Über die Quasiideale von Halbgruppen mit eigentlichem Suschkewitsch-Kern.

Von O. STEINFELD in Budapest.

§ 1.

Wir verstehen nach [3] unter einem *Quasiideal* einer Halbgruppe H eine nicht-leere Untermenge $\mathfrak{a}$ von H mit der Eigenschaft

(1) $$H\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}H \subseteqq \mathfrak{a}.$$

Der nicht-leere Durchschnitt $\mathfrak{k}$ aller zweiseitiger Ideale einer Halbgruppe H wird *Suschkewitsch-Kern* von H genannt, und es wird immer mit $\mathfrak{k}$ bezeichnet. Nach dem Vorbild bei ŠT. SCHWARZ [2] führen wir die folgenden Begriffe ein. Wir sagen, daß *H eine Halbgruppe mit eigentlichem Suschkewitsch-Kern* (kurz eine Halbgruppe m. e. S.-K.) ist, wenn $\mathfrak{k}$ existiert und von H verschieden ist. (Z. B. ist eine Halbgruppe ($\neq 0$) mit Nullelement eine Halbgruppe m. e. S.-K.) Wir nennen ein Quasiideal $\mathfrak{a}$ einer Halbgruppe H m. e. S.-K. $\mathfrak{k}$ *relativ minimal,* wenn $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{a}$ gilt und H kein Quasiideal $\mathfrak{a}'$ mit $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}$ enthält. Ähnlich können die relativ minimalen ein- und zweiseitigen Ideale definiert werden.

Im folgenden Paragraphen besprechen wir als Vorbereitung einige Lemmas.

In § 3 beschäftigen wir uns mit den relativ minimalen Quasiidealen einer Halbgruppe m. e. S.-K. Um diese Ergebnisse zu formulieren, schicken wir zwei Definitionen voraus.

Definition 1. Eine Teilhalbgruppe U der Halbgruppe H m. e. S.-K. $\mathfrak{k}$ von der Eigenschaft $U^2 \subseteqq \mathfrak{k} \subseteqq U$ wird eine *$\mathfrak{k}$-Halbgtuppe* genannt.

Insbesondere ist $\mathfrak{k}$ selbst eine $\mathfrak{k}$-Halbgruppe. Im Falle $\mathfrak{k}=0$ stimmen die $\mathfrak{k}$-Halbgruppen mit den sogenannten Zero-Halbgruppen überein.

Definition 2. Eine Teilhalbgruppe V der Halbgruppe H m. e. S.-K. $\mathfrak{k}$ nennen wir eine *Gruppe mit* $\mathfrak{k}$, wenn $\mathfrak{k} \subset V$ gilt, und für jedes Elementepaar

α, β ($\in V - \mathfrak{k}$) die Gleichungen[1] $\alpha\xi = \beta$ und $\eta\alpha = \beta$ mit ξ, η ($\in V - \mathfrak{k}$) lösbar sind.

Ähnlich wie bei dem Begriff der Gruppe kann man einsehen, daß Definition 2 mit folgender Definition äquivalent ist:

Definition 2'. Eine Teilhalbgruppe V einer Halbgruppe H m. e. S.-K. $\mathfrak{k}$ nennen wir eine *Gruppe mit* $\mathfrak{k}$, wenn $\mathfrak{k} \subset V$ gilt und für jedes Element α ($\in V - \mathfrak{k}$) ein Element ε ($\in V - \mathfrak{k}$) mit $\varepsilon\alpha = \alpha$ (linksseitiges Einselement) und ein Element α' ($\in V - \mathfrak{k}$) mit $\alpha'\alpha = \varepsilon$ gibt.

Es ist leicht einzusehen, daß aus Definition 2, oder aus Definition 2' für jedes Elementepaar α, β ($\in V - \mathfrak{k}$) auch die Bedingung $\alpha\beta \in V - \mathfrak{k}$ folgt. Das bedeutet, daß $V - \mathfrak{k}$ eine Gruppe ist und der Begriff der Gruppe mit $\mathfrak{k}$ als eine Verallgemeinerung des bekannten Begriffs der Gruppe mit Nullelement zu betrachten ist.

