# Metrische Charakterisierung der Finslerschen Räume mit verschwindender projektiver Krümmung.

Von A. RAPCSÁK in Debrecen.

## Einführung.

In einer früheren Arbeit [7] haben wir gezeigt, daß man die projektivebenen Finslerschen Räume skalarer Krümmung durch eine Verallgemeinerung des Ebenenbegriffes des Riemannschen Raumes geometrisch charakterisieren kann. Bekanntlicherweise läßt sich eine, in den Finslerschen Raum eingebettete Hyperfläche entweder als der geometrische Ort der tangentialen Linienelemente, oder aber als die Transversalfläche der geodätischen Linien des Raumes definieren. Der erstere ist offenbar eine Linienelementmannigfaltigkeit, die zweite aber eine Punktmannigfaltigkeit. In der erwähnten Arbeit haben wir für den Fall solcher Hyperflächen Ebenen definiert, welche als geometrische Örter der tangentialen Linienelemente charakterisiert wurden.

In einen Finslerschen Raum eingebettete transversale Hyperflächen sind insbesondere durch M. WEGENER [10] und E. T. DAVIES [4] untersucht worden. In der Arbeit von M. WEGENER (S. 122—123) wird diejenige transversale Hyperfläche Hyperebene genannt, auf welcher die normalen Linienelemente im Sinne der Raummetrik parallel sind. Daselbst wird gezeigt, daß man in dem Falle, wo für den Finslerschen Raum $R_{0\,jk}^{\,i}=0$ gilt, zu jedem Linienelement als Normalvektor eine transversale Hyperebene legen kann.

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit einem die Finslerschen Räume skalarer Krümmung in Allgemeinheit wesentlich übertreffenden Raumtypus, nämlich mit Finslerschen Räumen projektiver Krümmung Null (siehe [1], S. 762 u. f.). Der Hauptsatz unserer Arbeit besagt, daß ein Finslerscher Raum projektiver Krümmung Null dann und nur dann von konstanter Krümmung ist, falls man darin zu jedem Linienelement als Normalvektor eine transversale Hyperebene legen kann. In diesem Satze ist insbesondere eine weitgehend verschärfte Form des Wegenerschen Resultates enthalten.

Wir geben in der vorliegenden Arbeit auch ein Kriterium an, durch welches diejenigen Finslerschen Räume bestimmt werden, in die man zu jedem Linienelement als Normale eine transversale Hyperfläche einbetten kann, auf welcher die Metrik des Raumes eine Riemannsche Metrik konstanter Krümmung, bzw. eine Euklidische Metrik erzeugt.

Sämtliche auftretende Größen werden als regulär-analytisch vorausgesetzt.

## § 1.

Gegeben sei ein $n$-dimensionaler ($n \geqq 3$) Finslerscher Raum mit der Grundfunktion $L(x, v)$.[1]

Bekanntlich hat dieser Raum drei Krümmungstensoren und einen Torsionstensor. Im folgenden werden wir nur den Krümmungstensor $R_{ijkl}$ gebrauchen, welcher die folgende explizite Gestalt hat[2]:

$$
\begin{aligned}
R_{ijkl} = {} & \frac{\partial \Gamma^{*}_{ijk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^{*}_{ijl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^{*}_{ijk}}{\partial v^m} G^m_l + \frac{\partial \Gamma^{*}_{ijl}}{\partial v^m} G^m_k + \Gamma^{*}_{iml} \Gamma^{*}{}_j{}^m{}_k - \Gamma^{*}_{jml} \Gamma^{*}{}_i{}^m{}_k + \\
& + C_{ijm} \left( \frac{\partial G^m_k}{\partial x^l} - \frac{\partial G^m_l}{\partial x^k} - G^m_{kr} G^r_l + G^m_{lr} G^r_k \right),
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

in (1. 1) ist

$$G^i = \frac{1}{4} g^{ih} \left( \frac{\partial^2 L^2}{\partial v^h \partial x^r} v^r - \frac{\partial L^2}{\partial x^h} \right), \tag{1.2}$$

$$G^i_h = \frac{\partial G^i}{\partial v^h}, \tag{1.3}$$

$$G^i_{kh} = \frac{\partial G^i_k}{\partial v^h}, \tag{1.4}$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{*}_{ihj} = \frac{1}{2} \Bigg\{ & \left( \frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ih}}{\partial v^r} G^r_j \right) + \left( \frac{\partial g_{hj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{hj}}{\partial v^r} G^r_i \right) - \\
& - \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial v^r} G^r_h \right) \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

Der Torsionstensor des Raumes ist

$$A_{ijk} = L C_{ijk} = \frac{1}{2} L \frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k} = \frac{1}{2} g_{ij\|k}, \tag{1.6}$$

wobei

$$f_{\|k} = L \frac{\partial f}{\partial v^k} \tag{1.7}$$

gesetzt wird.

