Über eine neue Erweiterung von Ringen. I.

Von J. SZÉP in Szeged.

§ 1. Einleitung.

Wir betrachten einen Ring R mit zwei Unterringen A und B so beschaffen, daß die Beziehungen

$$(\mathfrak{A}) \qquad R^+ = A^+ + B^+, \quad A \cap B = 0$$

gelten, wobei mit dem oben angesetzten „+" Zeichen der Modul (der Elemente) des Ringes bezeichnet wird. Mit anderen Worten besagt $(\mathfrak{A})$, daß der Modul R^+ in die direkte Summe der Moduln A^+ und B^+ zerlegt ist. Bekanntlich ist dabei der Ring R selbst dann und nur dann in die direkte Summe von A und B zerlegt, wofür wir $R = A + B$ schreiben, wenn A und B sogar Ideale von R sind. Gibt es eine direkte Zerlegung $R = A + B$ mit $A \neq 0$, $B \neq 0$, so nennt man R bekanntlich direkt zerlegbar. Im obigen allgemeineren Fall $(\mathfrak{A})$ sprechen wir von einer *(allgemeinen) Zerlegung* von R (in die Summe der Unterringe A, B) und gebrauchen hierfür die Bezeichnung

$$(\mathfrak{B}) \qquad R = A \dot{+} B.$$

Wenn für R mindestens eine Zerlegung $(\mathfrak{B})$ mit $A \neq 0$, $B \neq 0$ existiert, so nennen wir R einen *zerlegbaren* Ring.

Ein einfaches Beispiel für eine (nicht direkte) Zerlegung von Ringen geben wir hier an, einige weniger triviale Beispiele folgen in § 2.

Es sei R ein Matrizenring von endlichem Rang. Wir betrachten zuerst die Matrizen in R, in denen unterhalb der Diagonale alle Elemente gleich 0, dann die Matrizen, in denen die übrigen Elemente gleich 0 sind. Diese Matrizen bilden in R je einen Unterring A bzw. B mit $R = A \dot{+} B$ und dabei ist weder A noch B ein Ideal von R, also ist $R \neq A + B$.

Wir wollen uns mit dem entsprechenden inversen Problem beschäftigen, das wir folgenderweise formulieren:

Zu beliebigen Ringen A, B sind diejenigen Ringe R zu bestimmen, für die

$$(\mathfrak{C}) \qquad R = A' \dot{+} B', \; A' \cap B' = 0, \; A' \approx A, \; B' \approx B$$

gelten, wobei $\approx$ die Isomorphie bezeichnet. Wir sagen dann, dass der Ring R aus den Ringen A und B durch *(allgemeine) Zusammensetzung* entsteht.

Dabei handelt es sich also um eine Verallgemeinerung der direkten Zusammensetzung von Ringen und auch von den zerfallenden Everettschen Ringerweiterungen (vgl. EVERETT [2], RÉDEI [7]).

Aus ($\mathfrak{C}$) entsteht nach Einbettung von A und B der obigen Fall ($\mathfrak{B}$). (Hieraus sieht man, dass es sich bei ($\mathfrak{C}$) um eine Art Erweiterungsproblem handelt, wobei nämlich nach einem gemeinsamen Erweiterungsring von A und B gefragt wird.) Wegen des Gesagten schreiben wir auch im Fall ($\mathfrak{C}$) einfach $R = A \dotplus B$ (wie bei ($\mathfrak{B}$)), wenn daraus kein Mißverständnis entsteht.

Eine „explizite" Lösung unseres Problems ist freilich unvorstellbar, aber wir werden es im Satz 1 in einem ähnlichen Sinne allgemein lösen, wie das z. B. in der Everettschen Ringerweiterungstheorie zu meinen ist Aus Satz 1 ziehen wir dann gewisse Schlüße allgemeiner Natur bezüglich der Eigenschaften unserer Ringe (Sätze 2, 3, 4). Außerdem konnten wir einige Feststellungen von spezieller Natur erzielen, die uns ebenfalls interessant zu sein scheinen (Sätze 5 bis 8).

Freilich ließen sich in unserem Problemkreis mehrere weitere Fragen stellen. Es ist z. B. eine interessante Frage, die wir aber nicht beantworten konnten, ob es unter unserem Ringen $R = A \dotplus B$ auch einfache Ringe (insbesondere Schiefkörper) gibt.

Es ist klar, dass sich unser Problem mit entsprechender Änderung allgemeiner für beliebige „gleichartige" Strukturen formulieren läßt, wobei man immer unter den in diesen Strukturen erklärten Verknüpfungen eine auszeichnet (in unserem obigen Fall, wo es sich um Ringe handelt, haben wir ja die Addition ausgezeichnet). Im Fall von Strukturen mit einer Verknüpfung (z. B. Gruppen oder Halbgruppen) ist eine solche Auszeichnung freilich nicht nötig.

Insbesondere für Gruppen lautet also dieses Erweiterungsproblem folgenderweise:

Es seien G und Γ zwei beliebige Gruppen. Es sind die sämtlichen Gruppen $\mathfrak{G}$ mit

$$\mathfrak{G} = G'\Gamma', \quad G' \cap \Gamma' = 1, \quad G' \approx G, \quad \Gamma' \approx \Gamma$$

zu bestimmen.

Der Leser sieht, daß es sich eben um das bekannte Problem der Gruppenfaktorisation (oder nach einer neulich von B. H. NEUMANN eingeführten Terminologie um das allgemeine Gruppenprodukt) handelt. Dieses gruppentheoretische Problem gab in den letzten Jahren zu vielen wichtigen Untersuchungen Anlaß. Eben diese Untersuchungen haben uns an unser ringtheoretisches Problem geleitet.