A. H. CLIFFORD [1] hat bewiesen: Ist $\mathfrak{l}$ bzw. $\mathfrak{r}$ ein minimales Linksideal bzw. Rechtsideal einer Halbgruppe H, so ist $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ bildet eine Gruppe. In [3] wurde ferner bewiesen, daß $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$ ein minimales Quasiideal[2]) von H und jedes minimale Quasiideal eine Gruppe ist

Wir gewinnen analoge Sätze über die relativ minimalen Quasiideale: Ist $\mathfrak{l}$ ein relativ minimales Linksideal und $\mathfrak{r}$ ein relativ minimales Rechtsideal einer Halbgruppe H m. e. S.-K. $\mathfrak{k}$, so ist der Durchschnitt $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$ entweder gleich $\mathfrak{k}$ oder ein relativ minimales Quasiideal von H. Sowohl ein relativ minimales Quasiideal von H, als auch das Produkt $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ sind entweder $\mathfrak{k}$-Halbgruppen oder Gruppen mit $\mathfrak{k}$. Ist $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ eine Gruppe mit $\mathfrak{k}$, so ist $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$ und zugleich ein relativ minimales Quasiideal von H.

Außerdem beweisen wir, daß die Halbgruppen $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}\mathfrak{r}$ alle drei gleichzeitig $\mathfrak{k}$-Halbgruppen oder keine $\mathfrak{k}$-Halbgruppen sind.

§ 2.

Lemma 1. *Ist G eine Gruppe mit $\mathfrak{k}$ in einer Halbgruppe H m. e. S.-K. $\mathfrak{k}$, so hat G als Halbgruppe kein Quasiideal $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{a} \subset G$.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{a}$ ein Quasiideal von G mit der Eigenschaft $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{a} \subseteqq G$. Es bezeichne α ein Element von $\mathfrak{a} - \mathfrak{k}$. Nach Definition 2 sind für jedes γ ($\in G - \mathfrak{k}$) die Gleichungen

(2) $$\gamma = \alpha\xi, \quad \gamma = \eta\alpha \qquad (\gamma, \xi, \eta \in G - \mathfrak{k}, \ \alpha \in \mathfrak{a} - \mathfrak{k})$$

[1]) Mit $M - N$ ($N \subseteqq M$) bezeichnen wir die Differenzmenge von M und N, d. h. die Menge derjenigen Elemente von M, die in N nicht enthalten sind.

[2]) Ein Quasiideal (Linksideal, Rechtsideal) $\mathfrak{a}$ einer Halbgruppe H heißt *minimal*, wenn in H kein Quasiideal (Linksideal, Rechtsideal) $\mathfrak{a}'$ mit $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}$ gibt.

lösbar, deshalb ist γ in $\mathfrak{a}G$ und $G\mathfrak{a}$ enthalten. γ ist also nach (1) ein Element des Quasiideals $\mathfrak{a}$, woraus $\mathfrak{a}=G$ folgt.

Lemma 2. (Siehe Lemma 5 von [3]). *Es sei ε ein idempontentes Element, $\mathfrak{l}$ ein Linksideal, $\mathfrak{r}$ ein Rechtsideal der Halbgruppe H. Dann sind $\varepsilon\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{r}\varepsilon$ Quasiideale von H.*

Aus der Definition des Suschkewitsch-Kerns $\mathfrak{k}$ bekommt man unmittelbar:

$$\mathfrak{k}^2=\mathfrak{k}. \tag{3}$$

Aus (3) folgt trivialerweise:

Lemma 3. *Sind M und N zwei den Suschkewitsch-Kern enthaltende Teilmengen der Halbgruppe H m. e. S.-K. $\mathfrak{k}$, so ist*

$$\mathfrak{k}\subseteqq MN. \tag{4}$$

Lemma 4. *Ist ε ein idempotentes Element einer Halbgruppe H m. e. S.-K. $\mathfrak{k}$, so gilt:*

$$(\mathfrak{k},\varepsilon H\varepsilon)=(\mathfrak{k},H\varepsilon)\cap(\mathfrak{k},\varepsilon H). \tag{5}$$

Beweis. Die linke Seite von (5) ist offenbar in der rechten Seite enthalten. Wir haben also nur $(\mathfrak{k},H\varepsilon)\cap(\mathfrak{k},\varepsilon H)\subseteqq(\mathfrak{k},\varepsilon H\varepsilon)$ zu beweisen. Es sei α ein Element der rechten Seite. Ist α ein Element von $\mathfrak{k}$, so ist die Behauptung richtig. Im anderen Fall gilt

$$\alpha=\varrho\varepsilon=\varepsilon\sigma \qquad (\varrho,\sigma\in H). \tag{6}$$

Da ε ein idempotentes Element ist, so folgt aus (6)

$$\varrho\varepsilon^2=\varrho\varepsilon=\varepsilon\sigma\varepsilon, \tag{6'}$$

woraus man die Richtigkeit unserer Behauptung sieht.