---

[1]) Siehe z. B. [3], [5].

[2]) Siehe z. B. [3], S. 36.

Da für die kovarianten bzw. die kontravarianten Komponenten des, dem Linienelement gleichgerichteten Einheitsvektors

(1.8) $$l^i = \frac{v^i}{L} \quad \text{und} \quad l_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}$$

gilt, so haben wir

(1.9) $$l^i{}_{\|k} = \delta^i_k - l^i l_k, \quad l_{i\|k} = g_{ik} - l_i l_k,$$

(1.10) $$L_{\|k} = L l_k.$$

Wird ein Tensor mit dem Vektor $l^i$ komponiert, so bezeichnen wir den entsprechenden Index mit $o$. Z. B. ist

$$T_{ij} l^j = T_{io}.$$

Für eine Größe, welche in $v^i$ homogen 0-ten Grades ist, gilt offenbar

$$T_{\|o} = 0.$$

Die Cartansche kovariante Ableitung eines Tensors $T^i{}_j$ definieren wir auf folgende Weise:

(1.11) $$T^i{}_{j|k} = \frac{\partial T^i{}_j}{\partial x^k} - \frac{\partial T^i{}_j}{\partial v^r} G^r_k + T^r{}_j \Gamma^{*i}_{r\ k} - T^i{}_r \Gamma^{*r}_{j\ k}.$$

Wie man leicht einsieht, ist

(1.12) $$G^i_{hj} = \Gamma^{*i}_{h\ j} + A^i_{hj|o}.$$

L. BERWALD[3]) führt im Finslerschen Raume auch noch sog. affine Krümmungsgrößen ein:

(1.13) $$K^i{}_j = 2\frac{\partial G^i}{\partial x^j} - \frac{\partial G^i_j}{\partial x^r} v^r + 2 G^i_{jr} G^r - G^i_r G^r_j,$$

(1.14) $$K^i{}_{jk} = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial K^i_k}{\partial v^j} - \frac{\partial K^i_j}{\partial v^k}\right) = \frac{\partial G^i_j}{\partial x^k} - \frac{\partial G^i_k}{\partial v^j} + G^r_j G^i_{rk} - G^r_k G^i_{rj},$$

(1.15) $$K^i_{hjk} = \frac{\partial K^i_{jk}}{\partial v^h} = \frac{\partial G^i_{hj}}{\partial x^k} - \frac{\partial G^i_{hk}}{\partial x^j} + G^r_{hj} G^i_{rk} - G^r_{hk} G^i_{rj} + G^r_j G^i_{rhk} - G^r_k G^i_{rhj},$$

wo

(1.16) $$G^i_{jkh} = \frac{\partial G^i_{jk}}{\partial v^h}$$

ist.

Es gelten die Relationen[4]):

(1.17) $$L\, R_o{}^j{}_{kh} = K^j_{kh},$$

(1.18) $$L^2 R_o{}^j{}_{oh} = K^j_h,$$

[3]) Siehe [1], S. 759.

[4]) Siehe [1], S. 771—772.

(1. 19) $$\frac{1}{2}(K_{ijkh}+K_{jikh})=A_{ijk|o|h}-A_{ijh|o|k}-A^m_{ij}R_{omkh},$$

(1. 20) $$\frac{1}{2}(K_{ijkh}-K_{jikh})=R_{ijkh}+A^m_{ik|o}A_{jmh|o}-A^m_{ih|o}A_{jmk|o},$$

(1. 21) $$R_o{}^p{}_{kh||i}=K_i{}^p{}_{kh}-l_i R_o{}^p{}_{kh},$$

(1. 22) $$R_o{}^p{}_{oh||i}=R_o{}^p{}_{ih}-2l_i R_o{}^p{}_{oh}+R_i{}^p{}_{oh}-A^p_{im}R_o{}^m{}_{oh}-A^p_{ih|o|o},$$

(1. 23) $$R_o{}^p{}_{op||h}=2R_o{}^p{}_{hp}-2l_h R_o{}^p{}_{op}-A_p R_o{}^p{}_{oh}A_{h|o|o}.$$

Bildet man zwei Finslersche Räume aufeinander bahntreu ab, so bleibt folgender, sog. projektiver Abweichungstensor invariant[5]):

(1. 24) $$W^j_h=K^j_h-\frac{K^r_r}{n-1}\delta^j_h-\frac{1}{n+1}\left(\frac{\partial K^r_h}{\partial v^r}-\frac{1}{n-1}\frac{\partial K^r_r}{\partial v^h}\right)v^j.$$

L. Berwald definiert in dem Linienelement $(x, v)$ die Größe

(1. 25) $$R(x, v, \eta)=\frac{K_{ikhm}\,v^i v^h \eta^k \eta^m}{(g_{ih}g_{km}-g_{im}g_{hk})v^i v^h \eta^k \eta^m},$$

wo $\eta^i$ einen in $(x, v)$ definierten, von $l^i$ linear unabhängigen Vektor bedeutet.[6])

