Über die Punktmengen der Divergenz der singulären Integrale von Riemann-integrablen Funktionen.

Von H. ZAHORSKA in Łódż (Polen).

In dieser Arbeit werden wir notwendige und hinreichende Bedingungen für die Menge N aller Punkte x des Intervalls (a, b) angeben, in denen das singuläre Integral

$$\lim_{r\to\infty}\int_a^b K(r, t-x)f(t)\,dt = \lim_{r\to\infty}\int_a^b K(r,t)f(x+t)\,dt$$

nicht existiert, wo der Kern $K(r,t)$ die Bedingungen von FADDEEFF erfüllt und die Funktion $f(x)$ Riemann-integrabel ist. (Unter gewissen Bedingungen existieren diese Grenzwerte für $a<x<b$ gleichzeitig und sie sind gleich.)

Die Notwendigkeit der Bedingungen wird bei schwächeren Voraussetzungen bewiesen. Und zwar, der Kern $K(r, x, t)$ braucht nicht die Gestalt $K(r, t-x)$ besitzen und die Faddeeffschen Bedingungen erfüllen, es genügt, daß er quasipositiv ist.

Der Beweis des Hinreichens der Bedingungen besteht in der Konstruktion einer entsprechenden Funktion $f(x)$. Dabei kann man eine und dieselbe Funktion $f(x)$ für eine beliebige endliche Anzahl von singulären Integralen konstruieren, so daß diese alle in den Punkten der gegebenen Menge N divergent und in allen Punkten der Komplementärmenge CN zu $f(x)$ konvergent sind. Dabei darf man den Grenzübergang $r\to\infty$ für jedes einzelne singuläre Integral im allgemeinen in einer anderen Wertmenge von r vornehmen.

Notwendige Bedingungen.

Es sei $K(r, x, t)$ eine für jedes feste $r>0$ und $x\in[a, b]$ in $[a, b]$ Lebesgue-integrierbare Funktion von t. Man sagt, $K(r, x, t)$ sei ein *quasipositiver* Kern, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a) $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\int_a^b K(r, x, t)\,dt = 1;$ b) $\displaystyle\int_a^b |K(r, x, t)|\,dt < H(x),$

wo $H(x)$ eine endliche positive, von r unabhängige Funktion in $[a, b]$ ist;

$$\text{c)} \quad \lim_{r\to\infty}\Big(\int_a^{x-\delta} + \int_{x+\delta}^{b}\Big)|K(r,x,t)|\,dt = 0$$

für jedes $\delta > 0$.

Es ist bekannt, daß jeder quasipositive Kern die Eigenschaft besitzt, daß wenn man

$$Q(r,x) = \int_a^b K(r,x,t) f(t)\,dt$$

setzt, in jedem Stetigkeitspunkt $x_0 \in [a, b]$ der Funktion $f(x)$ gilt: $\lim\limits_{r\to\infty} Q(r, x_0) = f(x_0)$. Unter gewissen Voraussetzungen über $K(r,x,t)$ ist $Q(r,x)$ eine stetige Funktion von x in $[a, b]$ [1]), folglich ist die Menge N aller Punkte x, für die $\lim\limits_{r\to\infty} Q(r,x)$ nicht existiert, von der Klasse $G_{\delta\sigma}$ (vgl. HAUSDORFF [2]). Aus der Quasipositivität folgt, daß N in der Menge K aller Unstetigkeitspunkte der Funktion $f(x)$ enthalten ist; die Menge K ist von der Klasse F_σ und ist für Riemann-integrable Funktionen $f(x)$ vom Maß 0. Daraus folgt leicht:

$$(1) \qquad N = \sum_{k=1}^{\infty} N_k, \quad N_k \in G_\delta, \quad |\overline{N_k}| = 0 \quad \text{und} \quad N_k \cdot N_l = 0 \quad \text{für} \quad k \neq l.^{2})$$

(Der Beweis dieser Behauptung ist in meiner Arbeit [3] angegeben.)

Hinreichende Bedingungen.

In folgendem werden wir den folgenden Hilfssatz benötigen.

Hilfssatz. (Verallgemeinerter Satz von LUSIN—MENCHOFF.) *Für jede meßbare Menge A und abgeschlossene Mengen B, F mit $B \subset \cdot A$ und $F \subset \cdot A$,*[3]) *und für jede nicht abnehmende positive Funktion $\delta(l)$ existiert eine abge-*

---

[1]) Das bedeutet eine Voraussetzung über $K(r, x, t)$, wenn wir im allgemeinen Fall keine stärkere Voraussetzungen machen wollen, wie z. B. gleichmäßige (in Bezug auf t) Stetigkeit in $[a, b]$ nach x, oder Stetigkeit in $[a, b]$ nach x und eine Ungleichung $|K(r, x, t)| \leqq \varphi(r)$ für jedes $r > 0$, $x \in [a, b]$, $t \in [a, b]$, wo $\varphi(r)$ eine für $r > 0$ endliche Funktion ist, etc. Im Falle $K(r, x, t) = K(r, t-x)$ sind diese Voraussetzungen unnötig; für beschränkte meßbare Funktionen $f(x)$ und nach t Lebesgue-integrable $K(r, t)$ ist $Q(r, x)$ stetig nach x.