Lemma 5. *Ist $\mathfrak{a}$ ein zweiseitiges Ideal und $\mathfrak{m}$ ein Quasiideal einer Halbgruppe H, so ist die Menge $(\mathfrak{a},\mathfrak{m})$ ein Quasiideal von H.*

Beweis. Nach (1) haben wir

$$H(\mathfrak{a},\mathfrak{m})\cap(\mathfrak{a},\mathfrak{m})H=(H\mathfrak{a},H\mathfrak{m})\cap(\mathfrak{a}H,\mathfrak{m}H)\subseteqq(\mathfrak{a},\mathfrak{m}) \tag{1'}$$

zu beweisen. Da $\mathfrak{a}$ ein zweiseitiges Ideal ist, sind die Durchschnitte $H\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}H$, $H\mathfrak{a}\cap\mathfrak{m}H$, $H\mathfrak{m}\cap\mathfrak{a}H$ in $\mathfrak{a}$ enthalten. Nach (1) gilt außerdem $H\mathfrak{m}\cap\mathfrak{m}H\subseteqq\mathfrak{m}$, also ist (1') richtig.

§ 3.

Satz 1. *Der Durchschnitt eines relativ minimalen Links- und Rechtsideals einer Halbgruppe H m. e. S.-K. $\mathfrak{k}$ ist entweder gleich $\mathfrak{k}$ oder ein relativ minimales Quasiideal von H.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{a}$ der Durchschnitt eines relativ minimalen Linksideals $\mathfrak{l}$ und eines relativ minimalen Rechtsideals $\mathfrak{r}$ von H und $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{k}$. Offenbar ist $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{k}$ enthaltendes Quasiideal. Setzen wir voraus, daß $\mathfrak{a}$ im Widerspruch zu unserer Behauptung nicht relativ minimal ist; dann gibt es ein Quasiideal $\mathfrak{a}'$ mit $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}$. Wegen Lemma 3 und der relativen Minimalität von $\mathfrak{l}$ gilt entweder $H\mathfrak{a}' = \mathfrak{k}$ oder $H\mathfrak{a}' = \mathfrak{l}$. Im Fall $H\mathfrak{a}' = \mathfrak{k}$ wäre $\mathfrak{a}'$ ein Linksideal mit $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{l}$, was aber wegen der Definition von $\mathfrak{l}$ unmöglich ist. Folglich ist $H\mathfrak{a}' = \mathfrak{l}$.

Ebenso kann man einsehen, daß $\mathfrak{a}'H = \mathfrak{r}$ gilt. Daraus folgt $\mathfrak{a} = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{r} = H\mathfrak{a}' \cap \mathfrak{a}'H \subseteqq \mathfrak{a}'$, was der Bedingung $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}$ widerspricht. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Satz 2. *Ist $\mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{l}$ ein relativ minimales Rechtsideal bzw. ein relativ minimales Linksideal der Halbgruppe H m. e. S.-K. $\mathfrak{k}$, so ist $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ entweder eine $\mathfrak{k}$-Halbgruppe, oder eine Gruppe mit $\mathfrak{k}$. Im zweiten Falle ist $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$, und deshalb ein relativ minimales Quasiideal von H.*

Beweis. Im Falle $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$ ist unsere Behauptung richtig. Setzen wir voraus, daß $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \neq \mathfrak{k}$ gilt, weshalb nach Lemma 3 auch $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{r}\mathfrak{l}$ besteht. Es bezeichne ϱ ein beliebiges Element von $\mathfrak{r}\mathfrak{l} - \mathfrak{k}$. Wegen $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \subseteqq \mathfrak{l}, \mathfrak{r}$ ist ϱ in $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{r}$ enthalten. Wegen der Definition von $\mathfrak{l}$ ist das Linksideal $(\mathfrak{k}, \mathfrak{l}\varrho)$ entweder $\mathfrak{k}$ oder $\mathfrak{l}$ gleich.

Trifft für mindestens ein ϱ der erste Fall zu, so bilden die Elemente ξ $(\in \mathfrak{r})$ mit $(\mathfrak{k}, \mathfrak{l}\xi) \subseteqq \mathfrak{k}$ ein Rechtsideal $\mathfrak{r}^*$, welches die Bedingung $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{r}^* \subseteqq \mathfrak{r}$ erfüllt. Wegen der relativen Minimalität des Rechtsideals $\mathfrak{r}$ muß $\mathfrak{r}^* = \mathfrak{r}$ bestehen, woraus $(\mathfrak{k}, \mathfrak{l}\mathfrak{r}) \subseteqq \mathfrak{k}$ bzw. wegen Lemma 3 auch $\mathfrak{l}\mathfrak{r} = \mathfrak{k}$ folgt. So sieht man, daß $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r}\mathfrak{l} \subseteqq \mathfrak{k}$ gilt, d. h. $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ eine $\mathfrak{k}$-Halbgruppe ist.

