Über die orthogonalen Funktionen. IV (Starke Summation.)

Von KÁROLY TANDORI in Szeged.

Einleitung.

Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein im Intervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem und $\{c_n\}$ eine Folge von reellen Zahlen mit $\{c_n\} \in l^2$, d. h. mit

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^2 < \infty.$$

Wenn die orthogonale Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x) \tag{1}$$

im Intervall $[a, b]$ fast überall zur Funktion $f(x)$ $(C, 1)$-summierbar ist, so ist in $[a, b]$ fast überall

$$\sum_{k=0}^{N} (s_k(x) - f(x))^2 = o(N),$$

wo $s_k(x)$ die k-te Partialsumme der Reihe (1) bezeichnet:

$$s_k(x) = \sum_{\nu=0}^{k} c_\nu \varphi_\nu(x) \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

(siehe A. ZYGMUND [1]).

Man kann das Problem stellen, ob unter diesen Voraussetzungen die Abschätzung

$$\sum_{k=1}^{N} (s_{\nu_k}(x) - f(x))^2 = o(N) \tag{2}$$

sogar für jede Indexfolge $\nu_1 < \nu_2 < \cdots$ fast überall gilt.

Ähnliches Problem hat Z. ZALCWASSER [1] für die quadratisch-integrierbaren Fourierreihen gestellt.

Unter gewissen weiteren Annahmen bezüglich der Koeffizienten beantwortete G. ALEXITS dieses Problem positiv. Er zeigte nämlich, daß unter der weiteren Bedingung:

$$c_\nu = O\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}\,\lambda_\nu}\right),$$

wobei $\{\lambda_\nu\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Folge mit monoton nichtabnehmendem $\frac{\nu}{\lambda_\nu}$ ist, für jeden Parameterwert $\alpha > \frac{1}{2}$ und für jede Indexfolge $\nu_1 < \cdots < \nu_k < \cdots$ im Intervall $[a, b]$ fast überall gilt:

$$\sum_{k=1}^{N} (\sigma_{\nu_k}^{(\alpha-1)}(x) - f(x))^2 = o(N), \tag{3}$$

wobei $\sigma_k^{(\alpha-1)}(x)$ das k-te $(C, \alpha-1)$-Mittel der Reihe (1) bezeichnet.

Für $\alpha = 1$ reduziert sich (3) auf (2).

Im Paragraphen 1 wird ein Satz bewiesen, der sich nur auf den Fall $\alpha = 1$ bezieht, jedoch für die Koeffizienten wenigere Beschränkung stellt.

Satz I. *Es sei $\{c_\nu^*\} \in l^2$ eine positive Zahlenfolge mit*

$$\sqrt{\nu}\, c_\nu^* \geqq \sqrt{\nu+1}\, c_{\nu+1}^* \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

und $\{c_\nu\}$ eine beliebige Folge von reellen Zahlen mit

$$c_\nu = O(c_\nu^*). \tag{5}$$

Ist die mit diesen Koeffizienten c_ν gebildete Reihe (1) *fast überall in* $[a, b]$ *zur Funktion $f(x)$ $(C, 1)$-summierbar, so besteht* (2) *für jede Indexfolge $\nu_1 < \cdots < \nu_k < \cdots$ fast überall in* $[a, b]$.

Da für jedes N

$$\left| \frac{s_{\nu_1}(x) + \cdots + s_{\nu_N}(x)}{N} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (s_{\nu_k}(x) - f(x)) \right| \leqq$$
$$\leqq \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (s_{\nu_k}(x) - f(x))^2}$$

ist, folgt aus (2) für jede Indexfolge $\nu_1 < \cdots < \nu_k < \cdots$

$$\frac{s_{\nu_1}(x) + \cdots + s_{\nu_N}(x)}{N} \to f(x)$$

fast überall in $[a, b]$.