Dem geschilderten Umstand entsprechend weist ein Teil unserer Resultate eine Ähnlichkeit mit Sätzen aus der Theorie der Gruppenfaktorisation auf. Auf diese Analogien werden wir in Fußanmerkungen jedesmal hinweisen.

§ 2. Beispiele.[1])

Um das Interesse für unser Problem zu erwecken, erwähnen wir hier noch einige Beispiele.

1. Es sei $w_1, w_2, \ldots, w_1', w_2', \ldots$ die Basis eines Ringes R (d. h. seines Moduls R^+) mit $w_i w_k = w_{i+k}$, $w_i' w_k' = w_{i+k}'$, $w_i' w_k = w_{i+k}$, $w_i w_k' = w_{i+k}'$. Die $w_1, w_2, \ldots$ bzw. $w_1', w_2', \ldots$ erzeugen in R einen Unterring A bzw. B mit $R = A \dotplus B$. Diese Unterringe A und B sind in R Linksideale (aber keine Rechtsideale).

2. Wir betrachten zwei Polynomringe $R[x]$, $R[y]$ über einem Ring R und bezeichnen mit $R_0[x]$, $R_0[y]$ ihre Unterringe bestehend aus den durch x bzw. y teilbaren Polynomen. In der direkten Summe $R_0[x]^+ + R_0[y]^+$ definieren wir eine Multiplikation der Elemente durch

$$(f_1(x)+g_1(y))(f_2(x)+g_2(y)) = f_1(x)f_2(x)+g_1(x)f_2(x)+f_1(y)g_2(y)+g_1(y)g_2(y).$$

So entsteht ein Ring $R_0[x] \dotplus R_0[y]$. In diesem sind $R_0[x]$, $R_0[y]$ Linksideale.

3. Es seien R_1, R_2 zwei isomorphe Ringe, die nur 0 als gemeinsames Element enthalten. Dann sind auch die Polynomringe $R_1[x]$, $R_2[y]$ isomorph und haben nur das Element 0 gemeinsam. Mit $f_1(x)$, $f_2(y)$ (oder $g_1(x)$, $g_2(y)$ usw.) bezeichnen wir stets zwei einander isomorph zugeordnete Polynome. In der direkten Summe $R_1[x]^+ + R_2[y]^+$ definieren wir eine Multiplikation durch

$$(f_1(x)+g_2(y))(h_1(x)+k_2(y)) = f_1(x)h_1(x)+g_1(x)\,h_1(x)+f_2(y)k_2(y)+g_2(y)k_2(y).$$

So entsteht ein Ring $R_1[x] \dotplus R_2[y]$. In diesem sind $R_1[x]$, $R_2[y]$ Linksideale.

4. Es sei K ein Körper von der Primzahlcharakteristik p. Mit K_x und K_y bezeichnen wir die Unterringe von $K[x]$ und $K[y]$ bestehend aus den (lückenhaften) Polynomen von der Form $\Sigma a_i x^{p^i}$ bzw. $\Sigma a_i y^{p^i}$. In der direkten Summe $K_x^+ + K_y^+$ werde die Multiplikation definiert:

$$(f(x)+g(y))\,(h(x)+k(y)) = f(h(x))+g(h(x))+f(k(y))+g(k(y)).$$

Der Leser sieht leicht (vgl. Ore [5]), daß hierdurch ein Ring entstanden ist, in dem K_x und K_y Linksideale sind.

---

[1]) Die Beispiele 2), 3), 4) und das in der Einleitung erwähnte verdanke ich Herrn Professor Rédei.

5. Es sei $w_1, w_2, \ldots, w_1', w_2', \ldots$ die Basis eines Ringes R mit $w_i w_k = w_i' w_k' = 0$, $w_i w_k' = w_k' w_i = (i+k)(w_1 + w_1')$ $(i, k \neq 1)$, $w_i w_1' = w_1' w_i = w_i' w_1 = w_1 w_i' = 0$. Die Basiselemente $w_1, w_2, \ldots$ bzw. $w_1', w_2', \ldots$ erzeugen in R einen Unterring A bzw. B mit $A \dotplus B$. Abweichend von den vorigen Beispielen ist jetzt weder A noch B ein einseitiges Ideal von $A \dotplus B$ (ähnliches bezieht sich auf das in der Einleitung angegebene Beispiel).

§ 3. Die Lösung des Problems.

Unser Erweiterungsproblem läßt sich ohne Einschränkung der Allgemeinheit so formulieren:

Es sind zu gegebenen Ringen A $(\neq 0)$ und $B (\neq 0)$ mit $A \cap B = 0$ die Ringe

(1) $$R = A \dotplus B$$

zu bestimmen.

Zur Lösung des Problems definieren wir R^+ (anders als in § 1) als die direkte Summe der Moduln A^+ und B^+. Dann nehmen wir vier (eindeutige) Funktionen

(2) $$a^b,\ {}^b a\ (\in A);\quad b^a,\ {}^a b\ (\in B)\qquad (a \in A, b \in B)$$

und definieren in R^+ die Multiplikation durch

(3) $$ab = a^b + {}^a b, \qquad ba = {}^b a + b^a$$

und

(4) $$(a+b)(a'+b') = aa' + ba' + ab' + bb' \qquad (a, a' \in A;\ b, b' \in B),$$

wobei aa' und bb' (selbstverständlich) Elementenprodukte in A bzw. B bedeuten.