[2]) Im allgemeinen bezeichnet $\overline{N}$ die abgeschlossene Hülle von N, $|N|$ bezeichnet das Lebesguesche Maß von N, und $N \in G_\delta$ bezeichnet, daß die Menge N von der Klasse G_δ ist.

[3]) $C \subset \cdot D$ bedeutet, daß $C \subset D$ und C lauter aus Dichtigkeitspunkten von D besteht.

schlossene Menge E mit den Eigenschaften:

$$B \subset \cdot E \subset \cdot A, \quad F \subset E, \quad B \operatorname{int} A \subset \operatorname{int} E,$$

$$\frac{|(x, x+h)\cdot E|}{|h|} > \frac{|(x, x+h)\cdot A|}{|h|} - \delta\left(\frac{1}{m}\right) \text{ für jedes } x \in B \text{ und } |h| < \frac{1}{m}\text{ [4]}$$

(m eine beliebige natürliche Zahl).

(Der Beweis des Hilfssatzes befindet sich in meiner Arbeit [3].)

Es sei $a < 0 < b$. Wir betrachten ein endliches System $K_i(r, t)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ von für jedes positive r in $[a, b]$ Lebesgue-integrierbaren Funktionen, das die folgenden Bedingungen erfüllt:

I. $\int_a^b K_i(r, t)\, dt = 1; \qquad K_i(r, t) = 0$ für $t \bar{\in} [a, b] \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$

II. $\lim_{r\to\infty} \left(\int_a^{-\delta} + \int_\delta^b\right) |K_i(r, t)|\, dt = 0$ für jedes feste $\delta > 0$ und i;

III. es existiert eine solche Funktion $F(r, t)$ (die sogenannte Majorante von FADDEEFF), daß $|K_i(r, t)| < F(r, t)$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ gilt, $F(r, t)$ als Funktion von t in $[a, 0]$ nicht abnehmend und in $[0, b]$ nicht zunehmend ist, ferner

$$\int_a^b F(r, t)\, dt$$

unter einer von r unabhängigen positiven Konstante C bleibt.

Wir setzen für eine in $[a, b]$ beschränkte, Lebesgue-integrierbare Funktion $f(x)$ mit der Periode $b - a$

$$Q_i(r, x) = \int_a^b K_i(r, t) f(x + t)\, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Wir werden den folgenden Satz beweisen.

S a t z. *Für jedes Kernsystem* $K_i(r, t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *das die Bedingungen* I, II, III *erfüllt, für jede Menge* N $(\subset [a, b])$ *von reellen Zahlen, die die Bedingungen* (1) *erfüllt, und für beliebig vorgegebene nach oben nicht beschränkte Mengen* R_i *von reellen Zahlen* $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *existiert eine in* $[a, b]$ *beschränkte, Riemann-integrierbare Funktion* $f(x)$, *mit der Periode* $b - a$, *so daß*

$$\limsup_{r \in R_i,\, r\to\infty} Q_i(r, x) - \liminf_{r \in R_i,\, r\to\infty} Q_i(r, x) > 0$$

für $x \in N$ *und*

$$\lim_{r\to\infty} Q_i(r, x) = f(x)$$

für $x \in CN$ *gilt* $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

[4]) Hier soll (α, β) dasselbe wie (β, α) bedeuten (offenes Intervall) wenn wir nicht wissen, ob $\alpha < \beta$ oder $\alpha > \beta$ ist; int A bezeichnet den offenen Kern der Menge A.

B e w e i s. Zuerst werden wir den Beweis für den Sonderfall $N \in G_\delta$ und $|\bar{N}| = 0$ durchführen. Da die Mengen R_i nach oben nicht beschränkt sind, kann man eine wachsende unendliche Folge $\{r_k\}$ so bestimmen, daß die Bedingungen

$$r_{mn+i} \in R_i \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots; \; i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$r_{mn+i} > 2^{m+1} \qquad (m = 0. 1, 2, \ldots)$$

erfüllt sind.

Wir bestimmen die Funktion $\alpha(s)$ folgendermaßen: es sei $m(s)$ die kleinste natürliche Zahl, für die im Falle $m \geqq m(s)$

$$(2) \qquad \Big(\int_a^{-s} + \int_s^b\Big) |K_i(r_{mn+i}, t)| \, dt < 0{,}2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

gilt. Eine solche Zahl existiert für jedes $s > 0$, da die Kerne $K_i(r, t)$ die Bedingung II erfüllen. Wir bezeichnen für jedes $r > 0$ und $i = 1, 2, \ldots, n$ mit $\eta_i(r)$ die größte positive Zahl, die die folgende Bedingung erfüllt: für eine beliebige Menge M' $(\subset [a, b])$ vom Maß $< \eta_i(r)$ gilt

$$\int_{M'} |K_i(r, t)| \, dt < 0{,}1,$$

und wir setzen für jedes $s > 0$

$$\eta^*(s) = \min_{1 \leqq i \leqq n} \eta_i(r_{m(s)n+i}).$$

So erhalten wir für jede Menge M mit $|M| < \eta^*(s)$ $(s > 0)$

$$(3) \qquad \int_M |K_i(r_{m(s)n+i}, t)| \, dt < 0{,}1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Aus (2) und (3) ergibt sich $\eta^*(s) < 2s$; im entgegensetzten Fall wäre ja

$$\int_a^b |K_i(r_{m(s)n+i}, t)| \, dt < 0{,}3,$$

was der Bedingung I widerspricht.

