satz beweisen:

Satz II. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendliche strebende Zahlenfolge, für die die Bedingung* (1) *erfüllt wird. Dann kann man ein im Intervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\varrho_n(x)\}$ derart angeben, daß fast überall in $[a, b]$ gilt:*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\lambda_N} \int_a^b \left| \sum_{n=1}^{N} \varrho_n(x) \varrho_n(t) \right| dt > \delta\,(>0)$$

und

$$\int_a^b \left| \sum_{n=1}^{N} \varrho_n(x) \varrho_n(t) \right| dt = O(\lambda_N).$$

Es ist leicht einzusehen, daß der Satz II den Satz I enthält. Ist nämlich $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, für welche die Bedingung (1) erfüllt wird, so existiert nach einem bekannten Satz (siehe z. B. G. H. Hardy—J. E. Littlewood—G. Pólya, *Inequalities*, p. 120—121) eine positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendliche strebende Zahlenfolge $\{\bar{\lambda}_n\}$ mit

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\bar{\lambda}_n^2} = \infty$$

und

(3) $$\lambda_n = o(\bar{\lambda}_n).$$

Auf Grund von (2) kann für die Folge $\{\bar{\lambda}_n\}$ der Satz II angewendet werden, also existiert ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\varrho_n(x)\}$, für welches fast überall

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\bar{\lambda}_N} \int_a^b \left| \sum_{n=1}^{N} \varrho_n(x) \varrho_n(t) \right| dt > \delta\,(>0)$$

gilt. Daraus folgt nach (3), daß das Funktionensystem $\{\varrho_n(x)\}$ alle in der Behauptung des Satzes I vorkommenden Bedingungen erfüllt.

Wir bemerken, daß für die zu der $(C, \alpha>0)$-Summation gehörenden Lebesgueschen Funktionen ähnliche Sätze gelten.

Satz III. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, für die die Bedingung* (1) *erfüllt wird. Dann kann man ein im Grundintervall* $[a, b]$ *orthonormiertes Funktionensystem* $\{\varrho_n(x)\}$ *derart angeben, daß für jeden positiven Parameterwert* α *fast überall gilt:*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{\lambda_N}\int_a^b\left|\frac{1}{A_N^{(\alpha)}}\sum_{n=0}^{N}A_{N-n}^{(\alpha)}\varrho_n(x)\varrho_n(t)\right|dt=\infty \qquad \left(A_n^{(\alpha)}=\binom{n+\alpha}{n}\right).$$

Satz IV. *Es sei α ein gegebener positiver Parameterwert und $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendliche strebende Zahlenfolge, für die die Bedingung* (1) *erfüllt wird. Dann existiert ein von α abhängiges, im Grundintervall* $[a, b]$ *orthonormiertes Funktionensystem* $\{\varrho_n^{(\alpha)}(x)\}$ *derart, daß im Intervall* $[a, b]$ *fast überall gilt:*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{\lambda_N}\int_a^b\left|\frac{1}{A_N^{(\alpha)}}\sum_{n=0}^{N}A_{N-n}^{(\alpha)}\varrho_n^{(\alpha)}(x)\varrho_n^{(\alpha)}(t)\right|dt>\varrho\,(>0)$$

und

$$\int_a^b\left|\frac{1}{A_N^{(\alpha)}}\sum_{n=0}^{N}A_{N-n}^{(\alpha)}\varrho_n^{(\alpha)}(x)\varrho_n^{(\alpha)}(t)\right|dt=O(\lambda_N).$$

Mit Anwendung der Methoden von Mitteilung I, § 9, können diese Sätze analog zum Beweis des Satzes II leicht bewiesen werden. Daher wird vom ausführlichen Beweis dieser beiden Sätze abgesehen.

§ 1. Hilfssätze.

Zum Beweis des Satzes II werden wir einige Hilfssätze benötigen.