Damit auf diesem Wege ein Ring entsteht, ist vor allem nötig, dass die Multiplikation eindeutig ist, was aber nach (2) und (3) insbesondere für die Produkte $0a, a0, 0b, b0$ wegen $0 \in A, B$ und $0a = a0 = 0b = b0 = 0$ erst durch

(5) $$a^0 = {}^0 a = 0^a = {}^a 0 = b^0 = {}^0 b = 0^b = {}^b 0 = 0$$

gesichert ist. Deshalb nehmen wir die Erfülltheit dieser „Anfangsbedingungen“ (5) oft stillschweigend von vornherein an, aus denen die Eindeutigkeit der Multiplikation offenbar folgt.

Die aus R^+ so entstandene Struktur (mit zwei Verknüpfungen) bezeichnen wir mit R^*. Es ist klar, daß die unter den R^* vorkommenden Ringe eben die sämtlichen Lösungen unseres Problems sind. Hiernach fragt es sich nur noch danach, welchen Bedingungen die Funktionen (2) zu genügen haben, damit R^* ein Ring ist.

Satz 1. *Die soeben definierte Struktur R^* ist dann und nur dann ein Ring, wenn für $a, a' \in A$ und $b, b' \in B$ die folgenden Beziehungen gelten:*

$$\begin{aligned} &(6) && a^{b+b'} = a^b + a^{b'}, && {}^{b+b'}a = {}^b a + {}^{b'}a, \\ & && b^{a+a'} = b^a + b^{a'}, && {}^{a+a'}b = {}^a b + {}^{a'}b, \\ &(7) && (a+a')^b = a^b + a'^b, && {}^b(a+a') = {}^b a + {}^b a, \\ & && (b+b')^a = b^a + b'^a, && {}^a(b+b') = {}^a b + {}^a b', \\ &(8) && (a^b)^{b'} = a^{bb'}, && {}^{b'}({}^b a) = {}^{b'b}a, \\ & && (b^a)^{a'} = b^{aa'}, && {}^{a'}({}^a b) = {}^{a'a}b, \\ &(9) && (aa')^b = aa'^b + a^{a'^b}, && {}^b(aa') = {}^b a a' + {}^{b^a}a', \\ & && (bb')^a = bb'^a + b^{b'^a}, && {}^a(bb') = {}^a b b' + {}^{a^b}b', \\ &(10) && (a^b)a' + {}^{a^b}a' = a^{b^{a'}} + a({}^b a'), && (b^a)b' + {}^{b^a}b' = b^{a^{b'}} + b({}^a b'), \\ &(11) && ({}^b a)^{b'} = {}^b(a^{b'}), && ({}^a b)^{a'} = {}^a(b^{a'}). \end{aligned}$$

Und zwar sind die so entstehenden Ringe eben die sämtlichen Ringe R mit der Eigenschaft (1).[1])

Beweis. Wir brauchen nach Obigen nur die Behauptung „dann und nur dann" zu beweisen.

Damit R ein Ring ist, ist notwendig und hinreichend, daß die Multiplikation in R assoziativ und distributiv ist.

Da A und B Ringe sind, so sind für die Distributivität die Bedingungen

$$(12) \qquad \begin{aligned} &(a+a')b = ab + a'b, \; b(a+a') = ba + ba', \\ &a(b+b') = ab + ab', \; (b+b')a = ba + b'a \end{aligned}$$

notwendig und hinreichend. Die Notwendigkeit ist nämlich trivial. Anderseits folgt aus (12) und (4) für beliebige drei Elemente $a+b, a'+b', a''+b''$ $(a, a', a'' \in A;\ b, b', b'' \in B)$ nach

$$\begin{aligned} [(a+b)+(a'+b')](a''+b'') &= [(a+a')+(b+b')](a''+b'') = \\ &= (a+a')a'' + (b+b')a'' + (a+a')b'' + (b+b')b'' = \\ &= aa' + a'a'' + ba'' + b'a'' + ab'' + a'b'' + bb'' + b'b'' = \\ &= (a+b)(a''+b'') + (a'+b')(a''+b'') \end{aligned}$$

die Rechtsdistributivität. Auf die Linksdistributivität schließt man ähnlich.

Nun kann (12) wegen (3) auch so geschrieben werden:

$$\begin{aligned} (a+a')^b + {}^{a+a'}b &= a^b + {}^a b + a'^b + {}^{a'}b, \\ b^{a+a'} + {}^b(a+a') &= b^a + {}^b a + b^{a'} + {}^b a', \\ a^{b+b'} + {}^a(b+b') &= a^b + {}^a b + a^{b'} + {}^a b', \\ (b+b')^a + {}^{b+b'}a &= b^a + {}^b a + b'^a + {}^{b'}a. \end{aligned}$$

1) Den entsprechenden Satz für Gruppen samt Verallgemeinerungen s. in den Arbeiten [1], [6], [8], [11].

Diese vier Gleichungen sind wegen $A \cap B = 0$ gleichbedeutend mit den Gleichungen (6) und (7), also drücken diese letzteren genau die notwendige und hinreichende Bedingung der Distributivität aus. Im folgenden können wir die Gleichungen (6) und (7) schon voraussetzen.