Wir setzen

$$(4) \qquad \alpha(s) = \begin{cases} \inf\limits_{s \leqq x \leqq 1} \dfrac{\eta^*(x)}{2x} & \text{für} \quad s \leqq 1, \\[2ex] \dfrac{\eta^*(1)}{2} & \text{für} \quad s > 1. \end{cases}$$

Die Funktion $\alpha(s)$ ist offenbar nicht abnehmend. Sie ist auch positiv. Im entgegengesetzten Fall gäbe es nämlich ein s_0 $(0 < s_0 < 1)$ mit $\alpha(s_0) = 0$, also nach (4) mit

$$(5) \qquad \inf_{s_0 \leqq x \leqq 1} \eta^*(x) = 0.$$

Für $x \geqq s_0$ ist aber $m(s_0) \geqq m(x)$ und so gilt

$$\inf_{s_0 \leqq x \leqq 1} \eta^*(x) \geqq \min_{\substack{1 \leqq m \leqq m(s_0) \\ 1 \leqq i \leqq n}} \eta_i(r_{mn+i}) > 0,$$

im Gegensatz zu (5). Aus (4) folgt außerdem für jedes positive s,

$$\alpha(s) \leqq \frac{\eta^*(s)}{2s} < 1. \tag{6}$$

Mit Hilfe der Funktion $\alpha(s)$ soll die Funktion $\delta(l)$ bestimmt werden, mit der wir den verallgemeinerten Satz von LUSIN—MENCHOFF anwenden. Es sei $\delta(l) = \alpha(2^{-2} l)$ für $l > 0$. Dann ist $\delta(l)$ für $l > 0$ positiv und nicht abnehmend.

Nach der Voraussetzung ist $N \in G_\delta$ und $|\bar{N}| = 0$. Also ist

$$N = \prod_{k=1}^{\infty} G_k,$$

wo die G_k ($\subset [a, b]$) offene Mengen sind. Setzen wir $F_k = CG_k$, wo CG_k die Menge $[a, b] - G_k$ bezeichnet, so ist

$$CN = \sum_{k=1}^{\infty} F_k. \tag{7}$$

Wir bestimmen mit vollständiger Induktion eine Folge $\{L_k\}$ von abgeschlossenen Mengen von $[a, b]$ derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\sum_{k=1}^{\infty} L_k = CN, \tag{8}$$

$$\begin{cases} L_{p-1} \subset \cdot L_p \subset \cdot CN \quad \text{für} \quad p = 2, 3, \ldots, \quad F_p \subset L_p \quad \text{für} \quad p = 1, 2, \ldots, \\ L_{p-1} \cdot C\bar{N} \subset \operatorname{int} L_p \quad \text{für} \quad p = 2, 3, \ldots, \\ \dfrac{|(x, x+h) \cdot L_p|}{|h|} > 1 - \delta\left(\dfrac{1}{m}\right) \quad \text{für} \quad x \in L_{p-1} \quad \text{und} \quad |h| < \dfrac{1}{m}, \; p = 2, 3, \ldots, \end{cases} \tag{9}$$

wo m eine beliebige natürliche Zahl ist und $\delta(l)$ die oben definierte Funktion bezeichnet.

Wir setzen $L_1 = F_1 = CG_1$. Es sei (mit den Bezeichnungen des Hilfssatzes) $CN = A$, $L_1 = B$ und $F_2 = F$. Es existiert also nach dem Hilfssatz eine abgeschlossene Menge $E = L_2$ mit den Eigenschaften

$$L_1 \subset \cdot L_2 \subset \cdot CN, \quad F_2 \subset L_2, \quad L_1 \cdot C\bar{N} = L_1 \cdot \operatorname{int} CN \subset \operatorname{int} L_2$$

und

$$\frac{|(x, x+h) \cdot L_2|}{|h|} > 1 - \delta\left(\frac{1}{m}\right) \quad \text{für jedes } x \in L_1 \text{ und } |h| < \frac{1}{m},$$

wo m eine beliebige natürliche Zahl ist.

Es sei k ($\geqq 2$) eine beliebige natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Mengen $L_1, L_2, \ldots, L_k$ schon definiert sind, derart, daß die Bedingungen (9) für $p = 1, 2, \ldots, k$ erfüllt werden. Wir wenden den Hilfssatz mit der oben bestimmten Funktion $\delta(l)$ an, mit den Bezeichnungen $CN = A$, $L_k = B$ und $F_{k+1} = F$. Nach dem Hilfssatz gibt es eine Menge $E = L_{k+1}$ mit den Eigenschaften: $L_k \subset \cdot L_{k+1} \subset \cdot CN$, $F_{k+1} \subset L_{k+1}$, $C\bar{N} \cdot L_k \subset \operatorname{int} L_{k+1}$, und $|h|^{-1} \cdot |(x, x+h) \cdot \cdot L_{k+1}| > 1 - \delta\left(\frac{1}{m}\right)$ für $x \in L_k$ und $|h| < \frac{1}{m}$. Infolgedessen sind die Bedingungen (9) für $p = k+1$ erfüllt. Mit vollständiger Induktion erhalten wir auf diese Weise eine Mengenfolge $\{L_k\}$, für die die Bedingung (9) erfüllt wird. Da nach (7), (9)

$$CN = \sum_{k=1}^{\infty} F_k \subset \sum_{k=1}^{\infty} L_k \subset CN$$

besteht, so gilt auch (8).