Im Paragraphen 2 werden wir zeigen, daß diese Behauptung im allgemeinen, ohne weitere Bedingungen bezüglich der Koeffizienten, nicht gültig ist. Es gilt nämlich der

Satz II. *Es existiert ein im Intervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_\nu(x)\}$, eine Koeffizientenfolge $\{c_\nu\} \in l^2$ und eine Indexfolge $\{\nu_k\}$ derart, daß die Reihe*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \Phi_\nu(x) \tag{6}$$

in $[a, b]$ fast überall zu einer quadratisch-integrierbaren Funktion $f(x)$ $(C, 1)$-summierbar ist und doch die Folge der Mittel

$$\frac{S_{\nu_1}(x)+\cdots+S_{\nu_N}(x)}{N} \tag{7}$$

in $[a, b]$ fast überall divergiert, wobei $S_k(x)$ die k-te Partialsumme der Reihe (6) bezeichnet. Das Funktionensystem $\{\Phi_\nu(x)\}$ kann in $[a, b]$ gleichmäßig beschränkt gewählt werden.

Aus der Divergenz der Folge (7) folgt, daß in diesem Falle in $[a, b]$ fast überall gilt:

$$\sum_{k=1}^{N}(S_{\nu_k}(x)-f(x))^2 \neq o(N).$$

Im Paragraphen 3 werden wir noch den folgenden Satz beweisen.

Satz III. *Ist*

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_k^2 \log k < \infty, \tag{8}$$

so gibt es eine quadratisch-integrierbare Funktion $f(x)$ derart, daß (2) für jede Indexfolge $\nu_1 < \cdots < \nu_k < \cdots$ fast überall im Intervall $[a, b]$ besteht.

§ 1. Beweis von Satz I.

Es sei $\nu_1 < \cdots < \nu_k < \cdots$ eine beliebige Indexfolge. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß $\nu_1 \geqq 1$. Ist $2^m \leqq \nu_k < 2^{m+1}$, so sei $\mu_k = 2^{m+1}$ $(m=0, 1, \ldots)$. Es ist klar, daß $\mu_k \leqq 2\nu_k$ $(k=1, 2, \ldots)$. Da nach der Annahme $\{c_\nu\} \in l^2$ ist und die Reihe (1) im Intervall $[a, b]$ fast überall zur Funktion $f(x)$ $(C, 1)$-summierbar ist, so gilt nach einem Satz von N. A. Kolmogoroff [1] fast überall $\lim_{m\to\infty} s_{2^m}(x) = f(x)$ und folglich

$$\lim_{k\to\infty} s_{\mu_k}(x) = f(x). \tag{1.1}$$

Für jedes N ist

$$\sum_{k=1}^{N}(s_{\nu_k}(x)-f(x))^2 \leqq 2\sum_{k=1}^{N}(s_{\nu_k}(x)-s_{\mu_k}(x))^2 + 2\sum_{k=1}^{N}(s_{\mu_k}(x)-f(x))^2. \tag{1.2}$$

Auf Grund von (1.1) ist fast überall

$$\sum_{k=1}^{N}(s_{\mu_k}(x)-f(x))^2 = o(N). \tag{1.3}$$

Nach (4) und (5) ergibt sich durch eine einfache Rechnung:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\int_a^b (s_{\nu_k}(x)-s_{\mu_k}(x))^2dx = O(1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}((c^*_{\nu_k+1})^2+\cdots+(c^*_{\mu_k})^2)=$$

$$=O(1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k-\nu_k}{k}\,\frac{(\nu_k+1)(c^*_{\nu_k+1})^2}{\nu_k+1}=O(1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(c^*_k)^2}{k}=O(1)\sum_{k=1}^{\infty}(c^*_k)^2<\infty,$$

woraus wir mit Anwendung des B. Levischen Satzes erhalten, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(s_{\nu_k}(x)-s_{\mu_k}(x))^2$$

fast überall konvergiert. Daraus folgt mit Anwendung des bekannten Kroneckerschen Lemmas (siehe z. B. A. ZYGMUND [2], 255), daß fast überall

$$\sum_{k=1}^{N}(s_{\nu_k}(x)-s_{\mu_k}(x))^2=o(N)$$

ist. Nun ergibt sich nach (1.2) und (1.3), daß (2) im Intervall $[a, b]$ fast überall besteht.