Ist $R(x, v, \eta)$ von der Ebenenstellung $(v, \eta)$ unabhängig, so sagen wir, daß der Raum von skalarer Krümmung ist. In diesem Falle ist

(1. 26) $$R(x, v, \eta)\equiv R(x, v)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{n-1}R_o{}^r{}_{or}=\frac{1}{n-1}\frac{K^r_r}{L^2}.$$

Charakteristisch für die Räume skalarer Krümmung ist die Relation:

(1. 27) $$R_o{}^j{}_{oi}=\frac{K^j{}_i}{L^2}=R(x, v)(\delta^j_i-l^j l_i).$$

Ist $R$ konstant, so ist der Raum von konstanter Krümmung. Charakteristisch für die Finslerschen Räume konstanter Krümmung sind die Relationen:

(1. 28a) $$R_o{}^j{}_{ik}=R(\delta^j_k l_i-\delta^j_i l_k),$$

(1. 28b) $$K_h{}^j{}_{ik}=R(\delta^j_k g_{hi}-\delta^j_i g_{hk}).$$

Notwendig und hinreichend dafür, daß ein Finslerscher Raum auf einen Finslerschen Raum von Krümmung Null bahntreu abbildbar ist, ist die Bedingung

(1. 29) $$W^i_j=0,$$

[5]) Siehe [1], S. 763.

[6]) Siehe [1], S. 773.

oder die damit äquivalente Bedingung

$$n(K_{j|k} - K_{k|j}) + (K_{jr|k} - K_{kr|j}) v^r = 0, \tag{1.30}$$

wo

$$K_j = K_j{}^r{}_r, \quad K_{hj} = K_h{}^r{}_{jr}. \tag{1.31}$$

ist.[7])

Wir bemerken, daß $R_{ijkh}$ in den beiden ersten und den beiden letzten Indizes schiefsymmetrisch, $K_h{}^i{}_{jk}$ in den beiden letzten Indizes schiefsymmetrisch, in den unteren Indizes aber zyklisch symmetrisch ist.

## § 2. In den Finslerschen Raum eingebettete transversale Hyperflächen.[8])

Betrachten wir im $n$-dimensionalen Finslerschen Raum eine in Parameterdarstellung angegebene Hyperfläche[9])

$$x^i = x^i(u^1, \ldots, u^{n-1}). \tag{2.1}$$

Jedem Punkt der Hyperfläche (2.1) ordnen wir das auf die Hyperfläche transversale Linienelement zu. Die Hyperfläche ist somit die Transversalfläche der durch diese Linienelemente bestimmten geodätischen Linien.

Es sei

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} = \varphi^i_\alpha. \tag{2.2}$$

Offenbar gilt

$$l_i \varphi^i_\alpha = 0. \tag{2.3}$$

Der Fundamentaltensor der durch die Projektionsmethode induzierten Flächenmetrik ist

$$g_{\alpha\beta} = g_{ik} \varphi^i_\alpha \varphi^k_\beta. \tag{2.4}$$

Der Koeffizient der zweiten Grundform der Hyperfläche kann in der Gestalt

$$a_{\varrho\sigma} = l_i \left[ \frac{\partial \varphi^i_\varrho}{\partial u^\sigma} + \Gamma^{*i}_{j\ k} \varphi^j_\varrho \varphi^k_\sigma \right] \tag{2.5}$$

geschrieben werden.

Bezeichnen wir die Koeffizienten der auf der Hyperfläche induzierten Parallelverschiebung durch $\gamma_\alpha{}^\varrho{}_\beta$, dann gilt

$$\gamma_{\varrho\sigma\tau} = g_{\sigma\varepsilon} \gamma_\varrho{}^\varepsilon{}_\tau = g_{rk} \varphi^r_\sigma \left( \frac{\partial \varphi^k_\varrho}{\partial u^\tau} + \Gamma^{*k}_{i\ j} \varphi^j_\varrho \varphi^i_\tau + C^k_{ji} \frac{\omega^j}{\partial u^\varrho} \varphi^i_\tau \right). \tag{2.6}$$

---

[7]) Siehe [1], § 7.

[8]) Siehe z. B. [10], S. 115—123.

[9]) Im folgenden laufen die lateinischen Indizes von 1 bis $n$, die griechischen Indizes von 1 bis $n-1$.

Die Hyperfläche hat eine Krümmungs- und einen Torsionstensor. Der Krümmungstensor ist durch

$$B_{\varrho\sigma\varkappa\lambda}=\frac{\partial\gamma_{\sigma\varrho\lambda}}{\partial u^{\varkappa}}-\frac{\partial\gamma_{\varrho\sigma\varkappa}}{\partial u^{\lambda}}+\gamma_{\varrho\tau\lambda}\gamma_{\sigma}{}^{\tau}{}_{\varkappa}-\gamma_{\varrho\tau\varkappa}\gamma_{\sigma}{}^{\tau}{}_{\lambda}, \tag{2.7}$$

der Torsionstensor durch

$$T_{\varkappa}{}^{\varrho}{}_{\lambda}=\gamma_{\varkappa}{}^{\varrho}{}_{\lambda}-\gamma_{\lambda}{}^{\varrho}{}_{\varkappa} \tag{2.8}$$

gegeben.