Ist $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ keine $\mathfrak{k}$-Halbgruppe, so muß folglich für jedes Element ϱ $(\in \mathfrak{r}\mathfrak{l} - \mathfrak{k})$ der zweite Fall $(\mathfrak{k}, \mathfrak{l}\varrho) = \mathfrak{l}$ bestehen. Daraus folgt nach Lemma 3

$$(\mathfrak{r}\mathfrak{k}, \mathfrak{r}\mathfrak{l}\varrho) = (\mathfrak{k}, \mathfrak{r}\mathfrak{l}\varrho) = \mathfrak{r}\mathfrak{l} \qquad (\varrho \in \mathfrak{r}\mathfrak{l} - \mathfrak{k}). \tag{7}$$

Ähnlich folgt, daß für jedes $\varrho (\in \mathfrak{r}\mathfrak{l} - \mathfrak{k})$ auch

$$(\mathfrak{k}, \varrho\mathfrak{r}\mathfrak{l}) = \mathfrak{r}\mathfrak{l} \qquad (\varrho \in \mathfrak{r}\mathfrak{l} - \mathfrak{k}). \tag{8}$$

besteht. Die Bedingungen (7) und (8) bedeuten, daß für jedes Elementepaar $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ eine ϱ, α $(\in \mathfrak{r}\mathfrak{l} - \mathfrak{k})$ die Gleichungen

$$\xi\varrho = \alpha, \quad \varrho\eta = \alpha \qquad (\xi, \eta \in \mathfrak{r}\mathfrak{l} - \mathfrak{t}) \tag{9}$$

lösbar sind. Damit haben wir infolge der Voraussetzung $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{r}\mathfrak{l}$ bewiesen, daß $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ eine Gruppe mit $\mathfrak{k}$ ist.

Es sei ε $(\in \mathfrak{r}\mathfrak{l} - \mathfrak{k})$ ein linksseitiges Einselement von $\mathfrak{r}\mathfrak{l} - \mathfrak{k}$. Da ε ein idempotentes Element von $\mathfrak{l} - \mathfrak{k}$ ist, besteht $\mathfrak{k} \subset (\mathfrak{k}, H\varepsilon) \subseteqq \mathfrak{l}$, woraus wegen der relativen Minimalität von $\mathfrak{l}$

(10) $$(\mathfrak{k}, H\varepsilon) = \mathfrak{l}$$

folgt. Ebenso sieht man ein:

(11) $$(\mathfrak{k}, \varepsilon H) = \mathfrak{r}.$$

Aus (10) und (11) bekommen wir $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{r}\mathfrak{l} = (\mathfrak{k}, \varepsilon H)(\mathfrak{k}, H\varepsilon) = (\mathfrak{k}, \varepsilon H^2 \varepsilon) \subseteqq \mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$, woraus wegen Lemmas 2, 5 und Satz 1 die Behauptung $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$ folgt, womit Satz 2 bewiesen ist.

Satz 3. *Ist $\mathfrak{l}$ ein relativ minimales Linksideal, $\mathfrak{r}$ ein relativ minimales Rechtsideal der Halbgruppe H m. e. S.-K. $\mathfrak{k}$, so sind die drei Halbgruppen $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$ entweder lauter $\mathfrak{k}$-Halbgruppen, oder ist keine von ihnen eine $\mathfrak{k}$-Halbgruppe.*

Beweis.[3]) Es sei zuerst $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ eine $\mathfrak{k}$-Halbgruppe. Ist dabei $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$, so ist $\mathfrak{l}\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{l}\mathfrak{r} = \mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r}\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{k}$ und $(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r})(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}) \subseteqq \mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$, weshalb jetzt die Behauptung richtig ist.

Ist dagegen $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \neq \mathfrak{k}$ und $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$, so ist entweder $\mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$ oder $\mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} \neq \mathfrak{k}$.

Aus $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \neq \mathfrak{k}$ und $\mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$ folgt die Existenz eines Elementes ϱ $(\in \mathfrak{r}\mathfrak{l} - \mathfrak{k} \subseteqq \mathfrak{r})$ mit $\mathfrak{l}\varrho \subseteqq \mathfrak{k}$. Daraus sieht man, daß die Elemente $\xi (\in \mathfrak{r})$ mit $\mathfrak{l}\xi \subseteqq \mathfrak{k}$ ein Rechtsideal $\mathfrak{r}^*$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{r}^* \subseteqq \mathfrak{r}$ bilden. Wegen der relativen Minimalität des Rechtsideals $\mathfrak{r}$ muß $\mathfrak{r}^* = \mathfrak{r}$ bestehen. Es gilt also $\mathfrak{l}\mathfrak{r} = \mathfrak{k}$, woraus auch $(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r})(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}) = \mathfrak{k}$ folgt. Wieder ist die Behauptung richtig.