Damit ist der Satz I vollständig bewiesen.

§ 2. Beweis von Satz II.

Zum Beweis von Satz II benötigen wir den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz. *Ist $\{c_\nu\}\in l^2$, so gilt für jede Indexfolge $\nu_1<\cdots<\nu_k<\cdots$*

$$\lim_{N\to\infty}\left(s_{\nu_{2^N}}(x)-\frac{1}{2^N}\sum_{k=1}^{2^N}s_{\nu_k}(x)\right)=0$$

im Grundintervall $[a, b]$ fast überall; hier bezeichnet $s_k(x)$ die k-te Partialsumme der Reihe (1).

Beweis. Durch eine einfache Rechnung ergibt sich:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b\left(s_{\nu_{2^n}}(x)-\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}s_{\nu_k}(x)\right)^2dx=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{k^2}{2^{2n}}\sum_{\nu=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}}c_\nu^2=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\sum_{\nu=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}}c_\nu^2\sum_{2^n>k}\frac{1}{2^{2n}}=O(1)\sum_{\nu=\nu_1+1}^{\infty}c_\nu^2<\infty,$$

woraus wir mit Anwendung des B. Levischen Satzes erhalten, daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(s_{\nu_{2^n}}(x)-\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}s_{\nu_k}(x)\right)^2$$

in $[a, b]$ fast überall konvergiert.

Damit haben wir also noch mehr als die Behauptung des Hilfssatzes bewiesen.

Nun gehen wir zum Beweis von Satz II über. Es sei $a_n = \frac{1}{\sqrt{n \log^3 n}}$ für $n \geqq 2$ und $a_0 = a_1 = 1$. Die Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ ist positiv, monoton nichtwachsend und

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 (\log n)^2 = \infty.$$

Nach einem in Mitteilung I bewiesenen Satz (K. TANDORI [1], Satz I) folgt hieraus, daß ein im Intervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\psi_n(x)\}$ existiert, für welches die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(x) \tag{2. 1}$$

in $[a, b]$ überall divergiert. Das Funktionensystem $\{\psi_n(x)\}$ kann sogar gleichmäßig beschränkt gewählt werden. Weiterhin ist

$$\sum_{n=4}^{\infty} a_n^2 (\log \log n)^2 < \infty \tag{2. 2}$$

und so folgt nach einem bekannten Satz (siehe D. MENCHOFF [1]), daß die Reihe (2. 1) in $[a, b]$ fast überall $(C, 1)$-summierbar ist.

Das Funktionensystem $\{\psi_n(x)\}$ kann so konstruiert werden, daß wenn man für eine geeigneterweise gewählte Indexfolge $\{N_m\}$ die $(N_m - 1)$-ten Glieder der Reihe (2. 1) wegläßt, die erhaltene Reihe in $[a, b]$ noch überall divergiert (siehe Mitteilung I, §§ 1, 2 und S. 107). Es sei die so erhaltene Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* \psi_n^*(x). \tag{2. 3}$$

Nach den obigen divergiert diese Reihe in $[a, b]$ überall. Die k-te Partialsumme der Reihe (2. 3) bezeichnen wir mit $S_k^*(x)$. Da

$$\sum_{n=4}^{\infty} (a_n^*)^2 (\log \log n)^2 < \infty \tag{2. 4}$$

ist, so folgt nach dem erwähnten Satz von D. MENCHOFF, daß die Reihe (2. 3) in $[a, b]$ fast überall zu einer quadratisch-integrierbaren Funktion $f(x)$ $(C, 1)$-summierbar ist. Nach (2. 4) ist $\{a_n^*\} \in l^2$ und so ergibt sich nach dem erwähnten Satz von A. N. KOLMOGOROFF, daß

$$\lim_{n \to \infty} S_{2^n}^*(x) = f(x) \tag{2. 5}$$

in $[a, b]$ fast überall gilt.