Hilfssatz I. *Es sei p eine beliebige natürliche Zahl und c eine reelle Zahl mit*

$$0<\frac{1}{c}\leqq 1. \tag{1.1}$$

Dann kann man ein orthonormiertes System $\{h_l(c, p; x)\}$ $(l=1, \ldots, p)$ von Treppenfunktionen im Intervall $[0, 2]$ *angeben, derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

$$\int_0^2 h_l(c, p; x)\,dx=0 \quad (l=1, \ldots, p), \tag{1.2}$$

$$\int_0^2\left|\sum_{l=1}^{q}h_l(c, p; x)\,h_l(c, p; t)\right|dt<\sqrt{2cp} \quad (q=1, \ldots, p; 0\leqq x\leqq 2), \tag{1.3}$$

ferner existiert eine einfache Menge[2]) $H(c)$ ($\subseteqq [0,2]$) *mit*

$$\mu(H(c)) > \frac{1}{2c}, \tag{1.4}$$

so daß für jeden Punkt $x \in H(c)$ *gilt:*

$$\int_0^2 \left| \sum_{l=1}^{p} h_l(c,p;x)\, h_l(c,p;t) \right| dt > \frac{1}{16}\sqrt{2cp}. \tag{1.5}$$

Ähnlicher Hilfssatz ist als Hilfssatz V in unserer Mitteilung I enthalten. Vollständigkeit halber sei aber der Beweis kurz ausgeführt.

Beweis von Hilfssatz I. Es seien r und $\varkappa$ natürliche Zahlen, für die die Ungleichung

$$\frac{2r}{2^\varkappa} \leqq \frac{1}{c} < \frac{2r+1}{2^\varkappa}$$

erfüllt wird. Es sei für $l = 1, \dots, p$ gesetzt:

$$h_l(c,p;x) = \begin{cases} \theta_1 r_{\varkappa+l-1}(x) & \text{für} \quad x \in \left[0, \frac{2r}{2^\varkappa}\right], \\ \theta_2 r_{\varkappa+l-1}(x) & \text{für} \quad x \in \left(\frac{2r}{2^\varkappa}, 2\right], \end{cases}$$

wo

$$\theta_1 = \left(\frac{2^{\varkappa-2}}{r}\right)^{1/2} \text{ und } \theta_2 = \left(4 - \frac{r}{2^{\varkappa-2}}\right)^{-1/2}$$

ist.

Aus der Definition ist es klar, daß die Funktionen $h_l(c,p;x)$ Treppenfunktionen sind und ein orthonormiertes System in $[0,2]$ bilden, ferner (1.2) erfüllt wird. Offensichtlich gilt

$$\sqrt{c} > \theta_1 \geqq \sqrt{\frac{c}{2}} \text{ und } \frac{1}{\sqrt{2}} \geqq \theta_2 > \frac{1}{2}.$$

Mit Anwendung der Bunjakowski—Schwarzschen Ungleichung ergibt sich:

$$\int_0^2 \left| \sum_{l=1}^{q} h_l(c,p;x)\, h_l(c,p;t) \right| dt \leqq \sqrt{2} \left\{ \int_0^2 \sum_{l=1}^{q} \Big(h_l(c,p;x)\, h_l(c,p;t) \Big)^2 dt \right\}^{1/2} =$$

$$= \sqrt{2} \left\{ \sum_{l=1}^{q} h_l^2(c,p;x) \right\}^{1/2} \leqq \sqrt{2} \max(\theta_1, \theta_2) \sqrt{q}$$

($q = 1, \dots, p$) und so auf Grund von den obigen Ungleichungen erhalten wir (1.3).

[2]) D. h. eine aus endlich vielen Intervallen bestehende Menge.

Es sei $H(c)$ die Menge, die so entsteht, daß wir aus dem Intervall $\left[0, \frac{2r}{2^{\varkappa}}\right]$ die Punkte $x = \frac{s}{2^t}$ $(t = 0, \ldots, \varkappa + p - 1, s = 0, \ldots, 2^{t+1})$ weglassen. Offensichtlich ist die Menge $H(c)$ einfach. Da nach der Definition von r und $\varkappa$

$$\frac{2r}{2^{\varkappa}} > \frac{1}{2c}$$

gilt, so ist (1.4) erfüllt.