Da A und B Ringe sind, so drücken (wegen der angenommenen Distributivität)

$$(13) \qquad (aa')\,b = a(a'b),\; b(aa') = (ba)\,a',\; (bb')\,a = b(b'a),\; a(bb') = (ab)\,b',$$

$$(14) \qquad (ab)\,a' = a(ba'),\; (ba)\,b' = b(ab')$$

offenbar die notwendige und hinreichende Bedingung der Assoziativität der Multiplikation aus. Da nach (3)

$$\begin{aligned}
&(aa')\,b = (aa')^{b} + {}^{aa'}b;\; a(a'b) = a(a'^{b} + {}^{a'}b) = aa'^{b} + a({}^{a'}b) = aa'^{b} + a^{a'^{b}} + {}^{a}({}^{a'}b),\\
&b(aa') = b^{aa'} + {}^{b}(aa');\; (ba)\,a' = (b^{a} + {}^{b}a)\,a' = (b^{a})\,a' + {}^{b}aa' = (b^{a})^{a'} + {}^{b^{a}}a' + {}^{b}aa',\\
&(bb')\,a = (bb')^{a} + {}^{bb'}a;\; b(b'a) = b(b'^{a} + {}^{b'}a) = bb'^{a} + b({}^{b'}a) = bb'^{a} + b^{{}^{b'}a} + {}^{b}({}^{b'}a),\\
&a(bb') = a^{bb'} + {}^{a}(bb');\; (ab)\,b' = (a^{b} + {}^{a}b)\,b' = (a^{b})\,b' + {}^{a}bb' = (a^{b})^{b'} + {}^{a^{b}}b' + {}^{a}bb'
\end{aligned}$$

gelten, so ist (13) wegen $A \cap B = 0$ äquivalent mit den Gleichungen (8), (9).

Aus (3) folgen ferner

$$\begin{aligned}
(ab)\,a' &= (a^{b} + {}^{a}b)\,a' = (a^{b})\,a' + {}^{a}ba' = (a^{b})\,a' + ({}^{a}b)^{a'} + {}^{{}^{a}b}a',\\
a(ba') &= a(b^{a'} + {}^{b}a') = ab^{a'} + a({}^{b}a') = a^{b^{a'}} + {}^{a}(b^{a'}) + a({}^{b}a'),\\
(ba)\,b' &= (b^{a} + {}^{b}a)\,b' = (b^{a})\,b' + {}^{b}ab' = (b^{a})\,b' + ({}^{b}a)^{b'} + {}^{b^{a}}b',\\
b(ab') &= b(a^{b'} + {}^{a}b') = ba^{b'} + b({}^{a}b') = b^{a^{b'}} + {}^{b}(a^{b'}) + b({}^{a}b')
\end{aligned}$$

also ist (14) äquivalent mit den Gleichungen (10), (11). Somit haben wir den Satz bewiesen.

Wir nennen einen Funktionenvierer (2) *gut*, wenn für diesen die Bedingungen (5)—(11) erfüllt sind, und nennen eine der vier Funktionen (2) gut, wenn sie in einen guten Funktionenvierer gehört.

§ 4. Weitere Eigenschaften.

Die Relationen (7) zeigen, daß sich jedem Element b von B bzw. zu jedem Element a von A je zwei Endomorphismen von A^{+} bzw. B^{+} zuordnen lassen. Diese vier Endomorphismen sind nämlich die folgenden:

$$a \rightarrow a^{b}, \quad a \rightarrow {}^{b}a, \quad b \rightarrow {}^{a}b, \quad b \rightarrow b^{a},$$

wobei das Zeichen „$\rightarrow$“ zur Bezeichnung der Abbildung dient.

Wir bezeichnen diese Endomorphismen mit A^b, ${}^bA$, ${}^aB$, B^a. Für ihre Addition und Multiplikation gelten nach (7) und (9) bzw. die folgenden

(15) $$A^b + A^{b'} = A^{b+b'}, \qquad {}^bA + {}^{b'}A = {}^{b+b'}A,$$

(16) $$A^{b'} A^b = A^{bb'}, \qquad {}^bA\, {}^{b'}A = {}^{bb'}A,$$

(17) $$B^a + B^{a'} = B^{a+a'}, \qquad {}^aB + {}^{a'}B = {}^{a+a'}B,$$

(18) $$B^{a'} B^a = B^{aa'}, \qquad {}^aB\, {}^{a'}B = {}^{aa'}B.$$

Da B ein Ring ist, sieht man hieraus, dass (15_1) und (16_1) einen zu B antihomomorphen Ring, (15_2) und (16_2) einen zu B homomorphen Ring definieren. Wir bezeichnen diese Ringe mit A^B bzw. ${}^BA$. Entsprechend definieren wir auf Grund von (17) und (18) die Ringe B^A und ${}^AB$. Es gilt also der folgende

Satz 2. *In jedem Ring $R = A \dotplus B$ bestehen*

$$B \sim_a A^B, \quad B \sim {}^BA, \quad A \sim_a B^A, \quad A \sim {}^AB,$$

wobei $\sim$ und $\sim_a$ die Homomorphie bzw. die Antihomomorphie bezeichnet.[1])

Wir bezeichnen den Kern des Homomorphismus $A \sim {}^AB$ bzw. $B \sim {}^BA$ mit