Nun werden wir zuerst eine Indexfolge $\nu_1 < \cdots < \nu_k < \cdots$ und eine Folge von natürlichen Zahlen $M_1 < \cdots < M_l < \cdots$ definieren, für welche die Bedingung

$$2^{M_l} < \nu_k < 2^{M_l+1} \qquad (2^{2^l} < k \leqq 2^{2^{l+1}}) \tag{2.6}$$

bei jedem $l \geqq 1$ erfüllt wird.

Es sei $\nu_i = i$ für $i = 1, \ldots, 2^2$. Es sei M_1 die kleinste natürliche Zahl, für welche

$$\nu_{2^2} < 2^{M_1} \quad \text{und} \quad 2^4 < 2^{M_1}$$

bestehen und wir nehmen $\nu_{2^2+i} = 2^{M_1} + i$ für $i = 1, \ldots, 2^4 - 2^2$. Offensichtlich erfüllt sich (2.6) für $l = 1$.

Es sei $\lambda (\geqq 2)$ eine beliebige natürliche Zahl. Nehmen wir an, daß die Indizes $\nu_1 < \cdots < \nu_{2^{2^\lambda}}$ und die natürlichen Zahlen $M_1 < \cdots < M_{\lambda-1}$ bereits so definiert sind, daß die Bedingung (2.6) für $l = 1, \ldots, \lambda - 1$ erfüllt wird. Es sei M_λ die kleinste natürliche Zahl, für welche

$$\nu_{2^{2^\lambda}} < 2^{M_\lambda} \quad \text{und} \quad 2^{2^{\lambda+1}} < 2^{M_\lambda}$$

bestehen. Es sei $\nu_{2^{2^\lambda}+i} = 2^{M_\lambda} + i$ für $i = 1, 2, \ldots, 2^{2^{\lambda+1}} - 2^{2^\lambda}$. Offensichtlich ist $\nu_1 < \cdots < \nu_{2^{2^{\lambda+1}}}$, $M_1 < \cdots < M_\lambda$ und wird (2.6) auch für $l = \lambda$ erfüllt. Mit vollständiger Induktion erhalten wir solche Folgen $\{\nu_k\}$ und $\{M_l\}$, daß die Bedingung (2.6) für jedes l erfüllt wird.

Es sei $c_{\nu_{2^n}} = a_n^*$, $\Phi_{\nu_{2^n}}(x) = \psi_n^*(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ und $c_\nu = 0$ für $\nu \neq \nu_{2^n}$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Wir bezeichnen ferner die Funktionen $\psi_{N_1}(x), \ldots, \psi_{N_m}(x), \ldots$ der Reihe nach mit $\Phi_\nu(x)$ für $\nu \neq \nu_{2^n}$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

Offensichtlich ist das so erhaltene Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ in $[a, b]$ orthonormiert und gleichmäßig beschränkt, wenn das Funktionensystem $\{\psi_\nu(x)\}$ gleichmäßig beschränkt war. Nach (2.6) und nach der Konstruktion gilt es für $M_l < m \leqq M_{l+1}$

$$S_{2^m}(x) = S^*_{2^{l+1}}(x),$$

wo $S_k(x)$ die k-te Partialsumme der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \Phi_\nu(x)$$

bezeichnet. So ergibt sich aus (2.5), daß in $[a, b]$ fast überall

$$\lim_{m \to \infty} S_{2^m}(x) = f(x)$$

gilt. Da $\{c_\nu\} \in l^2$ ist, so folgt nach einem bekannten Satz (siehe S. KACZMARZ [1]), daß die Reihe (2.7) in $[a, b]$ fast überall zur quadratisch-integrierbaren Funktion $f(x)$ $(C, 1)$-summierbar ist.