Für $x \in H(c)$ gilt nach den obigen Ungleichungen

$$\int_0^2 \left| \sum_{l=1}^{p} h_l(c, p; x)\, h_l(c, p; t) \right| dt \geqq \int_{\frac{2r}{2^{\varkappa}}}^{2} \left| \sum_{l=1}^{p} h_l(c, p; x)\, h_l(c, p; t) \right| dt =$$

$$= \theta_1 \theta_2 \int_{\frac{2r}{2^{\varkappa}}}^{2} \left| \sum_{l=1}^{p} r_{\varkappa+l-1}(x)\, r_{\varkappa+l-1}(t) \right| dt > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{2}} \int_{\frac{2r}{2^{\varkappa}}}^{2} \left| \sum_{k=\varkappa}^{\varkappa+p-1} r_k(x)\, r_k(t) \right| dt,$$

woraus sich (1.5) mit Anwendung von Hilfssatz IV aus Mitteilung I ergibt.

Damit haben wir Hilfssatz I bewiesen.

Ist $I = [u, v]$ ein beliebiges endliches Intervall, so sei

$$h_l(c, p, I; x) = \begin{cases} \sqrt{2}\, h_l\left(c, p; 2\frac{x-u}{v-u}\right) & \text{für } u < x < v, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

ferner sei $H(c, I)$ das durch die Transformation $y = \frac{v-u}{2} x + u$ erhaltene Bild der Menge $H(c)$. Auf Grund von (1.2), (1.3), (1.4) und (1.5) ist es leicht einzusehen, daß die folgenden Beziehungen gelten:

$$\int_I h_l(c, p, I; x)\, dx = 0 \qquad (l = 1, \ldots, p), \tag{1.6}$$

$$\int_I h_i(c, p, I; x)\, h_j(c, p, I; x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j, \\ \mu(I) & \text{für } i = j, \end{cases} \tag{1.7}$$

$$\int_I \left| \sum_{l=1}^{q} h_l(c, p, I; x)\, h_l(c, p, I; t) \right| dt < \mu(I) \sqrt{2cp} \qquad (q = 1, \ldots, p;\ u < x < v), \tag{1.8}$$

$$\mu(H(c, I)) > \frac{\mu(I)}{4c}, \tag{1.9}$$

und für $x \in H(c, I)$ ist

$$\int_I \left| \sum_{l=1}^{p} h_l(c, p, I; x)\, h_l(c, p, I; t) \right| dt > \mu(I) \frac{1}{16} \sqrt{2cp}. \tag{1.10}$$

Hilfssatz II. *Es sei* $\{\chi_n(x)\}$ $(n=0, 1, \ldots)$ *das orthonormierte Haarsche Funktionensystem im Grundintervall* $[0, 1]$. *Dann ist*

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=0}^{s} \chi_n(x)\chi_n(t) \right| dt \leqq 1 \quad (s=0, 1, \ldots) \tag{1.11}$$

überall in $[0, 1]$.

Das ist eine leichte Folgerung aus der Definition der Haarschen Funktionen (siehe z. B. S. Kaczmarz—H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, S. 33 und 120—121).

Für ein beliebiges endliches Intervall $I=[u, v]$ definieren wir

$$\chi_n(I; x) = \begin{cases} \chi_n\left(\dfrac{x-u}{v-u}\right) & \text{für } u<x<v, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(n=0, 1, \ldots)$. Aus (1.11) folgt, daß überall in I gilt:

$$\int_I \left| \sum_{n=0}^{s} \chi_n(I; x)\chi_n(I; t) \right| dt \leqq \mu(I) \quad (s=0, 1, \ldots). \tag{1.12}$$

§ 2. Beweis von Satz II.

Es sei $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendliche strebende Zahlenfolge, für die die Bedingung (1) erfüllt wird. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß $\lambda_1 \geqq 2^6$ ist.

Wir definieren eine im strengen Sinne monoton wachsende Indexfolge $\{N_m\}$ und eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge $\{\bar{\lambda}_n\}$ derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

a) $\lambda_n \leqq \bar{\lambda}_n \leqq (2^8+1)\lambda_n \quad (n=1, 2, \ldots)$,

b) $\bar{\lambda}_{N_m} \leqq \dfrac{1}{2^8+1}\bar{\lambda}_{N_{m+1}} \quad (m=0, 1, \ldots)$,

c) für $N_{m+1}-N_m>1$ ist $\bar{\lambda}_{N_{m+1}} \leqq 2(2^8+1)\bar{\lambda}_{N_m} \quad (m=1, 2, \ldots)$.