Der zweite Fall $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \neq \mathfrak{k}$ und $\mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} \neq \mathfrak{k}$ ist unmöglich, denn wegen der Voraussetzung muß $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} \subseteqq \mathfrak{l}$ bestehen, woraus wegen der relativen Minimalität von $\mathfrak{l}$ die Gleichung $\mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{l}$ folgt. Dies führt aber wegen $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$ zum Widerspruch $\mathfrak{k} = \mathfrak{r}\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{r}\mathfrak{l}$.

Jetzt setzen wir voraus, daß $\mathfrak{l}\mathfrak{r}$ eine $\mathfrak{k}$-Halbgruppe ist. Ist $\mathfrak{l}\mathfrak{r} = \mathfrak{k}$, so gilt $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{l}\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{l} = \mathfrak{k}$ und $(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r})(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}) \subseteqq \mathfrak{l}\mathfrak{r} = \mathfrak{k}$.

Es sei dann $\mathfrak{l}\mathfrak{r} \neq \mathfrak{k}$ und $\mathfrak{l}\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{l}\mathfrak{r} = \mathfrak{k}$; es ist entweder $\mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} \neq \mathfrak{k}$ oder $\mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$.

Der Fall $\mathfrak{l}\mathfrak{r} \neq \mathfrak{k}$ und $\mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} \neq \mathfrak{k}$ ist wieder unmöglich, da aus $\mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} \neq \mathfrak{k}$ wieder $\mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{l}$ und daraus der Widerspruch $\mathfrak{k} = \mathfrak{l}\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{l}\mathfrak{r} = \mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{l}\mathfrak{r}$ folgt.

Der Fall $\mathfrak{l}\mathfrak{r} \neq \mathfrak{k}$ und $\mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$ gibt zwei Möglichkeiten: $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$ oder $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \neq \mathfrak{k}$. Ist $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$, so ist $(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r})(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}) \subseteqq \mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$.

Wenn dagegen $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \neq \mathfrak{k}$ und $\mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$ gilt, bekommen wir wieder — wie oben — $\mathfrak{l}\mathfrak{r} = \mathfrak{k}$, was der Voraussetzung $\mathfrak{l}\mathfrak{r} \neq \mathfrak{k}$ widerspricht.

Zuletzt bestehe die Voraussetzung, daß $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$ eine $\mathfrak{k}$-Halbgruppe ist. Wenn $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r} = \mathfrak{k}$ ist, so ist wegen $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \subseteqq \mathfrak{l} \cap \mathfrak{r} = \mathfrak{k}$ auch $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$ gültig, woraus auch $\mathfrak{l}\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{l}\mathfrak{r} = \mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r}\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{k}$ folgt.

---

[3]) Da $\mathfrak{k} \subseteqq \mathfrak{l}, \mathfrak{r}$ gilt, können wir nach Lemma 3 statt $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \subseteqq \mathfrak{k}$; $\mathfrak{l}\mathfrak{r} \subseteqq \mathfrak{k}$; $\mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} \subseteqq \mathfrak{k}$ u.s.w. $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$; $\mathfrak{l}\mathfrak{r} = \mathfrak{k}$; $\mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$ u. s w. schreiben.

Es sei dann $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r} \neq \mathfrak{f}$ und $(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r})(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}) = \mathfrak{f}$. Man sieht, daß jetzt wegen $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$ auch $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{f}$ gilt. Ist außerdem $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{f}$, so ist auch $\mathfrak{l}\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{l}\mathfrak{r} = \mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r}\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{f}$ gültig. Wenn dagegen $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{f}$ und $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \neq \mathfrak{f}$ ist, läßt sich der Beweis wie oben beenden[4]).

Satz 4. *Ein relativ minimales Quasiideal* $\mathfrak{a}$ *einer Halbgruppe* H *m. e. S.-K.* $\mathfrak{f}$ *ist entweder eine* $\mathfrak{f}$*-Halbgruppe, oder eine Gruppe mit* $\mathfrak{f}$, *die in der Form* $(\mathfrak{f}, \varepsilon H \varepsilon)$ *darstellbar ist, wo mit* ε *das (linksseitige) Einselement der Gruppe mit* $\mathfrak{f}$ *bezeichnet wird.*

Beweis. Wenn für jedes Elementepaar α, β $(\in \mathfrak{a} - \mathfrak{f})$

$$H\beta \cap \alpha H = \mathfrak{f} \tag{12}$$

gilt, so ist wegen $\alpha\beta \in H\beta \cap \alpha H$ jedes Produkt $\alpha\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathfrak{a} - \mathfrak{f})$ in $\mathfrak{f}$ enthalten. Da offenbar auch jedes Produkt $\varrho\sigma$ $(\varrho, \sigma \in \mathfrak{a}; \varrho$ oder $\sigma \in \mathfrak{f})$ ein Element von $\mathfrak{f}$ ist, so bildet jetzt $\mathfrak{a}$ eine $\mathfrak{f}$-Halbgruppe.