Das Differentialgleichungssystem der Hyperfläche (2. 1) kann in der Gestalt

$$\frac{\partial l^{i}}{\partial u^{\alpha}}+l^{k}\Gamma^{*i}_{k\,h}\varphi^{h}_{\alpha}=-a^{\lambda}{}_{\alpha}\varphi^{i}{}_{\lambda}, \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial\varphi^{i}_{\varrho}}{\partial u^{\tau}}+\Gamma^{*i}_{k\,h}\varphi^{k}_{\varrho}\varphi^{h}_{\tau}=(\gamma_{\varrho}{}^{\sigma}{}_{\alpha}+A_{\varrho}{}^{\sigma}{}_{\lambda}a^{\lambda}{}_{\tau})\varphi^{i}_{\sigma}+a_{\varrho\tau}l^{i} \tag{2.10}$$

angegeben werden. Die Integrabilitätsbedingungen für (2. 9) und (2. 10), d. h. die CODAZZI'schen und die GAUß'schen Formeln der Hyperfläche sind:

$$\begin{aligned} B_{\varrho\tau\varkappa\lambda}-(a_{\varrho\varkappa}a_{\tau\lambda}-a_{\varrho\lambda}a_{\tau\varkappa})&=R_{\varrho\tau\varkappa\lambda}+(P_{\varrho\tau\varkappa\sigma}a^{\sigma}{}_{\lambda}-P_{\varrho\tau\lambda\sigma}a^{\sigma}{}_{\varkappa})+S_{\varrho\tau\nu\sigma}a^{\nu}{}_{\varkappa}a^{\sigma}{}_{\lambda},\\ a_{\varrho\varkappa(\lambda)}-a_{\varrho\lambda(\varkappa)}+a_{\varrho\sigma}T_{\varkappa}{}^{\sigma}{}_{\lambda}&=R_{o\varrho\varkappa\lambda}+(P_{o\varrho\varkappa\sigma}a^{\sigma}{}_{\lambda}-P_{o\varrho\lambda\sigma}a^{\sigma}{}_{\varkappa}), \end{aligned} \tag{2.11}$$

wo

$$P_{\varrho\varkappa\sigma\lambda}=P_{ijkl}\varphi^{i}_{\varrho}\varphi^{j}_{\varkappa}\varphi^{k}_{\sigma}\varphi^{l}_{\lambda},\quad S_{\varrho\varkappa\sigma\lambda}=S_{ijkl}\varphi^{i}_{\varrho}\varphi^{j}_{\varkappa}\varphi^{k}_{\sigma}\varphi^{l}_{\lambda}$$

die Projektionen der Raumtensoren $P_{ijkl}$ und $S_{ijkl}$ auf die Hyperfläche sind, $a_{\varrho\varkappa(\lambda)}$ aber die kovariante Ableitung von $a_{\varrho\varkappa}$ bezüglich der induzierten Metrik bedeutet.

Sind die Normal-Einheitsvektoren entlang der Hyperfläche im Sinne der Raummetrik parallel, so wird die Hyperfläche eine Hyperebene genannt. Dafür ist auf Grund von (2. 9) die Bedingung

$$a_{\varrho\sigma}=0 \tag{2.12}$$

notwendig und hinreichend. Im Falle einer Hyperebene reduzieren sich die Integrabilitätsbedingungen (2. 11) und (2.12) auf

$$R_{o\varrho\varkappa\sigma}=0, \tag{2.13}$$

und

$$B_{\varrho\varkappa\sigma\lambda}=R_{\varrho\varkappa\sigma\lambda}. \tag{2.14}$$

Aus (2. 6) folgt dann, daß $\gamma_{\varrho}{}^{\sigma}{}_{\tau}$ in $\varrho$ und in $\tau$ symmetrisch ist, und folglich

$$T_{\varrho}{}^{\sigma}{}_{\tau}=0 \tag{2.15}$$

gilt.

Wie man leicht einsieht, ist

$$\gamma_{\varrho\sigma\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial u^{\varrho}} + \frac{\partial g_{\varrho\sigma}}{\partial u^{\tau}} - \frac{\partial g_{\varrho\tau}}{\partial u^{\sigma}}\right), \tag{2.16}$$

d. h. die Raummetrik induziert auf der Hyperebene eine Riemannsche Metrik.