Wir bestimmen jetzt die abgeschlossenen Mengen $L_{\frac{m}{2^k}}$ für jede natürliche m und ganze nicht negative k, welche die Ungleichung $m \geqq 2^k$ erfüllen, derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$L_{\frac{m_1}{2^k}} \subset \cdot L_{\frac{m_2}{2^k}} \quad \text{für} \quad m_1 < m_2, \tag{10}$$

$$L_{\frac{m_1}{2^k}} \cdot \operatorname{int} L_{\frac{m_3}{2^k}} \subset \operatorname{int} L_{\frac{m_2}{2^k}} \quad \text{für} \quad m_1 < m_2 < m_3. \tag{11}$$

Es sei $L_{\frac{m}{2^0}} = L_m$ ($m = 1, 2, \ldots$). Offensichtlich sind diese Bedingungen für $k = 0$ nach (9) erfüllt. Es sei k ($\geqq 0$) eine beliebige ganze Zahl. Nehmen wir an, daß die abgeschlossenen Mengen $L_{\frac{m}{2^k}}$ ($m \geqq 2^k$) schon definiert wurden, derart, daß die Bedingungen (10) und (11) erfüllt sind. Wir bestimmen die Mengen $L_{\frac{m}{2^{k+1}}}$ wie folgt. Es sei $L_{\frac{2r}{2^{k+1}}} = L_{\frac{r}{2^k}}$ ($r = 2^k, 2^k+1, \ldots$). Mit Anwendung des Hilfssatzes ergibt sich eine abgeschlossene Menge $E = L_{\frac{2r+1}{2^{k+1}}}$, für die die Relationen

$$L_{\frac{r}{2^k}} \subset \cdot L_{\frac{2r+1}{2^{k+1}}} \subset \cdot L_{\frac{r+1}{2^k}} \quad \text{und} \quad L_{\frac{r}{2^k}} \cdot \operatorname{int} L_{\frac{r+1}{2^k}} \subset \operatorname{int} L_{\frac{2r+1}{2^{k+1}}}$$

bestehen, d. h. (10) und (11) für $k+1$ anstatt k. Also können diese Mengen für jede natürliche Zahl k mit vollständiger Induktion bestimmt werden. Sie erfüllen also nach (10), (11) auch die Bedingungen

$$L_{\frac{m}{2^k}} \subset \cdot L_{\frac{v}{2^r}} \quad \text{für} \quad \frac{m}{2^k} < \frac{v}{2^r}, \tag{12}$$

$$L_{\frac{p}{2^l}} \cdot \operatorname{int} L_{\frac{v}{2^r}} \subset \operatorname{int} L_{\frac{m}{2^k}} \quad \text{für} \quad 1 \leqq \frac{p}{2^l} < \frac{m}{2^k} < \frac{v}{2^r}. \tag{13}$$

Wir setzen endlich für jedes reelle $\lambda \geqq 1$

(14) $$L_\lambda = \prod_{\frac{m}{2^k} \geqq \lambda} L_{\frac{m}{2^k}}.$$

Die Mengen L_λ sind abgeschlossen und erfüllen die Bedingungen

(15) $$L_{\lambda_0} \subset \cdot L_{\lambda_1} \quad \text{für} \quad 1 \leqq \lambda_0 < \lambda_1,$$

(16) $$L_{\lambda_0} \cdot \operatorname{int} L_{\lambda_2} \subset \operatorname{int} L_{\lambda_1} \quad \text{für} \quad 1 \leqq \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2,$$

dabei stimmt für $\lambda = 2^{-k} m$ die Definition von L_λ mit der vorhergehenden überein.

Tatsächlich, die Formel (14) zieht $L_{\lambda_1} \subset L_{\lambda_2}$ für $\lambda_1 < \lambda_2$ nach sich. Wir wählen drei rationale Zahlen, deren Nenner Potenzen von 2 sind, derart, daß die Ungleichungen $\lambda_0 < \frac{p}{2^l} < \frac{m}{2^k} < \lambda_1 < \lambda_2 < \frac{r}{2^r}$ bestehen. Dann erhalten wir nach (13) $L_{\lambda_0} \cdot \operatorname{int} L_{\lambda_2} \subset L_{\frac{p}{2^l}} \cdot \operatorname{int} L_{\frac{r}{2^r}} \subset \operatorname{int} L_{\frac{m}{2^k}} \subset \operatorname{int} L_{\lambda_1}$, also ist (16) bewiesen, und nach (12) gilt $L_{\lambda_0} \subset L_{\frac{p}{2^l}} \subset \cdot L_{\frac{m}{2^k}} \subset L_{\lambda_1}$, woraus (15) folgt.