Es sei $N_0=0, N_1=1$ und $\bar{\lambda}_0=0, \bar{\lambda}_1=\lambda_1$. Es sei $k\,(\geqq 1)$ eine beliebige natürliche Zahl, und wir nehmen an, daß die Indizes $N_1<\ldots<N_k$ und die Zahlen $(2^6 \leqq)\,\bar{\lambda}_1 \leqq \ldots \leqq \bar{\lambda}_{N_k}$ bereits so definiert wurden, daß für die Indizes $n=1, \ldots, N_k$ die Bedingung *a)* und für die Indizes $m=1, \ldots, k-1$ die Bedingungen *b)* und *c)* erfüllt sind, und $\bar{\lambda}_{N_k} \leqq \lambda_{N_k+1}$ ist.

Nun sei $\bar{N}_{k+1}$ die kleinste nach N_k folgende natürliche Zahl, für die

$$\bar{\lambda}_{N_k} \leqq \frac{1}{2^8+1}\lambda_{\bar{N}_{k+1}}$$

gilt. Ist $\bar{N}_{k+1}=N_k+1$ oder $\lambda_{\bar{N}_{k+1}} \leqq 2(2^8+1)\bar{\lambda}_{N_k}$, so sei $N_{k+1}=\bar{N}_{k+1}$ und sei $\bar{\lambda}_n=\lambda_n\,(N_k<n\leqq N_{k+1})$. Ist $\bar{N}_{k+1}>N_k+1$ und $\lambda_{\bar{N}_{k+1}}>2(2^8+1)\bar{\lambda}_{N_k}$, so sei $N_{k+1}=\bar{N}_{k+1}-1$ und sei $\bar{\lambda}_n=\lambda_n\,(N_k<n<N_{k+1})$, $\bar{\lambda}_{N_{k+1}}=(2^8+1)\bar{\lambda}_{N_k}$.

Es ist klar, daß in beiden Fällen $N_k<N_{k+1}$, $\bar{\lambda}_{N_k}\leqq\ldots\leqq\bar{\lambda}_{N_{k+1}}$ gilt, die Bedingung $a)$ auch für die Indizes $n=N_k+1,\ldots,N_{k+1}$ und die Bedingungen $b)$ und $c)$ für $m=k$ erfüllt sind. Es ist ferner klar, daß in beiden Fällen $\bar{\lambda}_{N_{k+1}}\leqq\lambda_{N_{k+1}+1}$ ist.

Auf diese Weise erhalten wir durch vollständige Induktion die Folgen $\{N_m\}$, $\{\bar{\lambda}_n\}$, für die alle die gestellten Bedingungen $a)$—$c)$ erfüllt sind.

Es soll bemerkt werden, daß aus der Bedingung $b)$ folgt:

$$\bar{\lambda}_{N_1}+\cdots+\bar{\lambda}_{N_m}\leqq\frac{1}{2^8}\,\bar{\lambda}_{N_{m+1}}\qquad(m=1,2,\ldots). \tag{2. 1}$$

Mit Anwendung unserer Hilfssätze werden wir nun ein aus Treppenfunktionen bestehendes, im Grundintervall $[a,b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\varrho_n(x)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ und eine Folge $\{H_m\}$ $(m=1,2,\ldots)$ von einfachen Teilmengen von $[a,b]$ konstruieren, für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$\bar{a})$ für jede natürliche Zahl m gilt

$$\int_a^b\left|\sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_{m-1}+q}\varrho_n(x)\varrho_n(t)\right|dt\leqq 2\sqrt{2\bar{\lambda}_{N_m}}\quad(q=1,\ldots,N_m-N_{m-1};\ a\leqq x\leqq b); \tag{2. 2}$$

$\bar{b})$ für $x\in H_m$ ist

$$\int_a^b\left|\sum_{n=N_{m-1}}^{N_m}\varrho_n(x)\varrho_n(t)\right|dt>\frac{1}{2^6}\sqrt{2\bar{\lambda}_{N_m}}; \tag{2. 3}$$