Wenn dagegen ein Elementepaar α, β $(\in \mathfrak{a} - \mathfrak{f})$ existiert, wofür (12) nicht erfüllt ist, so besteht wegen der Definition von $\mathfrak{a}$

$$(\mathfrak{f}, H\beta) \cap (\mathfrak{f}, \alpha H) = \mathfrak{a} \qquad (\alpha, \beta \in \mathfrak{a} - \mathfrak{f}). \tag{13}$$

Nach (13) kann ~~man~~ jedes Element ξ $(\in \mathfrak{a} - \mathfrak{f})$ in der Form

$$\xi = \varrho\beta = \alpha\sigma \qquad (\alpha, \beta, \xi \in \mathfrak{a} - \mathfrak{f}; \varrho, \sigma \in H) \tag{14}$$

schreiben. Insbesondere bestehen für die Elemente α, β $(\in \mathfrak{a} - \mathfrak{f})$ die Gleichungen

$$\alpha = \gamma_1 \beta = \alpha\gamma_2 \qquad (\gamma_1, \gamma_2 \in H), \tag{15}$$

$$\beta = \lambda_1 \beta = \alpha\lambda_2 \qquad (\lambda_1, \lambda_2 \in H), \tag{16}$$

aus denen wegen $\beta\alpha = \lambda_1\beta\alpha = \beta\alpha\gamma_2$

$$\beta\alpha \in H\beta\alpha \cap \beta\alpha H \tag{17}$$

folgt.

Ist $\beta\alpha \in \mathfrak{f}$, so sieht man aus (14), daß das Produkt zweier beliebiger Elemente von $\mathfrak{a} - \mathfrak{f}$ ein Element von $\mathfrak{f}$ ist. Da die Produkte $\varrho\sigma$ $(\varrho, \sigma \in \mathfrak{a}$; ϱ oder $\sigma \in \mathfrak{f})$ auch in $\mathfrak{f}$ enthalten sind, bildet $\mathfrak{a}$ wieder eine $\mathfrak{f}$-Halbgruppe.

Im restlichen Fall ist $\beta\alpha \notin \mathfrak{f}$. Dann gilt wegen (17) und der relativen Minimalität von $\mathfrak{a}$

$$(\mathfrak{f}, H\beta\alpha) \cap (\mathfrak{f}, \beta\alpha H) = \mathfrak{a}. \tag{18}$$

---

[4]) Aus dem Beweis sieht man, daß Satz 3 das folgende ringtheoretische Analogon hat: Sind $\mathfrak{l}$ bzw. $\mathfrak{r}$ ein minimales Linksideal bzw. ein minimales Rechtsideal eines Ringes R, so sind die Unterringe $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}\mathfrak{r}$, $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$ entweder lauter Zero-Ringe, oder ist keiner von ihnen ein Zero-Ring.

Aus (18) folgt, daß α, β $(\in \mathfrak{a} - \mathfrak{k})$ auch in der Form

(19) $$\alpha = \eta_1 \beta \alpha = \beta \alpha \eta_2, \quad \beta = \nu_1 \beta \alpha = \beta \alpha \nu_2 \qquad (\eta_1, \eta_2, \nu_1, \nu_2 \in H)$$

darstellbar sind.

Betrachten wir jetzt das Element $\eta_1 \beta \alpha \nu_2$. Dieses kann man nach (19) auch in der Form

(20) $$\eta_1 \beta \alpha \nu_2 = \alpha \nu_2 = \eta_1 \beta \qquad (\alpha, \beta \in \mathfrak{a} - \mathfrak{k};\ \eta_1, \nu_2 \in H)$$

schreiben. Aus (19_2) und $\beta \notin \mathfrak{k}$ folgt, daß $\alpha \nu_2 \notin \mathfrak{k}$. Wegen (20) und (13) ist $\alpha \nu_2$ in $\mathfrak{a}$ enthalten. Ferner besteht wieder wegen (20) auch $\alpha \nu_2 \cdot \alpha \nu_2 = \eta_1 \beta \cdot \alpha \nu_2 = \alpha \nu_2$. Folglich ist $\alpha \nu_2 (\notin \mathfrak{k})$ ein idempotentes Element von $\mathfrak{a}$. Bezeichnen wir es der Einfachheit halber mit ε $(= \alpha \nu_2)$. Aus $\varepsilon \in H\varepsilon \cap \varepsilon H$ $(\varepsilon \notin \mathfrak{k})$ und der relativen Minimalität von $\mathfrak{a}$ folgt