## § 3. Finslersche Räume, in welchen man zu jedem Linienelement als Normalvektor eine Hyperebene stellen kann.

Satz 1. *Notwendig und hinreichend dafür, daß man in einem n-dimensionalen ($n \geqq 3$) Finslerschen Raum zu jedem Linienelement $\left(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l}\right)$ eine transversale Hyperebene stellen kann, in dessen Punkt $\left(\underset{(0)}{x}\right)$ der Normaleinheitsvektor gleich $\underset{(0)}{l^i}$ ist, ist das Erfülltsein der Bedingung*[10])

$$R_{o\ jk}^{\ i} = R_{o\ ok}^{\ i} l_j - R_{o\ oj}^{\ i} l_k. \tag{3.1}$$

Beweis. Aus der Integrabilitätsbedingung (2. 13) folgt, daß im Falle, wo man zu jedem Linienelement eine transversale Hyperebene stellen kann, in jedem Linienelement des Raumes

$$R_{oijk}\lambda^i \mu^j \nu^k = 0, \tag{3.2}$$

mit

$$\lambda_i l^i = \mu_i l^i = \nu_i l^i = 0 \tag{3.3}$$

gilt.

Betrachten wir jetzt eine solche normierte $n$-Bein-Darstellung von $R_{oijk}$, bei welcher einer der Vektoren des $n$-Beins $l^i$ ist. Die Einheitsvektoren des $n$-Beins seien $\underset{(j)}{l^i}$, wo $\underset{(n)}{l^i} = l^i$ ist. Dann ergibt sich

$$R_{oijk} = \overset{(\alpha\beta\gamma)}{T} \underset{(\alpha)}{l_i} \underset{(\beta)}{l_j} \underset{(\gamma)}{l_k} + \overset{(n\beta\gamma)}{T} l_i \underset{(\beta)}{l_j} \underset{(\gamma)}{l_k} + \overset{(\alpha n\gamma)}{T} \underset{(\alpha)}{l_i} l_j \underset{(\gamma)}{l_k} + \overset{(\alpha\gamma n)}{T} \underset{(\alpha)}{l_i} \underset{(\gamma)}{l_k} l_j. \tag{3.4}$$

Da nun $R_{oijk}$ in den beiden ersten und auch in den beiden zweiten Indizes schiefsymmetrisch ist, und auch (3. 2) gilt, erhalten wir

$$\overset{(\alpha\beta\gamma)}{T} = 0, \quad \overset{(\alpha n\gamma)}{T} \underset{(\alpha)}{l_i} \underset{(\gamma)}{l_k} = -\overset{(\alpha\gamma n)}{T} \underset{(\alpha)}{l_i} \underset{(\gamma)}{l_k} = R_{oiok}, \tag{3.5}$$

und somit wegen (3. 4)

$$R_{oijk} = R_{oiok} l_j - R_{oioj} l_k. \tag{3.6}$$

Aus (3. 6) folgt nun trivialerweise, daß die Bedingung

$$R_{oijk}\mu^j \nu^k = 0 \tag{3.7}$$

mit der Bedingung (3. 2) äquivalent ist.

10) Siehe [6], S. 78.

Dafür, daß man in einem Finslerschen Raum der Dimension $n \geqq 3$ zu jedem Linienelement eine transversale Hyperebene stellen kann, ist somit die Bedingung (3. 6) notwendig.

Die Bedingung (3. 6) ist aber auch hinreichend. In einem Raum der erwähnten Eigenschaft ist nämlich das Differentialgleichungssystem

$$(3.8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial l^i}{\partial x^k}\varphi_\alpha^k + \Gamma^{*i}_{o\,k}\varphi_\alpha^k = 0, & l_i\dfrac{\partial \varphi_\alpha^i}{\partial u^\beta} + l_i\Gamma^{*i}_{j\,k}\varphi_\alpha^j\varphi_\beta^k = 0, \\ \dfrac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} = \varphi_\alpha^i, & \dfrac{\partial \varphi_\alpha^i}{\partial u^\beta} = \dfrac{\partial \varphi_\beta^i}{\partial u^\alpha} \end{cases}$$

vollständig integrabel, weil die nichttriviale Integrabilitätsbedingung des Systems, d. h.

$$(3.9)\qquad R_o{}^i{}_{jk}\varphi_\alpha^j\varphi_\beta^k = 0,$$

wegen (3. 6) erfüllt ist. Ist nun $\left(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l}\right)$ ein beliebiges Linienelement, so bedeutet die Integrierbarkeit von (3. 8) auf Grund von (2. 5), (2. 6), (2. 9) und (2. 10), daß es eine transversale Hyperebene gibt, welche im Punkte $\left(\underset{(0)}{x}\right)$ den Normalvektor $\underset{(0)}{l^i}$ hat.