Es sei für jedes $x \in CN$

(17) $$\omega(x) = \inf \underset{\lambda}{E} \{x \in L_\lambda\}.$$

Wir beweisen, daß $\omega(x)$ in CN endlich und approximativ stetig, in $C\bar{N}$ stetig ist. Offensichtlich ist nach (8) $\omega(x)$ endlich in CN. Es gilt $\omega(x) \leqq k$ für $x \in L_k$ und $\omega(x) \geqq k$ für $x \bar{\in} L_k$, demnach ist

(18) $$k \leqq \omega(x) \leqq k+1 \quad \text{für} \quad x \in L_{k+1} - L_k.$$

Für ein beliebiges $x_0 \in CN$ betrachten wir die Zahl $\omega(x_0) - \varepsilon$, wo ε eine beliebige positive Zahl ist. Nach (17) erhalten wir $x_0 \bar{\in} L_{\omega(x_0)-\varepsilon}$, also ist $\operatorname{dist}(x_0, L_{\omega(x_0)-\varepsilon}) = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$,[5]) und nach (15) ist $\operatorname{dist}(x_0, L_\lambda) \geqq \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ für jedes $\lambda \leqq \omega(x_0) - \varepsilon$. Es liegen also von den Punkten $x \in CN$ im Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $(\delta = \delta(x_0, \varepsilon))$ nur jene, welche zu L_λ mit $\lambda > \omega(x_0) - \varepsilon$ gehören, und so ist nach (17) $\omega(x) \geqq \omega(x_0) - \varepsilon$ für jedes $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cdot CN$, d. h. $\omega(x)$ ist halbstetig von unten auf CN im Punkt x_0. Betrachten wir jetzt die Zahl $\omega(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$. Nach (17) und (15) erhalten wir $x_0 \in L_{\omega(x_0)+\frac{\varepsilon}{2}} \subset \cdot L_{\omega(x_0)+\varepsilon}$. Für $x \in L_{\omega(x_0)+\varepsilon}$ ist $\omega(x) \leqq \omega(x_0) + \varepsilon$ nach (17), also ist der Punkt x_0 ein Dichtigkeitspunkt der Menge $\underset{x}{E}[\omega(x) \leqq \omega(x_0) + \varepsilon]$, d. h. $\omega(x)$ ist approximativ halbstetig von oben im Punkt x_0. Da $|N| = 0$ ist, so ist $\omega(x)$ nach den obigen approximativ stetig in CN.

---

[5]) Im allgemeinen bezeichnet dist (a, A) die Entfernung des Punktes a von der Menge A.

Ist $x_0 \in C\bar{N} = \operatorname{int} CN \subset CN$, so gilt $x_0 \in L_{\omega(x_0)+\frac{\varepsilon}{2}}$ und $x_0 \in L_k$, wo k eine natürliche Zahl $> \omega(x_0) + \varepsilon$ ist. Nach (9) ist dann $x_0 \in \operatorname{int} L_{k+1}$. Auf Grund von $x_0 \in L_{\omega(x_0)+\frac{\varepsilon}{2}}$ und $k+1 > \omega(x_0) + \varepsilon > \omega(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$ gilt also nach (16) $x_0 \in \operatorname{int} L_{\omega(x_0)+\varepsilon}$. Es existiert daher ein solches $\eta > 0$, daß $(x_0 - \eta, x_0 + \eta) \subset \subset L_{\omega(x_0)+\varepsilon}$ ist. Dann ist $\omega(x) \leqq \omega(x_0) + \varepsilon$ für jedes $x \in (x_0 - \eta, x_0 + \eta)$, d. h. $\omega(x)$ ist halbstetig von oben in x_0. Daraus folgt nach den obigen, auf Grund der Abgeschlossenheit von $\bar{N}$, daß $\omega(x)$ in allen Punkten von $C\bar{N}$ stetig ist.

Die Funktion $\omega(x)$ ist fast überall bestimmt, und zwar für jeden Punkt von CN. Durch beliebige Bestimmung der Werte von $\omega(x)$ in den übrigen Punkten wird ihre approximative Stetigkeit in den Punkten der Menge CN nicht verändert. Auch ihre Stetigkeit in den Punkten der Menge $C\bar{N}$ ändert sich nicht, da eine gewisse Umgebung dieser Punkte zu $C\bar{N}$, daher auch zu CN gehört, d. h. die Funktion $\omega(x)$ ist in diesen Umgebungen bestimmt und die zusätzliche Bestimmung in N (in den übrigen Punkten) die Werte in diesen Umgebungen nicht betrifft. (Man kann so nur die Halbstetigkeit der Funktion $\omega(x)$ von unten in $CN - C\bar{N}$ ändern. Man kann beweisen, daß wenn wir z. B. $\omega(x) = \text{const.}$ in N setzen, wird $\omega(x)$ in allen Punkten von N halbstetig von unten, das ist aber für diese Arbeit nicht nötig.)

Setzen wir endlich $\omega(x) = 1$ für $x \in N$; dann ist $\omega(x)$ überall in $[a, b]$ bestimmt und endlich.