(21) $$(\mathfrak{k}, H\varepsilon) \cap (\mathfrak{k}, \varepsilon H) = \mathfrak{a} \qquad (\varepsilon^2 = \varepsilon \in \mathfrak{a} - \mathfrak{k}).$$

Da wir nach Lemma 4 $(\mathfrak{k}, \varepsilon H \varepsilon)$ statt der linken Seite von (21) schreiben können, ist auch

(22) $$\mathfrak{a} = (\mathfrak{k}, \varepsilon H \varepsilon) \qquad (\varepsilon^2 = \varepsilon \in \mathfrak{a} - \mathfrak{k})$$

richtig. Wir zeigen, daß $\mathfrak{a}$ eine Gruppe mit $\mathfrak{k}$ ist. Offenbar ist $\mathfrak{a} = (\mathfrak{k}, \varepsilon H \varepsilon)$ eine Halbgruppe mit $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{a}$, weshalb wir nur die übrigen Bedingungen der Definition 2′ für $\mathfrak{a}$ zu beweisen haben. Nach (22) ist ε ein Einselement von $\mathfrak{a} - \mathfrak{k}$. Wir brauchen noch einzusehen, daß es zu jedem Element $\varepsilon \varrho \varepsilon$ $(\in \mathfrak{a} - \mathfrak{k})$ ein Element $\varepsilon \sigma \varepsilon$ $(\in \mathfrak{a} - \mathfrak{k})$ mit $\varepsilon \sigma \varepsilon \cdot \varepsilon \varrho \varepsilon = \varepsilon$ gibt. Da einerseits das Element $\varepsilon \varrho \varepsilon$ $(\in \mathfrak{a} - \mathfrak{k})$ in $\varepsilon H \varepsilon \cdot \varepsilon \varrho \varepsilon$ enthalten ist, ist $\varepsilon H \varepsilon \cdot \varepsilon \varrho \varepsilon \neq \mathfrak{k}$. Andererseits gilt $\varepsilon H \varepsilon \cdot \varepsilon \varrho \varepsilon \subseteqq \varepsilon H \varepsilon$, also muß wegen Lemmas 2, 5 und der relativen Minimalität von $\mathfrak{a}$

(23) $$(\mathfrak{k}, \varepsilon H \varepsilon \cdot \varepsilon \varrho \varepsilon) = \mathfrak{a}$$

erfüllt sein. Wegen ε $(\in \mathfrak{a}, \notin \mathfrak{k})$ und (23) ist ε ein Element von $\varepsilon H \varepsilon \cdot \varepsilon \varrho \varepsilon$, woraus die Existenz eines Elementes $\varepsilon \sigma \varepsilon$ $(\in \varepsilon H \varepsilon \subseteqq \mathfrak{a})$ mit $\varepsilon \sigma \varepsilon \cdot \varepsilon \varrho \varepsilon = \varepsilon$ folgt. $\varepsilon \sigma \varepsilon$ ist kein Element von $\mathfrak{k}$. $\mathfrak{k}$ ist nämlich ein Ideal von H und aus $\varepsilon \sigma \varepsilon \in \mathfrak{k}$ würde $\varepsilon \sigma \varepsilon \cdot \varepsilon \varrho \varepsilon = \varepsilon \in \mathfrak{k}$ folgen, was wegen $\varepsilon \notin \mathfrak{k}$ falsch ist. Damit haben wir Satz 4 bewiesen.

Ein Teil vom Satz 4 läßt sich umkehren:

Satz 5. *Wenn ein Quasiideal $\mathfrak{a}$ einer Halbgruppe H m. e. S.-K. $\mathfrak{k}$ eine Gruppe mit $\mathfrak{k}$ ist, so ist $\mathfrak{a}$ ein relativ minimales Quasiideal von H.*

Beweis. Setzen wir voraus, daß $\mathfrak{a}$ nicht relativ minimal ist. Dann gibt es ein Quasiideal $\mathfrak{a}'$ mit

(24) $$\mathfrak{k} \subset \mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}.$$

Da $\mathfrak{a}'$ wegen $\mathfrak{a}\mathfrak{a}' \cap \mathfrak{a}'\mathfrak{a} \subseteqq H\mathfrak{a}' \cap \mathfrak{a}'H \subseteqq \mathfrak{a}'$ ein Quasiideal von H ist, widerspricht (24) dem Lemma 1, was den Beweis beendet.