$\bar{c})$ die Mengen H_m sind stochastisch unabhängig und es gilt

$$\mu(H_m)>\frac{b-a}{4}\min\left\{1,\frac{N_m-N_{m-1}}{\bar{\lambda}^2_{N_m}}\right\}. \tag{2. 4}$$

Es sei

$$c_1=\frac{\bar{\lambda}^2_{N_1}}{N_1-N_0},\quad p_1=N_1-N_0\quad\text{falls}\quad\frac{\bar{\lambda}^2_{N_1}}{N_1-N_0}\geqq 1, \tag{I$_0$}$$

$$c_1=1,\quad p_1=[\bar{\lambda}_{N_1}]^2\,{}^{3)}\quad\text{falls}\quad\frac{\bar{\lambda}^2_{N_1}}{N_1-N_0}<1. \tag{II$_0$}$$

Da die Bedingung (1. 1) für die Zahl c_1 erfüllt wird, kann Hilfssatz I mit c_1

---

[3]) $[\alpha]$ bezeichnet den ganzen Teil von α.

und p_1 angewendet werden. Wir setzen

$$\varrho_n(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} h_n(c_1, p_1, [a, b]; x) \quad \text{für } n = 1, \ldots, p_1$$

und es sei $H_1 = H(c_1, [a, b])$. Nach Hilfssatz 1 sind diese Funktionen Treppenfunktionen, und bilden nach (1.7) im Intervall $[a, b]$ ein orthonormiertes System. Aus (1.9) ergibt sich durch einfache Rechnung, daß (2.4) für $m = 1$ erfüllt wird. Im Falle (I_0) folgen (2.2) und (2.3) für $m = 1$ aus (1.8) und (1.10). Nach Hilfssatz I ist die Menge H_1 einfach.

Im Falle (II_0) definieren wir die Funktionen $\varrho_n(x)$ für $[\bar{\lambda}_{N_1}]^2 < n \leqq N_1 - N_0$ wie folgt. Es existiert eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle $\bar{I}_\varrho$ $(\varrho = 1, \ldots, \bar{r})$ derart, daß in den einzelnen Teilintervallen jede Funktion $\varrho_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq [\bar{\lambda}_{N_1}]^2)$ konstant ist. Die zwei Hälften des Intervalls $\bar{I}_\varrho$ seien mit $\bar{I}'_\varrho$ und $\bar{I}''_\varrho$ bezeichnet $(\varrho = 1, \ldots, \bar{r})$. Wir setzen

$$\varrho_{[\bar{\lambda}_{N_1}]^2+l+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \left\{ \sum_{\varrho=1}^{\bar{r}} \chi_l(\bar{I}'_\varrho; x) - \sum_{\varrho=1}^{\bar{r}} \chi_l(\bar{I}''_\varrho; x) \right\} \text{für } l = 0, \ldots, N_1 - [\bar{\lambda}_{N_1}]^2 - 1.$$

Offenbar sind auch diese Funktionen Treppenfunktionen. Es kann durch eine einfache Rechnung bewiesen werden, daß die Funktionen $\varrho_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq N_1)$ auch im Fall (II_0) ein im Intervall $[a, b]$ orthonormiertes System bilden, andererseits ergibt sich aus (1.12), daß

$$\int_a^b \left| \sum_{n=[\bar{\lambda}_{N_1}]^2+1}^{q} \varrho_n(x) \varrho_n(t) \right| dt \leqq 1 \qquad ([\bar{\lambda}_{N_1}]^2 < q \leqq N_1;\ a \leqq x \leqq b)$$

gilt. Hieraus ist nach (1.8) und (1.10) leicht ersichtlich, daß (2.2) und (2.3) auch im Fall (II_0) für $m = 1$ erfüllt sind.

Also haben wir die Funktionen $\varrho_n(x)$ $(n = 1, \ldots, N_1)$ in beiden Fällen derart definiert, daß $\bar{a}$) und $\bar{b}$) für $m = 1$ erfüllt sind.