Wir bestimmen für $y \geqq 1$ eine stetige Funktion $d(y)$. Es sei $d(1) = 1$, $d(y) = 2k+1$ für jedes $y \in [2k, 2k+1]$, $k = 1, 2, \ldots$, und linear in den übrigen Intervallen. Sie ist nicht abnehmend. Es sei

$$\Omega(x) = d[\omega(x)].$$

Die Funktion $\Omega(x)$ ist überall bestimmt, endlich, approximativ stetig in CN und stetig in $C\bar{N}$. Nachdem $\omega(x) \geqq 1$ ist, erfüllt $\Omega(x)$ nach (18) die Bedingung

$$(19) \qquad \Omega(x) = 2k+1 \quad \text{für jedes} \quad x \in L_{2k+1} - L_{2k}.$$

Jetzt kann mann die Funktion $f(x) = a(x)$ bestimmen: es sei

$$(20) \qquad a(x) = \sin \frac{\pi}{2} \Omega(x).$$

Nehmen wir an, daß $a(x)$ mit der Periode $b - a$ periodisch fortgesetzt ist. Diese Funktion ist überall bestimmt, beschränkt, stetig in $C\bar{N}$ und approximativ stetig in CN, also ist Riemann-integrabel, dabei ist nach (19) und (20)

$$(21) \qquad a(x) = 1 \quad \text{für} \quad x \in L_{4k+1} - L_{4k},$$

$$(22) \qquad a(x) = -1 \quad \text{für} \quad x \in L_{4k+3} - L_{4k+2}.$$

Die Punkte der approximativen Stetigkeit einer beschränkten Funktion sind bekanntlich ihre Lebesgueschen Punkte. Daraus folgt nach dem Satz von FADDEEFF [1], daß

$$(23)\qquad \lim_{r\to\infty}\int_a^b K_i(r,t)a(x+t)dt=a(x)\quad \text{für}\quad x\in CN,\quad i=1,2,\dots,n$$

gilt, da nach I, II, III die Kerne $K_i(r,t)$ $(i=1,2,\dots,n)$ die Voraussetzungen des Satzes von FADDEEFF erfüllen.

Wir beweisen, daß für jedes $x\in N$ die Grenze (23) nicht existiert. Es sei $x\in N$. Wir erhalten dann $x\in\prod_{k=1}^{\infty}CL_k$, $CL_{4k+1}\subset CL_{4k}$ $(k=1,2,\dots)$, und $\lim_{k\to\infty}|CL_{4k}|=0$, also gelten $\operatorname{dist}(x,L_k)=d_k(x)>0$, $d_{k+1}(x)\leqq d_k(x)$ $(k=1,2,\dots)$ und $\lim_{k\to\infty}d_k(x)=0$, da für $k\to\infty, |CL_k|\to 0$ ist. Wir betrachten die Folgen $\{L_{4k-1}\}$, $\{L_{4k+1}\}$.

Wir bezeichnen $d_{4k}(x)=u_k'=u$, und $m[d_{4k}(x)]=m_k'=m'$. Nach (2) erhalten wir

$$(24)\qquad \left|\left(\int_a^{-u}+\int_u^b\right)K_i(r_{m'n+i},t)a(x+t)\,dt\right|\leqq\left(\int_a^{-u}+\int_u^b\right)|K_i(r_{m'n+i},t)|\,dt<0{,}2$$

$$\text{für}\quad i=1,2,\dots,n.$$

Wenigstens eine der Zahlen $x-u$, $x+u$ gehört zu L_{4k} und es gilt

$$(25)\qquad (x-u,x+u)\subset CL_{4k},$$

(da $u=\operatorname{dist}(x,L_{4k})$ ist). Es sei z. B. $x+u\in L_{4k}$. Wir schätzen das Maß $\nu=\nu_k$ der Menge $(x-u,x+u)\cdot CL_{4k+1}$ ab. Wegen $u=u_k'=d_{4k}(x)\to 0$ gibt es für jedes genügend große k eine natürliche Zahl m mit $\frac{1}{m+2}\leqq 2u<\frac{1}{m+1}$. Da $x+u\in L_{4k}$ ist, so gilt nach (9)

$$(26)\qquad \frac{|(x-u,x+u)\cdot L_{4k+1}|}{2u}>1-\delta\left(\frac{1}{m+1}\right).$$

Daraus folgt $\frac{1}{m+1}<\frac{2}{m+2}\leqq 4u$. Wir erhalten also für genügend großes k

$$\delta\left(\frac{1}{m+1}\right)\leqq\delta(4u)=\alpha(2^{-2}\cdot 4u)=\alpha(u),\qquad 1-\delta\left(\frac{1}{m+1}\right)\geqq 1-\alpha(u),$$

woraus nach (26) folgt

$$(27)\qquad \frac{|(x-u,x+u)\cdot L_{4k+1}|}{2u}>1-\alpha(u).$$

Da $(x-u,x+u)\cdot L_{4k+1}+(x-u,x+u)\cdot CL_{4k+1}=(x-u,x+u)$ ist, so erhalten wir nach (27) $2^{-1}u^{-1}\cdot|(x-u, x+u)\cdot CL_{4k+1}| < \alpha(u)$, d. h. ist $\nu < 2u\alpha(u)$ für genügend große k. Diese Formel und (6) ergeben für genügend große k:

$$\nu < \eta^*(u).$$

Aus (3) erhalten wir für genügend große k:

$$\text{(28)} \qquad \Big|\int_{M_1} K_i(r_{m'n+i}, t)a(x+t)dt\Big| \leqq \int_{M_1} |K_i(r_{m'n+i}, t)|dt < 0{,}1$$

$(i=1, 2, \ldots, n)$, wo M_1 aus jenen Punkten t besteht, für welche $x+t \in (x-u, x+u)\cdot CL_{4k+1}$ gilt. Nach (25) ist

$$\text{(29)} \qquad (x-u, x+u)\cdot(L_{4k+1}-L_{4k}) = (x-u, x+u)\cdot L_{4k+1}.$$