(19) $${}^\circ A \quad \text{bzw.} \quad {}^\circ B$$

und den Kern des Antihomomorphismus $A \sim_a B^A$ bzw. $B \sim_a A^B$ mit

(20) $$A^\circ \quad \text{bzw.} \quad B^\circ.$$

Wir betrachten jetzt z. B. den Ring ${}^\circ A$ (d. h. die Menge derjenigen Elemente a, für die ${}^aB = 0$ ist). Aus (4) sehen wir, daß für jedes Element a von A und b von B $ab = a^b$ $(\in A)$ ist. Nach ${}^aB = 0$ folgt aus (9) ${}^{a^b}b' = 0\,(b' \in B)$, also ${}^{a^b}B = 0$, d. h. $a^b \in {}^\circ A$. Somit gilt

(21) $${}^\circ A B \subseteqq {}^\circ A.$$

Ähnlich läßt sich für A°

(22) $$B A^\circ \subseteqq A$$

zeigen. Ferner entstehen für den Ring ${}^\circ B$ bzw. B°

(23) $${}^\circ B A \subseteqq {}^\circ B,$$

(24) $$A B^\circ \subseteqq B^\circ.$$

Da ${}^\circ A$, A° Ideale in A, und ${}^\circ B$, B° Ideale in B sind, so folgt

Satz 3. *In $R = A \dotplus B$ ist A° ein Linksideal, ${}^\circ A$ ein Rechtsideal, B° ein Linksideal, ${}^\circ B$ ein Rechtsideal.*

Wenn $\bar{A} \subseteqq A$ ein Linksideal in R ist, dann ist offenbar $B^{\bar{a}} = 0\,(\bar{a} \in \bar{A})$. Ähnlich, wenn $\bar{\bar{A}} \subseteqq A$ ein Rechtsideal in R ist, so ist ${}^{\bar{\bar{a}}}B = 0$ $(\bar{\bar{a}} \in \bar{\bar{A}})$, wenn ferner $\bar{B} \subseteqq B$ ein Linksideal in R ist, so ist $A^{\bar{b}} = 0$ $(\bar{b} \in \bar{B})$, wenn endlich

---

1) Den analogen Satz im Fall der Gruppen s. [9], [10].

$\bar{\bar{B}} \subseteq B$ ein Rechtsideal in R ist, so ist ${}^{\bar{\bar{b}}}A = 0$ $(\bar{\bar{b}} \in \bar{\bar{B}})$. Daraus ergibt sich der folgende

Satz 4. *In einem Ring $R = A \dot{+} B$ gelten: Das Linksideal A° enthält jedes Linksideal $\bar{A} \subseteq A$ von R, das Rechtsideal ${}^\circ A$ von R enthält jedes Rechtsideal $\bar{\bar{A}} \subseteq A$ von R, das Linksideal B° von R enthält jedes Linksideal $\bar{B} \subseteq B$ von R, das Rechtsideal ${}^\circ B$ von R enthält jedes Rechtsideal $\bar{\bar{B}} \subseteq B$ von R.*[1])

Bemerkung. In einem Ring $R = A \dot{+} B$ ist A dann und nur dann ein Linksideal, wenn $B^A = 0$, d. h.

$$b^a = 0 \qquad (a \in A,\ b \in B).$$

Ferner ist A in R dann und nur dann ein Rechtsideal, wenn ${}^A B = 0$, d. h.

$$ {}^a b = 0 \qquad (a \in A,\ b \in B).$$

Ähnlich läßt sich entscheiden ob B ein Links- bzw. Rechtsideal in R ist.

Beispiel. Aus zwei isomorphen Ringen A und B wollen wir Ringe $R = A \dot{+} B$ konstruieren, in denen A und B Linksideale sind. Die Elemente von A und B bezeichnen wir mit $a_1, a_2, \ldots$ bzw. $b_1, b_2, \ldots$, so daß

$$a_i \Longleftrightarrow b_i$$

ein Isomorphismus zwischen A und B ist. Nach der vorigen Bemerkung müssen

$$b_i^{a_k} = a_i^{b_k} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots)$$

gelten. Außerdem setzen wir

$${}^{a_i}b_k = b_i b_k, \quad {}^{b_i}a_k = a_i a_k.$$

Aus (3) und (4) ist klar, daß durch diese vier Funktionen nur Ringe der verlangten Art entstehen, aber es ist noch zu zeigen, daß die Bedingungen von Satz 1 erfüllt sind. Das sieht man einfach aus den folgenden Rechnungen

$$(6') \quad \begin{aligned} &a_i^{b_k+b_l} = 0 = a_i^{b_k} + a_i^{b_l}, \quad b_i^{a_k+a_l} = 0 = b_i^{a_k} + b_i^{a_l}, \\ &{}^{b_k+b_l}a_i = (a_k + a_l)\, a_i = a_k a_i + a_l a_i = {}^{b_k}a_i + {}^{b_l}a_i, \\ &{}^{a_k+a_l}b_i = (b_k + b_l)\, b_i = b_k b_i + b_l b_i = {}^{a_k}b_i + {}^{a_l}b_i, \end{aligned}$$

$$(7') \quad \begin{aligned} &(a_k + a_l)^{b_i} = 0 = a_k^{b_i} + a_l^{b_i}, \quad (b_k + b_l)^{a_i} = 0 = b_k^{a_i} + b_l^{a_i}, \\ &{}^{b_i}(a_k + a_l) = a_i\,(a_k + a_l) = a_i a_k + a_i a_l = {}^{b_i}a_k + {}^{b_i}a_l, \\ &{}^{a_i}(b_k + b_l) = b_i\,(b_k + b_l) = b_i b_k + b_i b_l = {}^{a_i}b_k + {}^{a_i}b_l, \end{aligned}$$

$$(8') \quad \begin{aligned} &(a_i^{b_k})^{b_l} = 0 = a^{b_k b_l}, \quad (b_i^{a_k})^{a_l} = 0 = b_i^{a_k a_l}, \\ &{}^{b_l}({}^{b_k}a_i) = {}^{b_l}(a_k a_i) = a_l a_k a_i = {}^{b_l b_k}a_i, \\ &{}^{a_l}({}^{a_k}b_i) = {}^{a_l}(b_k b_i) = b_l b_k b_i = {}^{a_l a_k}b_i, \end{aligned}$$

