Über eine allgemeine Ringkonstruktion durch schiefes Produkt.

Von J. SZENDREI in Szeged.

§ 1. Einleitung.

Das Prinzip des schiefen Produktes geht auf HAMILTON zurück und ist ein alltägliches Werkzeug der Algebra, um aus gegebenen Strukturen neue Strukturen zu konstruieren. In einer Arbeit [4][1]) hat L. RÉDEI einen sehr allgemeinen Typ von schiefen Produkten zweier Gruppen untersucht, der die Schreierschen Erweiterungen und die Zappa—Szépschen Produkte als Spezialfälle enthält. In einer anderen Arbeit [5] hat er zwei einfache Beispiele zur Konstruktion von Ringen betrachtet, die übrigens einander sehr ähneln. Mehrere Autoren haben schon auch bisher ihre Aufmerksamkeit auf die Theorie des schiefen Produktes in der Gruppentheorie berichtet. (Vgl. KOCHENDÖRFFER [3], RÉDEI und STÖHR [7], RÜHS [8].) Neulich hat G. SZÁSZ in seiner Arbeit [9] das schiefe Produkt von Halbverbänden untersucht.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit einem gewißen Typ von schiefem Produkt zweier Ringe. Dieser Typ ist sehr allgemein, und man kann ihn als das ringtheoretische Analogon des Rédeischen schiefen Produktes betrachten.

Stets sollen R, P zwei Ringe mit den Elementen $0, a, b, \ldots$ bzw. $o, \alpha, \beta, \ldots$ bezeichnen, wobei $0, o$ die Zeroelemente von R bzw. P sind. Wir betrachten die (geordneten) Paare

$$(a, \alpha) \qquad (a \in R,\ \alpha \in \mathrm{P}).$$

Das Element a und α heißt die R- bzw. P-*Komponente* von (a, α). Die Gleichheit der Elemente (a, α), (a', α') ist mit $a = a'$, $\alpha = \alpha'$ definiert. Die Menge dieser Paare machen wir zu einer Struktur, die wir mit $R \circ \mathrm{P}$ bezeichnen, so, daß wir die Addition und Multiplikation durch

$$(1) \qquad (a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b + [\alpha, \beta], [a, b] + \alpha + \beta),$$

$$(2) \qquad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab + a^{\beta} + {}^{\alpha}b + \{\alpha, \beta\}, \{a, b\} + \alpha^{b} + {}^{a}\beta + \alpha\beta)$$

[1]) Die Nummern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

definieren, wobei die Funktionen

$$(3)\qquad [\alpha,\beta],\{\alpha,\beta\},a^\beta,{}^\alpha b\in R;\qquad [a,b],\{a,b\},\alpha^b,{}^a\beta\in \mathrm{P}$$

den Anfangsbedingungen

$$(\mathrm{B})\qquad \begin{aligned}&[\alpha,o]=[o,\alpha]=\{\alpha,o\}=\{o,\alpha\}=0^\alpha=a^o={}^\alpha 0={}^o a=0,\\ &[a,0]=[0,a]=\{a,0\}=\{0,a\}=o^a=\alpha^0={}^a o={}^0\alpha=o\end{aligned}$$

unterworfen sind. Die vier Funktionen a^β, ${}^\alpha b$ $(\in R)$, α^b, ${}^a\beta$ $(\in \mathrm{P})$ in (3) können wir als *„Operatorprodukte"* auffassen. In diesem Sinne ist P (bzw. R) gleichzeitig ein Rechts- und Linksoperatorbereich von R (bzw. P). (Aber diese Operationen werden von der sonst üblichen abweichen.)

Aus (1), (2) und (B) folgen

$$\begin{aligned}&(a,o)+(b,o)=(a+b,[a,b]), && (0,\alpha)+(0,\beta)=([\alpha,\beta],\alpha+\beta),\\ &(a,o)(b,o)=(ab,\{a,b\}), && (0,\alpha)(0,\beta)=(\{\alpha,\beta\},\alpha\beta),\\ &(a,o)(0,\beta)=(a^\beta,{}^a\beta), && (0,\alpha)(b,o)=({}^\alpha b,\alpha^b).\end{aligned}$$

Diese und (1), (2) zeigen, daß das Funktionensystem (3) und das schiefe Produkt $R\circ \mathrm{P}$ einander gegenseitig eindeutig bestimmen.