Es sei nun k eine beliebige natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\varrho_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq N_k)$ und die einfachen Mengen H_m $(1 \leqq m \leqq k)$ bereits so definiert wurden, daß diese Funktionen $\varrho_n(x)$ im Intervall $[a, b]$ ein orthonormiertes System bilden, für die Indizes $m = 1, \ldots, k$ die Bedingungen $\bar{a}$)—$\bar{c}$) erfüllt sind, insbesondere die Mengen $H_1, \ldots, H_k$ stochastisch unabhängig sind.

Wir zerlegen das Intervall $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle I_ϱ $(\varrho = 1, \ldots, r)$ derart, daß in den einzelnen Teilintervallen jede Funktion $\varrho_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq N_k)$ konstant ist und jede Menge H_m $(1 \leqq m \leqq k)$ als Vereinigung von einigen I_ϱ entsteht.

Es seien

$$(\mathrm{I}_k) \qquad c_{k+1} = \frac{\bar{\lambda}^2_{N_{k+1}}}{N_{k+1} - N_k}, \quad p_{k+1} = N_{k+1} - N_k \quad \text{falls } \frac{\bar{\lambda}^2_{N_{k+1}}}{N_{k+1} - N_k} \geqq 1,$$

$$(\mathrm{II}_k) \qquad c_{k+1}=1, \quad p_{k+1}=[\bar{\lambda}_{N_{k+1}}]^2 \quad \text{falls} \quad \frac{\bar{\lambda}^2_{N_{k+1}}}{N_{k+1}-N_k}<1.$$

Da für die Zahl c_{k+1} die Bedingung (1. 1) erfüllt wird, kann der Hilfssatz I mit c_{k+1}, p_{k+1} angewendet werden. Es sei gesetzt

$$\varrho_{N_k+l}(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}\sum_{\varrho=1}^{r} h_l(c_{k+1}, p_{k+1}, I_\varrho; x) \text{ für } l=1,\ldots,p_{k+1}$$

und

$$H_{k+1}=\bigcup_{\varrho=1}^{r} H(c_{k+1}, I_\varrho).$$

Nach dem Hilfssatz I sind auch diese Funktionen Treppenfunktionen. Nach (1. 6) und (1. 7) kann leicht gezeigt werden, daß die Funktionen $\varrho_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq N_k+p_{k+1})$ ein orthonormiertes System im Intervall $[a, b]$ bilden. Aus (1. 9) ergibt sich, daß (2. 4) auch für $m=k+1$ erfüllt wird. Im Falle (I_k) folgt aus (1. 8) und (1. 10), daß (2. 2) und (2. 3) auch für $m=k+1$ erfüllt wird. Es ist ferner klar, daß auch H_{k+1} eine einfache Menge ist und die Mengen $H_1, \ldots, H_{k+1}$ stochastisch unabhängig sind.

Im Falle (II_k) werden wir die Funktionen $\varrho_n(x)$ für $N_k+[\bar{\lambda}_{N_{k+1}}]^2<n\leqq N_{k+1}$ wie folgt definieren. Da nach der Konstruktion die Funktionen $\varrho_n(x)$ $(1\leqq n \leqq N_k+[\bar{\lambda}_{N_{k+1}}]^2)$ Treppenfunktionen sind, existiert eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle $\bar{\bar{I}}_\varrho$ $(\varrho=1,\ldots,\bar{\bar{r}})$ derart, daß in den einzelnen Teilintervallen jede Funktion $\varrho_n(x)$ $(1\leqq n\leqq N_k+[\bar{\lambda}_{N_{k+1}}]^2)$ konstant ist. Die zwei Hälften des Intervalls $\bar{\bar{I}}_\varrho$ seien $\bar{\bar{I}}'_\varrho$ und $\bar{\bar{I}}''_\varrho$. Es sei nun gesetzt:

$$\varrho_{N_k+[\bar{\lambda}_{N_{k+1}}]^2+l+1}(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}\left\{\sum_{\varrho=1}^{\bar{\bar{r}}}\chi_l(\bar{\bar{I}}'_\varrho; x)-\sum_{\varrho=1}^{\bar{\bar{r}}}\chi_l(\bar{\bar{I}}''_\varrho; x)\right\}$$

für $l=0,\ldots,N_{k+1}-N_k-[\bar{\lambda}_{N_{k+1}}]^2-1$.