[1]) Den analogen Satz für Gruppen s. [9], [10].

$$
\begin{aligned}
&(a_k a_l)^{b_i} = 0 = a_k a_l^{b_i} + a_k^{{}^{a_l}b_i}, \quad (b_k b_l)^{a_i} = 0 = b_k b_l^{a_i} + b_k^{{}^{b_l}a_i}, \\
(9') \qquad &{}^{b_i}(a_k a_l) = a_i a_k a_l = {}^{b_i}a_k a_l + 0 = {}^{b_i}a_k a_l + {}^{b_i^{a_k}}a_l, \\
&{}^{a_i}(b_k b_l) = b_i b_k b_l = {}^{a_i}b_k b_l + 0 = {}^{a_i}b_k b_l + {}^{a_i^{b_k}}b_l,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(10') \qquad &(a_k^{b_i})a_l + {}^{{}^{a_k}b_i}a_l = {}^{b_k\, b_i}a_l = a_k a_i a_l = a_k({}^{b_i}a_l) + 0 = a_k({}^{b_i}a_l) + a_k^{b_i^{a_l}}, \\
&(b_k^{a_i})\, b_l + {}^{{}^{b_k}a_i}a_l = {}^{a_k\, a_i}b_l = b_k b_i b_l = b_k({}^{a_i}b_l) + 0 = b_k({}^{a_i}b_l) + b_k^{a_i^{b_l}}
\end{aligned}
$$

$$
(11') \qquad ({}^{b_k}a_i)^{b_l} = 0 = {}^{b_k}(a_i^{b_l}), \quad ({}^{a_k}b_i)^{a_l} = 0 = {}^{a_k}(b_i^{a_l}).
$$

Wir betrachten die Elemente $a(\in A)$ so beschaffen, daß $a^b = 0$ für alle Elemente b von B stattliat. Diese a bilden einen Ring, denn aus $a^b = 0$ und $a'^b = 0$ folgt $(a+a')^b = a^b + a'^b = 0$, ferner ist auch $(aa')^b = aa'^b + a^{{}^{a'}b} = 0$ erfüllt. Wir bezeichnen diesen Ring mit A_B. Da für jedes $a(\in A_B)$ und jedes $b(\in B)$ $ab = a^b + {}^a b(\in B)$ ist, so folgt $A_B B \subseteqq B$. Umgekehrt, wenn $aB \subseteqq B$ $(a \in A)$ ist, dann besteht $a^b = 0$ für jedes $b(\in B)$, d. h. es ist $a \in A_B$. Entsprechend können wir die Unterringe ${}_BA, B_A, {}_AB$ definieren. Nach vorigem gilt dann der

Satz 5. *In einem Ring $R = A \dotplus B$ sind A_B bzw. B_A die maximalen Unterringe ($\subseteqq A$), für die*

$$A_B B \subseteqq B \quad bzw. \quad B\, {}_BA \subseteqq B$$

gilt, ferner sind B_A bzw. ${}_AB$ die maximalen Unterringe ($\subseteqq B$), für die

$$B_A A \subseteqq A \quad bzw. \quad A\, {}_AB \subseteqq A.$$

Bemerkung. Es ist leicht zu sehen, daß der durch die Produkte $ab (a \in A_B,\ b \in B)$ erzeugte Modul $\{A_B B\}$ ein Rechtsideal in B ist. Einerseits ist nämlich $\{A_B B\}$ wegen

$$(ab)(a'b') = (ab)b'' = a(bb'') \in A_B B \qquad (a' \in A_B;\ b', b'' \in B)$$

ein Ring, andererseits ist offenbar

$$\{A_B B\} B \subseteqq \{A_B B\}.$$

Eine entsprechende Behauptung gilt für die ähnlich erklärten Moduln $\{B\, {}_BA\}$, $\{A\, B_A\}$, $\{{}_AB\, A\}$.

Freilich sind die Bedingungen (6)—(11) voneinander abhängig. Unsere Aufgabe wird jetzt solche Abhängigkeiten zu untersuchen.

Satz 6. *Wenn die Werte von irgendwelchen Funktionen* (2) *mit der Eigenschaft* (5) *für die Generatoren der Moduln A^+ und B^+ angegeben sind, so sind diese Funktionen durch die Forderungen* (6), (7) *vollständig bestimmt. Sind dabei die Bedingungen* (8)—(11) *für die Generatoren von A^+ und B^+ erfüllt, so bestehen diese Bedingungen auch schon für alle Elemente von A und B.*

B e w e i s. Den Beweis fangen wir mit der einfachen Bemerkung an, daß die genannten Funktionen im Falle des Bestehens von (6), (7) so beschaffen sein müssen, daß sie nur eine Vorzeichenänderung erleiden, wenn in ihnen a oder b durch $-a$ bzw. $-b$ ersetzt wird. Hiervon genügt es z. B. $(-a)^b = -a^b$ zu beweisen, denn die übrigen Fälle sind ähnlich. Der Beweis entsteht sofort aus (7_1) bei Anwendung auf $a' = -a$, da dann die linke Seite nach (5) gleich 0 ist. Im Besitz dieser Bemerkung folgt die erste Hälfte des Satzes durch eine leichte Induktion.