Lemma 2 wird durch den folgenden Satz verschärft:

Satz 6. (Vgl. SCHWARZ [2] Satz 6. 2.) *Ist* $\mathfrak{l}$ *(bzw.* $\mathfrak{r}$*) ein relativ minimales Linksideal (bzw. Rechtsideal) und* $\varepsilon \in \mathfrak{l} - \mathfrak{k}$ *(bzw.* $\varepsilon \in \mathfrak{r} - \mathfrak{k}$*) ein idempotentes Element der Halbgruppe H m. e. S.-K.* $\mathfrak{k}$, *so ist* $(\mathfrak{k}, \varepsilon\mathfrak{l})$ *(bzw.* $(\mathfrak{k}, \mathfrak{r}\varepsilon)$*) eine Gruppe mit* $\mathfrak{k}$, *und zugleich ein relativ minimales Quasiideal von H.*

Beweis. Es genügt unsere Behauptung bezüglich $(\mathfrak{k}, \varepsilon\mathfrak{l})$ nachzuweisen. Da $(\mathfrak{k}, \varepsilon\mathfrak{l})$ nach Lemmas 2 und 5 ein Quasiideal von H ist, haben wir wegen Satz 5 einzusehen, daß $(\mathfrak{k}, \varepsilon\mathfrak{l})$ eine Gruppe mit $\mathfrak{k}$ ist. Da $(\mathfrak{k}, \varepsilon\mathfrak{l})$ eine Halbgruppe mit $\mathfrak{k} \subset (\mathfrak{k}, \varepsilon\mathfrak{l})$ ist, genügt es die Erfülltheit der übrigen Bedingungen der Definition 2' zu beweisen. Offenbar ist ε $(\in \mathfrak{l} - \mathfrak{k})$ ein linksseitiges Einselement von $(\mathfrak{k}, \varepsilon\mathfrak{l}) - \mathfrak{k}$. Es sei $\varepsilon\lambda$ $(\lambda \in \mathfrak{l})$ ein beliebiges Element von $(\mathfrak{k}, \varepsilon\mathfrak{l}) - \mathfrak{k}$. Wegen $\varepsilon, \lambda \in \mathfrak{l}$ und $\varepsilon^2 = \varepsilon$ gilt $\mathfrak{k} \subset (\mathfrak{k}, \mathfrak{l} \cdot \varepsilon\lambda) \subseteq \mathfrak{l}$, woraus wegen der relativen Minimalität des Linksideals $\mathfrak{l}$

$$(\mathfrak{k}, \mathfrak{l} \cdot \varepsilon\lambda) = \mathfrak{l}$$

folgt. Hiernach gilt

$$\varepsilon(\mathfrak{k}, \mathfrak{l} \cdot \varepsilon\lambda) = (\varepsilon\mathfrak{k}, \varepsilon\mathfrak{l} \cdot \varepsilon\lambda) = \varepsilon\mathfrak{l}. \tag{25}$$

Da das Element ε $(\in \varepsilon\mathfrak{l})$ in $\varepsilon\mathfrak{k}$ $(\subseteq \mathfrak{k})$ nicht enthalten ist, so muß ε nach (25) ein Element von $\varepsilon\mathfrak{l} \cdot \varepsilon\lambda$ sein. Daraus sieht man, daß es für jedes Element $\varepsilon\lambda$ $(\in (\mathfrak{k}, \varepsilon\mathfrak{l}) - \mathfrak{k})$ mindestens ein Element $\varepsilon\lambda' (\in \varepsilon\mathfrak{l})$ mit $\varepsilon\lambda' \cdot \varepsilon\lambda = \varepsilon$ gibt. $\mathfrak{k}$ enthält das Element $\varepsilon\lambda' (\in \varepsilon\mathfrak{l})$ nicht. Aus $\varepsilon\lambda' \in \mathfrak{k}$ würde nämlich $\varepsilon\lambda' \cdot \varepsilon\lambda = \varepsilon \in \mathfrak{k}$ folgen, was unserer Voraussetzung $\varepsilon \in \mathfrak{l} - \mathfrak{k}$ widerspricht. Damit ist Satz 6 bewiesen.

Literatur.

[1] A. H. CLIFFORD, Semigroups containing minimal ideals, *Amer. Journal Math.*, **70** (1948), 521—526.

[2] ŠT. SCHWARZ, On semigroups having a kernel, *Czechoslovak Math. Journal*, **1** (76) (1951), 229—264.

[3] O. STEINFELD, Über die Quasiideale von Halbgruppen, *Publicationes Math. Debrecen*, **4** (1956), 262—275.

(Eingegangen am 23. September 1957.)