Diejenigen Finslerschen Räume, in welchen (3. 6) erfüllt ist, werden wir Räume quasikonstanter Krümmung nennen. Für solche Räume gelten die folgenden Relationen:

Aus (1. 14), (1. 17) und (1. 18) ergibt sich:

$$(3.10)\qquad R_o{}^i{}_{jk} = R_o{}^i{}_{ok||j} - R_o{}^i{}_{oj||k},$$

und aus (2. 21), (3. 10) und (3. 6) durch eine einfache Rechnung

$$(3.11)\qquad K_i{}^p{}_{kh} = R_o{}^p{}_{oh||i}l_k - R_o{}^p{}_{ok||i}l_h + R_o{}^p{}_{oh}g_{ik} - R_o{}^p{}_{ok}g_{ih}.$$

Indem wir jetzt auf (3. 11) die Formel (1. 22) anwenden, ergibt sich

$$(3.12)\qquad \begin{aligned} K_{ipkh} = {} & R_{ophk}l_i + R_{ipoh}l_k - R_{ipok}l_h + A_{pim}R_o{}^m{}_{hk} + A_{pik|o|o}l_h - A_{pih|o|o}l_k + \\ & + R_{opoh}g_{ki} - R_{opok}g_{hi}, \end{aligned}$$

und wegen (3. 12) und (1. 20)

$$(3.13)\qquad \begin{aligned} R_{ipkh} = {} & A^m_{ih|o}A_{mpk|o} - A^m_{ik|o}A_{mph|o} + \frac{1}{2}[R_{opoh}(g_{ki} - l_kl_i) - R_{opok}(g_{hi} - l_hl_i) - \\ & - R_{oioh}(g_{kp} - l_kl_p) + R_{oiok}(g_{hp} - l_hl_p)] + R_{ipoh}l_k - R_{ipok}l_h. \end{aligned}$$

Aus (3. 12) und (1. 19) folgt nun

$$(3.14)\qquad \begin{aligned} A_{pik|o|h} - A_{pih|o|k} = {} & A_{pik|o|o}l_h - A_{pih|o|o}l_k + \frac{1}{2}[R_{opoh}(g_{ik} - l_kl_i) - \\ & - R_{opok}(g_{hi} - l_hl_i) + R_{oioh}(g_{kp} - l_kl_p) + R_{oiok}(g_{hp} - l_hl_p)]. \end{aligned}$$

Indem wir nun in (3. 14) nach $p$ und $k$ verjüngen, erhalten wir

$$R_{oioh}=R(g_{ih}-l_i l_h)+\frac{2}{n-1}A_{i|o|h}-A_{i|o|o}l_h-A_i{}^r{}_{h|o|r}], \tag{3.15}$$

wobei wir die Bezeichnung

$$(n-1)R=R_o{}^r{}_{or} \tag{3.16}$$

eingeführt haben.

Durch Einsetzung von (3. 6) in (1. 23) ergibt sich jetzt

$$(n-1)R_{||h}=-A_p R_o{}^p{}_{oh}-A_{h|o|o}. \tag{3.17}$$

Verjüngung von (1. 22) nach $p$ und $i$ und Einsetzung von (3. 6) und (3. 17) führt jetzt zu

$$R_o{}^p{}_{oh||p}=-(n-1)Rl_h+(n-1)R_{||h}. \tag{3.18}$$

Indem wir jetzt (3. 10) nach $i$ und $k$, (3. 11) aber nach $p$ und $h$ verjüngen und auf (1. 17), (3. 17) und (3. 18) Rücksicht nehmen, ergibt sich unter Anwendung der Bezeichnungen (1. 31)

$$K_i=LR_o{}^p{}_{ip}=(n-1)LRl_i, \tag{3.19}$$

$$K_{ik}=(n-1)R_{||i}l_k+(n-1)Rg_{ik}, \tag{3.20}$$

$$-K_r{}^r{}_{hj}=K_{hj}-K_{jh}=(n-1)[R_{||h}l_j-R_{||j}l_h] \tag{3.21}$$

Wenn wir jetzt noch (1. 18) und (3. 16) in (1.24) einsetzen und auf (3. 18) Rücksicht nehmen, so ergibt sich

$$W_h^j=L^2\left[R_o{}^j{}_{oh}-R(\delta_h^j-l^j l_h)-\frac{n-2}{n+1}R_{||h}l^j\right]. \tag{3.22}$$

Satz 2. *Ist ein Finslerscher Raum quasikonstanter Krümmung von skalarer Krümmung, so ist dieser Raum von konstanter Krümmung.*

Beweis. Für einen Finslerschen Raum skalarer Krümmung ergibt sich aus (1. 28) und (1. 14) durch Verjüngung

$$R_o{}^p{}_{ip}=\frac{n-2}{3}R_{||i}+(n-1)Rl_i. \tag{3.23}$$

Aus (3. 19) und (3. 23) folgt, daß in einem Raume quasikonstanter Krümmung

$$R_{||i}=0 \tag{3.24}$$

ist. Aus (3. 24) und aus der von L. Berwald herrührenden Verallgemeinerung des Schurschen Satzes[11]) folgt nun

$$R=\text{const.}, \tag{3.25}$$

was zu beweisen war.