Um die zweite Hälfte des Satzes zu beweisen, nehmen wir an, daß die Bedingungen (8) bis (11) für die Elemente $\bar{b}, \bar{\bar{b}}$ ($\in B$) und $\bar{a}, \bar{\bar{a}}$ ($\in A$) an Stelle von b oder b' bzw. a oder a' erfüllt sind. Aus

$$(a^{\bar{b}})^{b'} = a^{\bar{b}b'} \quad \text{und} \quad (a^{\bar{\bar{b}}})^{b'} = a^{\bar{\bar{b}}b'}$$

folgt nach (6) und (7)

$$(a^{\bar{b}+\bar{\bar{b}}})^{b'} = (a^{\bar{b}} + a^{\bar{\bar{b}}})^{b'} = (a^{\bar{b}})^{b'} + (a^{\bar{\bar{b}}})^{b'} = a^{\bar{b}b'} + a^{\bar{\bar{b}}b'} = a^{\bar{b}b' + \bar{\bar{b}}b'} = a^{(\bar{b}+\bar{\bar{b}})b'}.$$

Ähnlich bekommt man $(a^b)^{(\bar{b}+\bar{\bar{b}})} = a^{b(\bar{b}+\bar{\bar{b}})}$ und $((\bar{a} + \bar{\bar{a}})^b)^{b'} = (\bar{a} + \bar{\bar{a}})^{bb'}$. Das bedeutet das Bestehen von (8_1). Mit ($8_{2,3,4}$) verfährt man ähnlich.

Sind

$$(aa')^{\bar{b}} = aa'^{\bar{b}} + a^{a'\bar{b}}, \quad (aa')^{\bar{\bar{b}}} = aa'^{\bar{\bar{b}}} + a^{a'\bar{\bar{b}}}$$

gültig, so gilt nach (6) und (7)

$$(aa')^{\bar{b}+\bar{\bar{b}}} = (aa')^{\bar{b}} + (aa')^{\bar{\bar{b}}} = (aa')^{\bar{b}} + a^{a'\bar{b}} + aa'^{\bar{\bar{b}}} + a^{a'\bar{\bar{b}}} =$$
$$= a(a'^{\bar{b}} + a'^{\bar{\bar{b}}}) + a^{a'\bar{b} + a'\bar{\bar{b}}} = aa'^{\bar{b}+\bar{\bar{b}}} + a^{a'(\bar{b}+\bar{\bar{b}})}.$$

Das beweist einen Teil der Behauptung über (9_1).

Hieraus sieht man leicht wie der Beweis von Satz 6 weiter auszuführen ist.

Es seien die Ringe A und B gegeben. Es gilt der folgende

S a t z 6.[1]) *Ist a^b eine gute Funktion ($a \in A$, $b \in B$), so determiniert a^b die Funktionswerte von* ${}^a b$ mod B°. *Eine gute Funktion* ${}^b a$ *determiniert die Funktionswerte von* b^a mod ${}^\circ B$. *Eine gute Funktion* ${}^a b$ *determiniert die Funktionswerte von* a^b mod A°. *Endlich determiniert eine gute Funktion* b^a *die Funktionswerte von* ${}^b a$ mod ${}^\circ A$.

B e w e i s. Es folgt aus (9_1)

$$(26) \qquad a'^{\,{}^a b} = (a'a)^b - a'a^b.$$

Hiernach haben für gegebene a und b sämtliche Gleichungen

$$(26) \qquad a'^{\,b^*} = (a'a)^b - a'a^b$$

je eine Lösung b^* ($a' \in A$, $b^* \in B$).

[1]) Den analogen Satz für Gruppen (in einem speziellen Fall) s. [6].

Wir zeigen, daß zwei Lösungen $b_1^*, b_2^* (\in B)$ von (26) zu derselben Restklasse mod B° gehören. Für b_1^*, b_2^* gelten nämlich,

$$a'^{b_1^*} = a'^{b_2^*}$$

also gilt wegen (6)

$$a'^{b_1^* - b_2^*} = 0$$

für jedes $a' \in A$. Somit gilt

$$b_1^* - b_2^* \in B^\circ$$

Da ferner nach (25) ${}^a b$ eine Lösung von (26) ist, so ist hiermit die erste Behauptung von Satz 6 bewiesen.

Die übrigen Behauptungen beweist man ähnlich.

Bemerkung. Gilt im Satz 6 insbesondere $B^\circ = 0$ bzw. ${}^\circ B = 0$, so ist die Funktion ${}^a b$ bzw. b^a durch die Funktion a^b bzw. ${}^b a$ sogar eindeutig bestimmt. Entsprechendes gilt für die Funktionen ${}^b a$, a^b in den Fällen $A^\circ = 0$ und ${}^\circ A = 0$.