Nach (28) und (24) gilt für genügend große k:

$$\text{(30)} \qquad \int_a^b K_i(r_{m'n+i}, t)a(x+t)\,dt \geqq \Big(-\int_u^{-u} - \int_u^b\Big)|K_i(r_{m'n+i}, t)|dt -$$

$$-\int_{M_1}|K_i(r_{m'n+i}, t)|\,dt + \int_{M_2} K_i(r_{m'n+i}, t)\,dt > \int_{M_2} K_i(r_{m'n+i}, t)\,dt - 0{,}3$$

$(i=1, 2, \ldots, n)$, wo M_2 die Menge derjenigen Punkte t bedeutet, für welche $x+t \in (x-u, x+u)\cdot L_{4k+1}$ ist, da nach (21) und (29) $a(x+t)=1$ für jedes $t \in M_2$ gilt. Auf analoge Weise folgt aus I, (28) und (24) für genügend große k und für $i=1, 2, \ldots, n$

$$\int_{M_2} K_i(r_{m'n+i}, t)\,dt \geqq \int_a^b K_i(r_{m'n+i}, t)\,dt - \Big(\int_a^{-u} + \int_u^b\Big)|K_i(r_{m'n+i}, t)|\,dt -$$

$$-\int_{M_1}|K_i(r_{m'n+i}, t)|\,dt > 1 - 0{,}3 = 0{,}7,$$

also nach (30) haben wir für $i=1, 2, \ldots, n$:

$$\int_a^b K_i(r_{m'n+i}, t)\cdot a(x+t)\,dt > 0{,}7 - 0{,}3 = 0{,}4.$$

Auf Grund von (22) beweisen wir die analoge Ungleichung für $m'' = m[d_{4k+2}(x)]$ und für genügend große k:

$$\int_a^b K_i(r_{m''n+i}, t)a(x+t)\,dt < -0{,}4 \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Die Indexe $m'=m'_k$, $m''=m''_k$ sind nicht abnehmende und nicht beschränkte Funktionen von k, denn im entgegengesetzten Fall wäre nach (24) für einen gewissen Wert m_0 und u von beliebiger Kleinheit (da $u=d_{4k}(x)\to 0$, oder $u=d_{4k+2}(x)\to 0$ bei $k\to\infty$)

$$\Big(\int_a^{-u} + \int_u^b\Big)|K_i(r_{m_0 n+i}, t)|\,dt < 0{,}2,$$

was mit I im Widerspruch steht.

Auf diese Weise haben wir zwei solche Folgen $r_{m'_k n+i} \to \infty$, $r_{m''_k n+i} \to \infty$, ($m'_k \to \infty$, $m''_k \to \infty$ bei $k \to \infty$) bestimmt, daß $\limsup\limits_{k\to\infty} Q_i(r_{m'_k n+i}, x) \geqq 0{,}4$ und $\liminf\limits_{k\to\infty} Q_i(r_{m''_k n+i}, x) \leqq -0{,}4$ ($r_{m'_k n+i} \in R_i$, $r_{m''_k n+i} \in R_i$) für jedes $x \in N$ und $i = 1, 2, \ldots, n$ besteht. Daraus folgt $\limsup\limits_{r\to\infty} Q_i(r, x) - \liminf\limits_{r\to\infty} Q_i(r, x) \geqq 0{,}8$ ($r \in R_i$) für $x \in N$ und $i = 1, 2, \ldots, n$.

Der Satz ist also für den Spezialfall $N \in G_\delta$ bewiesen. Im allgemeinen Fall haben wir $N = \sum\limits_{k=1}^{\infty} N_k$, wo $N_k \in G_\delta$, $N_k \cdot N_l = 0$ für $k \neq l$ und $|\bar{N}_k| = 0$ ($k = 1, 2, \ldots$) ist. Es existiert also nach dem betrachteten Spezialfall für jedes natürliche k eine in $[a, b]$ Riemann-integrable Funktion $a_k(x)$ mit $|a_k(x)| \leqq 1$, die periodisch mit der Periode $b-a$ ist, und für welche die Operationen (die singulären Integrale) konvergent zu $a_k(x)$ auf CN_k und divergent auf N_k sind.

Wir werden zeigen, daß die Funktion

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} a_k(x) \tag{31}$$

alle Bedingungen des Satzes erfüllt.

Es sei $x \in CN$, d. h. $x \in CN_k$ für jedes k. Dann hat man für $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\lim_{r\to\infty} \int_a^b K_i(r, t) a_k(x+t)\, dt = a_k(x). \tag{32}$$