Es ist klar, daß auch diese Funktionen Treppenfunktionen sind, und eine einfache Rechnung zeigt, daß die Funktionen $\varrho_n(x)$ $(1\leqq n\leqq N_{k+1})$ auch in dem Fall (II_k) ein orthonormiertes System im Intervall $[a, b]$ bilden. Aus (1. 12) folgt:

$$\int_a^b\left|\sum_{n=N_k+[\bar{\lambda}_{N_{k+1}}]^2+1}^{q}\varrho_n(x)\,\varrho_n(t)\right|dt\leqq 1 \quad (N_k+[\bar{\lambda}_{N_{k+1}}]^2<q\leqq N_{k+1};\ a\leqq x\leqq b).$$

Daraus und nach (1. 8) und (1. 10) folgt durch einfache Rechnung, daß für $m=k+1$ (2. 2) und (2. 3) auch in dem Fall (II_k) gelten.

Somit haben wir die Treppenfunktionen $\varrho_n(x)$ für $n=1,\ldots,N_{k+1}$ und die Mengen H_m für $m=1,\ldots,k+1$ in beiden Fällen derart definiert, daß die Bedingungen $\bar{a})-\bar{c})$ für $m=1,\ldots,k+1$ erfüllt sind.

Auf diese Weise erhalten wir durch vollständige Induktion je eine unendliche Folge $\{\varrho_n(x)\}$ und $\{H_m\}$, für die die Bedingungen $\bar{a})-\bar{c})$ erfüllt sind.

Nachdem wir die Konstruktion dieser Funktionen und Mengen vollzogen haben, können wir den Beweis des Satzes II folgendermaßen weiterführen:

Es sei N eine beliebige natürliche Zahl, und sei $N_{k-1} < N \leqq N_k$. Dann ist auf Grund der Bedingungen $\bar{a})$, $a)$, $c)$ und (2. 1)

$$\int_a^b \left| \sum_{n=1}^{N} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt \leqq \sum_{m=1}^{k-1} \int_a^b \left| \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt +$$
$$+\int_a^b \left| \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt \leqq O(1)(\bar{\lambda}_{N_1}+\cdots+\bar{\lambda}_{N_k}) = O(1)\bar{\lambda}_{N_k} = O(\bar{\lambda}_N). \tag{2.5}$$

Für $x \in H_m$ ist nach den Bedingungen $\bar{a})$, $\bar{b})$ und nach (2. 1)

$$\int_a^b \left| \sum_{n=1}^{N_m} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt \geqq \int_a^b \left| \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt -$$
$$-\sum_{k=1}^{m-1} \int_a^b \left| \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt \geqq 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2^7}\bar{\lambda}_{N_m} - \sum_{k=1}^{m-1}\bar{\lambda}_{N_k}\right) \geqq \frac{\sqrt{2}}{2^7}\bar{\lambda}_{N_m}. \tag{2.6}$$

Aus (1) kann auf Grund der Monotonität der Folge $\{\bar{\lambda}_n\}$, und der Bedingungen $a)$ und $c)$ leicht gezeigt werden, daß

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_m - N_{m-1}}{\bar{\lambda}_{N_m}^2} = \infty$$

gilt. Daraus erhalten wir wegen (2. 4)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu(H_m) = \infty.$$

Nun ergibt sich wegen Bedingung $\bar{c})$ mit Anwendung des zweiten Borel—Cantellischen Lemmas, daß $\mu(\overline{\lim_{m\to\infty}} H_m) = b-a$ ist.

Ist $x \in \overline{\lim_{m\to\infty}} H_m$, so wird (2. 6) für unendlich viele Indizes m erfüllt. Danach ist es evident wegen (2. 5), (2. 6) und der Bedingung $a)$, daß das so erhaltene Funktionensystem $\{\varrho_n(x)\}$ die in der Behauptung des Satzes II vorkommenden Bedingungen fast überall erfüllt.

Damit haben wir den Satz II vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 2. September 1957.)