[11]) Siehe [1], S. 777—778.

Satz 3. *Ist in einem n-dimensionalen ($n \geqq 3$) Finslerschen Raum quasikonstanter Krümmung die projektive Krümmung gleich Null, so ist der Raum von konstanter Krümmung.*

Beweis. Es sei

$$W_h^j = 0. \tag{3.26}$$

Indem wir (3. 22) mit $l_j$ kontrahieren, ergibt sich wegen (3. 26)

$$R_{||h} = 0. \tag{3.27}$$

Aus den Gleichungen (3. 26) und (3. 27) folgt

$$R_o{}^j{}_{oh} = R(\delta_h^j - l^j l_h), \tag{3.28}$$

d. h. der Raum ist von skalarer Krümmung. Satz 3 folgt somit aus Satz 2.

Satz 4. *Ist in einem Raum quasikonstanter Krümmung*

$$R_{|j} = 0, \tag{3.29}$$

*so ist der Raum von konstanter Krümmung.*

Beweis. Zuerst zeigen wir, daß in einem Raum quasikonstanter Krümmung, welcher der Bedingung (3. 29) genügt, auch die Integrabilitätsbedingung (1. 30) erfüllt ist.

Wegen (3. 19) und (3. 20) nimmt (1. 30) in Räumen quasikonstanter Krümmung die Gestalt

$$(n^2-1)[R_{|k}l_j - R_{|j}l_k] + (n-1)[R_{||j|k} - R_{||k|j}] = 0 \tag{3.30}$$

an. Indem wir jetzt auf das zweite Glied von (3. 30) die Vertauschungsformel

$$R_{|i||k} - R_{||k|i} = -R_{||r}A^r_{ik|o} \tag{3.31}$$

anwenden, ergibt sich

$$(n^2-1)[R_{|k}l_j - R_{|j}l_k] + (n-1)[R_{|k||j} - R_{|j||k}] = 0. \tag{3.32}$$

Auch die Gleichungen (3. 32) sind wegen (3.29) erfüllt. Ist also in einem Raum quasikonstanter Krümmung (3. 29) erfüllt, so kann dieser Raum bahntreu auf einen Finslerschen Raum von Krümmung Null abgebildet werden, d. h. es gilt in diesem Raume

$$W_h^j \equiv 0. \tag{3.33}$$

Aus (3. 33) und aus Satz 3 folgt unsere Behauptung.

Hauptsatz. *Damit man in einem n-dimensionalen ($n \geqq 3$) Finslerschen Raum von der projektiven Krümmung Null zu jedem Anfangslinienelement $\left(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l}\right)$ eine transversale Hyperebene legen kann, ist notwendig und hinreichend daß der Raum von konstanter Krümmung sei.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den Sätzen 1 und 3.

Die in einem Raum konstanter Krümmung zu einem Linienelement $(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})$ gehörige Hyperebene kann man z. B. auf folgende Weise charakterisieren.

In einem Raum konstanter Krümmung ist das folgende Differentialgleichungssystem vollständig integrabel:

$$d\varphi = l_i dx^i = 0, \qquad dl^i = -\Gamma_o^{*i}{}_k dx^k - \varphi R \delta^i_k dx^k \tag{3.34}$$

Die nichttriviale Integrabilitätsbedingung von (3. 34) ist nämlich

$$R_o{}^i{}_{jk} = R(\delta^i_k l_j - \delta^i_j l_k), \tag{3.35}$$

und diese Bedingung ist in einem Raum konstanter Krümmung erfüllt.

Für die Anfangswerte $\underset{(0)}{x^i}, \underset{(0)}{l^i}$, und $\underset{(0)}{\varphi} = 0$ hat (3. 34) die Lösung

$$\varphi(x^1, \dots x^n) = 0, \qquad l^i = l^i(x),$$

und wegen (3. 34), (2. 9) und (2. 12) ist dies offenbar die Gleichung einer Hyperebene, welche im Punkt $\underset{(0)}{x^i}$ den Normaleinheitsvektor $\underset{(0)}{l^i}$ hat.

S a t z 5. *Sind in einem Finslerschen Raum konstanter Krümmung die Gleichungen*

$$A_i{}^m{}_{k|o} A_{jmh|o} - A_i{}^m{}_{h|o} A_{jmk|o} = 0 \tag{3.36}$$

*erfüllt, so gibt es auf jeder in den Raum eingebetteten Hyperebene eine Riemannsche Metrik konstanter Krümmung.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus (1. 28b), (1. 20), (2. 4) und (2. 14).

S a t z 6. *Ist in einem Finslerschen Raum von der Krümmung Null* (3. 36) *erfüllt, so gibt es auf jeder in den Raum eingebettelen Hyperebene eine Euklidische Metrik.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus Satz 5.