Wir beweisen, daß für $i = 1, 2, \ldots, n$ auch

$$\lim_{r\to\infty} \int_a^b K_i(r, t) f(x+t)\, dt = f(x) \tag{33}$$

gilt. Nach I und III ist für jedes positive r

$$1 = \int_a^b K_i(r, t)\, dt \leqq \int_a^b |K_i(r, t)|\, dt \leqq C.$$

Also, gilt $|\varphi(x)| \leqq C_1$ für jedes $x \in [a, b]$, so hat man für jedes positive r

$$\left| \int_a^b K_i(r, t) \varphi(x+t)\, dt \right| \leqq C_1 C.$$

Es sei ε eine beliebige positive Zahl. Wir wählen $k_0(\varepsilon) = k_0$ derart, daß $2^{-k_0} \leqq \varepsilon \cdot 2^{-2} C^{-1}$ gilt. Dan ist für jedes $r > 0$

$$\left| \int_a^b K_i(r, t) \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{a_k(x+t)}{2^k}\, dt \right| \leqq 2^{-k_0} C \leqq \frac{\varepsilon}{4}. \tag{34}$$

Nach (32) kann man $r_0(k_0, \varepsilon) = r_0$ so wählen, daß für jedes $r > r_0$

$$(35) \qquad \left| \int_a^b K_i(r, t) \sum_{k=1}^{k_0} 2^{-k} a_k(x+t) - \sum_{k=1}^{k_0} 2^{-k} a_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

besteht. Daraus, nach (34) und (35) folgt

$$\left| \int_a^b K_i(r, t) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} a_k(x+t)\, dt - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} a_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4c} \leqq \varepsilon$$

für jedes $r > r_0$, womit nach (31) die Formel (33) bewiesen ist.

Es sei nun x_0 ein Punkt von N; dann ist $x_0 \in N_{k_0}$ für ein gewisses $k_0 = k_0(x_0)$ und $x_0 \in CN_k$ für alle anderen Werte von k. Für die Reihe (31) ohne das Glied mit dem Index k_0 sind alle Operationen konvergent im Punkt x_0 und für das Glied mit dem Index k_0 sind sie divergent auf N_{k_0}, insbesondere im Punkt x_0. Sie sind also divergent im Punkt x_0 für die ganze Reihe, was zu beweisen war.

Nach (20) ist die Funktion (31) beschränkt,

$$|f(x)| \leqq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1,$$

überall bestimmt und die Funktionen $a_k(x)$ sind Riemann-integrabel. Laut dem Satz über gleichmäßig konvergente Reihen von Riemann-integrablen Funktionen ist die Funktion $f(x)$ selbst Riemann-integrabel.

Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Menge N, wenn die Funktion $f(x)$ Lebesgue-integrabel ist, sind in der Arbeit [4] von Z. ZAHORSKI angegeben. Analog zu den Korollaren der Arbeit [4] folgt

K o r o l l a r I. *Bedingung* (1) *ist notwendig und hinreichend dafür, daß die Menge N gleich der Menge aller Divergenzpunkte der Summation der Fourierschen Reihe einer Riemann-integrablen Funktion ist, nach der Methode von Fejér, von Cesàro mit positiver Ordnung, oder von Abel—Poisson.*

Differentiation des bestimmten Integrals nach der oberen Grenze ist eine Operation mit einem Kern von FADDEEFF. Z. B. ist der Kern der rechtsseitigen Ableitung, $K_1(r, t)$, gleich r für $t \in \left[0, \frac{1}{r}\right]$ und gleich 0 für $t \bar{\in} \left[0, \frac{1}{r}\right]$ $(r > 0)$. Der Kern der linksseitigen Ableitung, $K_2(r, t)$, ist gleich r für $t \in \left[-\frac{1}{r}, 0\right]$, und gleich 0 für $t \bar{\in} \left[-\frac{1}{r}, 0\right]$. Endlich ist der Kern der symmetrischen Ableitung, $K_3(r, t)$, gleich $\frac{r}{2}$ für $t \in \left[-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right]$, und gleich 0 für

$t \overline{\in} \left[-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right]$. Der Riemann-integrablen Funktion $f(x)$ entspricht die Funktion $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, die die Lipschitz-Bedingung erfüllt. Es ist z. B. $\lim_{r\to\infty} \int_a^b K_3(r, t) f(x+t)\,dt = \varphi'_{\text{sym}}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x-h)}{2h}$. Wenn wir also $n=3$ und $R_1 = R_2 = R_3 = (0, \infty)$ setzen, so folgt:

Korollar II. *Bedingung* (1) *ist notwendig und hinreichend dafür, daß die Menge N gleich der Menge aller Nichtdifferenzierbarkeitspunkten eines bestimmten Riemannschen Integrals nach der oberen Grenze sei. Dabei kann man erreichen, daß die Funktion $\varphi(x)$ für $x \in N$ weder eine rechtsseitige oder linksseitige, noch eine symmetrische Ableitung besitzt, für $x \overline{\in} N$ aber $\varphi'(x) = f(x)$ ist.*

Literaturverzeichnis.

[1] D. K. Faddeeff, Über die Darstellung der summierbaren Funktionen in den Punkten von Lebesgue durch singuläre Integrale, *Mat. Sbornik*, **1** (**43**) (1936), 351—368.

[2] F. Hausdorff, *Mengenlehre*, 2. Auflage (Berlin und Leipzig, 1927).

[3] H. Zahorska, Charakterisierung der Menge von Nichtexistenzpunkten des Randwertes harmonischer beschränkter Funktionen, *Fundamenta Math.*, **43** (1956), 338—357.

[4] Z. Zahorski, Sur les ensembles des points de divergence de certaines intégrales singulières, *Ann. de la Soc. Polonaise de Math.*, **19** (1946), 66—105.

(Eingegangen am 23. Juli 1957.)