Für ein beliebiges Ideal des zerlegbaren Ringes R gilt der folgende

Satz 7. *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein Ideal von* $R = A \dotplus B$ *bestehend aus den Elementen* $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots$ $(a_i \in A, b_i \in B, i = 1, 2, \ldots)$, *so bilden die* a_i *bzw.* b_i *Unterringe* A' *bzw.* B' *von* R, *ferner ist* $R' = A'^+ + B'^+$ *ein (zerlegbarer) Unterring von* R *mit* $R' = A' \dotplus B'$, *für den* $\mathfrak{a} \subseteqq R'$ *besteht.*

Beweis. Da $(a_i + b_i) + (a_j + b_j) = (a_i + a_j) + (b_i + b_j) \in \mathfrak{a}$ ist, so bilden die Elemente a_i bzw. b_i gewisse Moduln A' bzw. B'. Für beliebige Elemente a $(\in A)$ und $a_i + b_i$ $(\in \mathfrak{a})$ ist

$$a(a_i + b_i) = a a_i + a b_i = a a_i + a^{b_i} + {}^a b_i \qquad (\in \mathfrak{a}), \tag{27}$$

woraus ${}^a b_i \in B'$ folgt. Ähnlich folgt aus

$$(a_i + b_i) a = a_i a + b_i^a + {}^{b_i} a \quad (\in \mathfrak{a}) \tag{28}$$

$b_i^a \in B'$. Auf demselben Weg können wir a_i^b, ${}^b a_i \in A'$ $(b \in B)$ zeigen. Aus der Relation

$$(a_i + b_i) a_k = a_i a_k + b_i^{a_k} + {}^{b_i} a_k \quad (\in \mathfrak{a}) \tag{29}$$

folgt $a_i a_k + {}^{b_i} a_k \in A'$, und daraus $a_i a_k \in A'$. Auf dieselbe Weise folgt $b_i b_k \in B'$. Also sind A' und B' Unterringe von A bzw. B.

Wir betrachten die Summe $A'^+ + B'^+$, die also ein Untermodul von R ist. Auf Grund der vorher Bewiesenen ist

$$a_k (a_l + b_l) = a_k a_l + a_k^{b_l} + {}^{a_k} b_l \in A'^+ + B'^+ \tag{30}$$

d. h. $A'(A'^+ + B'^+) \subseteqq A'^+ + B'^+$. Ähnlich ist

$$(A'^+ + B'^+) A', \quad B'(A'^+ + B'^+), \quad (A'^+ + B'^+) B' \subseteqq A'^+ + B'^+$$

Hiernach ist der Modul $A'^+ + B'^+$ ein Ring. Die Behauptung $\mathfrak{a} \subseteqq R'$ ist trivial.

In Verbindung mit den zerlegbaren Ringen $R = A \dotplus B$ entsteht die Frage, ob unter diesen Ringe auch Körper vorkommen. Auf dieses Problem bezieht sich der folgende

Satz 8. *Enthalten die Ringe* $A\,(\neq 0)$, $B\,(\neq 0)$ *je ein minimales Linksideal, so hat jeder Ring* $R = A \dotplus B$ *ein echtes Linksideal.*

Beweis. Nehmen wir an, daß der Satz falsch ist, d. h. R kein echtes Linksideal enthält. Da R kein Zeroring von Primzahlordnung ist, so folgt aus dem Struktursatz von WEDDERBURN—ARTIN leicht, daß R ein Schiefkörper sein muß. Da A und B nullteilerfrei sind, kann ihr Einselement (wenn es existiert) nur das von R sein. Da aber $A \cap B = 0$ ist, so folgt, daß mindestens das eine von A und B ohne Einselement ist.

Wir nehmen an, daß A kein Einselement hat, und betrachten das minimale Linksideal $\mathfrak{a}$ von A. Es sei a ein von 0 verschiedenes Element von $\mathfrak{a}$. Da $Aa\,(\neq 0)$ ein Linksideal von $A\,(\subseteq \mathfrak{a})$ ist, so ist $Aa = \mathfrak{a}$. Hieraus folgt die Existenz eines Elementes e von A mit $ea = a$. Da aber A keinen Nullteiler hat, so folgt hieraus, daß e sein Einselement ist. Dieser Widerspruch beweist den Satz.

Literaturverzeichnis.

[1] G. CASADIO, Costruzione di gruppi come prodotto di sottogruppi permutabili, *Rendiconti di mat. e delle sue applicazioni*, (V) **2** (1951), 348—360.

[2] C. J. EVERETT, An extension theory for rings, *American Journal of Math.*, **64** (1942), 363–370.

[3] L. FUCHS, Rédeian skew product of operator groups, *Acta Sci. Math.*, **14** (1952), 228—238.

[4] B. HUPPERT, Über Produkte von endlichen Gruppen, *Wiss. Zeitschrift der Humbolt-Univ. Berlin*, Nr. 5, Jahrgang III (1953—54).

[5] O. ORE, On a special class of polynomials, *Transactions American Math. Soc.*, **35** (1933), 559—584.

[6] L. RÉDEI, Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, *Journal für die reine und angew. Math.*, **188** (1950), 201–228.

[7] ———, Die Verallgemeinerung der Schreierschen Erweiterungstheorie, *Acta Sci. Math.*, **14** (1952), 252—273.

[8] L. RÉDEI und J. SZÉP, Die Verallgemeinerung der Theorie des Gruppenproduktes von Zappa—Casadio, *Acta Sci. Math.*, **16** (1955), 165—170.

[9] J. SZÉP, Über die als Produkt zweier Untergruppen darstellbaren endlichen Gruppen, *Commentarii Math. Helvetici*, **22** (1949), 31—33.

[10] J. SZÉP und L. RÉDEI, On factorisable groups, *Acta Sci. Math.*, **13** (1950), 235—238.

[11] G. ZAPPA, Sulla costruzione dei gruppi di due dati sottogruppi permutabili tra loro, *Atti 2. Congr. Unione Math. Ital.* (1942), 119—125.

(Eingegangen am 16. März 1957.)