S a t z 7. *Kann man in einen Finslerschen Raum eine Hyperebene einbetten, so liegen die zu einem beliebigen Normalvektor dieser Ebene gehörigen, auf diesen Vektor orthogonalen quasigeodätischen Kurven*[12]) *in der Hyperebene, und diese Kurven sind die geodätischen Kurven der Hyperebene.*

B e w e i s. Das Differentialgleichungssystem der quasigeodätischen Kurven kann in der Gestalt

$$\frac{dl^i}{ds} = -\Gamma_o^{*i}{}_k \frac{dx^k}{ds}, \tag{3.37a}$$

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = -\Gamma_j^{*i}{}_k \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} \tag{3.37b}$$

geschrieben werden.

12) Siehe [8].

Auf Grund von (2. 9), (2. 16) und (2. 12) sind die Gleichungen der geodätischen Linien einer Hyperebene

(3.38) $$\frac{\partial f^i}{\partial u^\alpha}\frac{du^\alpha}{ds} = -\Gamma^{*i}_{o\,k}\,\varphi^k_\alpha\frac{du^\alpha}{ds},$$

(3.39) $$\frac{d^2u^\alpha}{ds^2} = -\gamma_\beta{}^\alpha{}_\gamma\frac{du^\beta}{ds}\frac{du^\gamma}{ds}.$$

Indem wir jetzt (3. 39) in (2. 10) einsetzen und (2. 12) berücksichtigen, erhalten wir

(3.40) $$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^{*i}_{j\,k}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0.$$

Das System (3. 38), (3. 40), d. h. das Differentialgleichungssystem der Geodätischen der Hyperfläche ist mit (3. 37a), (3. 37b) identisch, d. h. im Falle gleicher Anfangsbedingungen fallen die Geodätischen der Hyperebene mit der zum Normaleinheitsvektor gehörigen orthogonalen quasigeodätischen Kurvenschar zusammen, was zu beweisen war.

Satz 8. *Kann man in einem Finslerschen Raum zu einem Linienelement* $(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})$ *eine Hyperebene legen, so hat die betreffende Hyperebene in demjenigen Normalkoordinatensystem*[13]*), welches zum Koordinatensystem mit*

(3.41) $$l_\alpha = 0, \qquad l_n \neq 0$$

*und zum Anfangslinienelement* $(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})$ *gehört, die Gleichung*

(3.42) $$\bar{x}^n = 0.$$

Beweis. Im betreffenden Normalkoordinatensystem nimmt die Gleichung der auf das Linienelement $(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})$ orthogonalen quasigeodätischen Kurven wegen (3. 41) die Gestalt

(3.43) $$\bar{x}^\alpha = \underset{(0)}{\xi^\alpha}(s - s_0), \qquad \bar{x}^n = 0$$

an. Unsere Behauptung folgt aus Satz 7 und aus (3. 43).

Aus (3. 42), (2. 5) und (2. 12) folgt, daß in diesem Normalkoordinatensystem der Hyperebene entlang

(3.44) $$\bar{l}_i\bar{\Gamma}^{*}_{\alpha}{}^{i}{}_{\beta}(\bar{x}, \bar{v}(\bar{x})) = 0$$

gilt.

13) Siehe [8].

## Literaturverzeichnis.

[1] L. Berwald, Über Finslersche und Cartansche Geometrie. IV, *Annals of Math.*, 48 (1947), 755—781.

[2] L. Berwald, Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus, *Math. Zeitschrift*, 25 (1926), 40 73.

[3] E. Cartan, *Les espaces de Finsler*, Actualités scientifiques et industrielles, 79 (Paris, 1934).

[4] E. T. Davies, Subspaces of a Finsler space, *Proc. London Math. Soc.*, (2) 49 (1947), 19—39.

[5] P. Finsler, *Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen* (Dissertation Göttingen, 1918).

[6] S. Kikuchi, On the theory of subspace in a Finsler space, *Tensor* (New series), 2 (1952), 67—79.

[7] A. Rapcsák, Eine neue Charakterisierung Finslerscher Räume skalarer und konstanter Krümmung, und projektiv-ebene Räume, *Acta Math. Hungarica*, 8 (1957), 1—18.

[8] O. Varga, Normalkoordinaten in allgemeinen differentialgeometrischen Räumen und ihre Verwendung zur Bestimmung sämtlicher Differentialinvarianten, *Comptes Rendus du Premier Congrès des Mathématiciens Hongrois* (Budapest, 1952), 131—146.

[9] O. Varga, Zur Differentialgeometrie der Hyperflächen in Finslerschen Räumen, *Deutsche Math.*, 6 (1941), 192—212.

[10] J. M. Wegener, Hyperflächen in Finslerschen Räumen als Transversalflächen einer Schar von Extremalen, *Monatshefte für Math. und Phys.*, 44 (1936), 115—130.

*(Eingegangen am 7. Mai 1957.)*