Nach der Konstruktion ist weiterhin klar, daß $S_{\nu_{2N}}(x) = S^*_N(x)$ $(N=0, 1, \ldots)$ ist und so divergiert die Folge $\{S_{\nu_{2N}}(x)\}$ in $[a, b]$ überall. Daraus erhalten wir mit Anwendung unseres Hilfssatzes, daß die Folge

$$\frac{S_{\nu_1}(x) + \cdots + S_{\nu_N}(x)}{N}$$

in $[a, b]$ fast überall divergiert.

Also erfüllen die Folgen $\{c_\nu\}$, $\{\nu_k\}$ und das Funktionensystem $\{\Phi_\nu(x)\}$ alle im Satz II stehenden Bedingungen.

Damit haben wir Satz II vollständig bewiesen.

§ 3. Beweis von Satz III.

Ist die Bedingung (8) erfüllt, so folgt nach einem bekannten Satz (D. MENCHOFF [1]), daß die Reihe (1) fast überall in $[a, b]$ zu einer quadratisch integrierbaren Funktion $f(x)$ $(C, 1)$-summierbar ist. So besteht nach einem anderen bekannten Satz (A. N. KOLMOGOROFF [1]) $\lim_{n\to\infty} s_{2^n}(x) = f(x)$ fast überall in $[a, b]$. Es sei $\mu_n = 2^m$ für $2^m \leqq \nu_n < 2^{m+1}$ $(m = 0, 1, \ldots)$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} s_{\mu_n}(x) = f(x)$ und folglich

$$\sum_{n=1}^{N} (s_{\mu_n}(x) - f(x))^2 = o(N) \tag{3.1}$$

fast überall in $[a, b]$.

Nun ist

$$\sum_{n=1}^{N} (s_{\nu_n}(x) - f(x))^2 \leqq 2 \sum_{n=1}^{N} (s_{\nu_n}(x) - s_{\mu_n}(x))^2 + 2 \sum_{n=1}^{N} (s_{\mu_n}(x) - f(x))^2. \tag{3.2}$$

Mit einfacher Rechnung bekommen wir auf Grund der Annahme (8):

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \int_a^b (s_{\nu_n}(x) - s_{\mu_n}(x))^2 dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} (c^2_{\mu_n+1} + \cdots + c^2_{\nu_n}) \leqq$$

$$\leqq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} c_k^2 \sum_{2^m < \nu_n \leqq 2^{m+1}} \frac{1}{n} \leqq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} c_k^2 \sum_{l=1}^{2^m} \frac{1}{l} \leqq$$

$$\leqq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} c_k^2 \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l} \leqq \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 (1 + \log k) < \infty$$

und so ergibt sich mit Anwendung des B. Levischen Satzes, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (s_{\nu_n}(x) - s_{\mu_n}(x))^2$$

in $[a, b]$ fast überall konvergiert. Daraus folgt mit Anwendung des Kroneckerschen Lemmas, daß

$$\sum_{n=1}^{N}(s_{\nu_n}(x)-s_{\mu_n}(x))^2=o(N)$$

in $[a, b]$ fast überall gilt. Daraus, auf Grund von (3. 1) und (3. 2) ergibt sich die Behauptung.

Damit haben wir Satz III bewiesen.

Schriftenverzeichnis.

ALEXITS, G., [1] Eine Bemerkung zur starken Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Acta Sci. Math.*, **16** (1955), 127—129.

KOLMOGOROFF, A. N., [1] Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, *Fundamenta Math.*, **5** (1924), 96—97.

MENCHOFF, D., [1] Sur les séries de fonctions orthogonales (Deuxième Partie), *Fundamenta Math.*, **8** (1926), 56—108.

TANDORI, K., [1] Über die orthogonalen Funktionen. I, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 57—130.

ZALCWASSER, Z., [1] Sur la sommabilité des séries de Fourier, *Studia Math.*, **6** (1936), 82—88.

ZYGMUND, A., [1] Sur l'applications de la première moyenne arithmétique dans la théorie des séries de fonctions orthogonales, *Fundamenta Math.*, **10** (1927), 356—362; [2] *Trigonometrical series* (Warszawa—Lwów, 1935).

(Eingegangen am 2. Oktober 1957.)