Vor allem werden wir die Bedingungen aufstellen, unter denen das schiefe Produkt $R\circ\mathrm{P}$ ein Ring ist.

Wir nennen die Struktur $R\circ\mathrm{P}$ *k-fach ausgeartet*, wenn genau k der acht Relationen

$$\begin{aligned}&[\alpha,\beta]=0,\ \{\alpha,\beta\}=0,\ a^\beta=0,\ {}^\alpha b=0,\\ &[a,b]=o,\ \{a,b\}=o,\ \alpha^b=o,\ {}^a\beta=o\end{aligned}$$

identisch gelten. Wenn $k=0$ ist, so nennen wir $R\circ\mathrm{P}$ auch *nicht ausgeartet.* Im Falle $k=8$ ist $R\circ\mathrm{P}$ die direkte Summe von R und P.

Was die k-fachen $(k\neq 0{,}8)$ Ausartungen von $R\circ\mathrm{P}$ anbelangt, so gibt es unter ihnen viele wesentlich verschiedene. Wir werden aber nur die folgenden wichtigen Fälle erwähnen:

$$(4)\qquad R\,\varepsilon\,\mathrm{P}:\quad \begin{aligned}&(a,\alpha)+(b,\beta)=(a+b,[a,b]+\alpha+\beta),\\ &(a,\alpha)(b,\beta)=(ab,\{a,b\}+\alpha^b+{}^a\beta+\alpha\beta);\end{aligned}$$

$$(5)\qquad R\,\mathrm{s}\,\mathrm{P}:\quad \begin{aligned}&(a,\alpha)+(b,\beta)=(a+b,\alpha+\beta),\\ &(a,\alpha)(b,\beta)=(ab+a^\beta+{}^\alpha b,\alpha^b+{}^a\beta+\alpha\beta);\end{aligned}$$

$$(6)\qquad R*\mathrm{P}:\quad \begin{aligned}&(a,\alpha)+(b,\beta)=(a+b,\alpha+\beta),\\ &(a,\alpha)(b,\beta)=(ab+\{\alpha,\beta\},\alpha^b+{}^a\beta+\alpha\beta);\end{aligned}$$

$$(7)\qquad R\bullet\mathrm{P}:\quad \begin{aligned}&(a,\alpha)+(b,\beta)=(a+b,\alpha+\beta),\\ &(a,\alpha)(b,\beta)=(ab,\alpha^b+{}^a\beta+\alpha\beta).\end{aligned}$$

Die ersten zwei sind 4-fach ausgeartet. Es wird sich herausstellen, daß die Ringe $R \varepsilon \mathrm{P}$ mit den Everettschen Erweiterungen [2], [6] von P mit R zusammenfallen. Die Ringe $R s \mathrm{P}$ stimmen mit neulich von SZÉP [12] untersuchten Ringen überein. SZÉP hat über sie interessante Resultate erzielt.

Die Theorie von $R \circ \mathrm{P}$ enthält also insbesondere die dem Wesen nach sehr verschiedenen Theorien von EVERETT und SZÉP.

Die Ringe $R * \mathrm{P}$, die 5-fach ausgeartet sind, wurden bisher nicht betrachtet. Es wird gezeigt, daß diese Ringe die Konstruktion der komplexen Ringe und die der Quaternionenringe über einem Ring mit Einselement als Spezialfälle enthalten.[2]) Auf diese Weise kann man eine neue Konstruktion des Körpers der komplexen Zahlen und des Quaternionenkörpers angeben. Wir möchten betonen, daß unter den Ringkonstruktionen $R * \mathrm{P}$ auch Körper vorkommen.

$R \bullet \mathrm{P}$ ist einer der 6-fach ausgearteten Ringe, der als Spezialfall in $R \varepsilon \mathrm{P}$, $R s \mathrm{P}$ und $R * \mathrm{P}$ enthalten ist, und zwar handelt es sich im wesentlichen um die sogenannte faktorenfreie Everettsche Erweiterung [2], [6], [12]. Diese ist eine alltägliche und am frühesten eingeführte Ringkonstruktion (vgl. DORROH [1]).

Es ist uns nicht gelungen ein Beispiel für nichtausgeartete Ringe anzugeben.

§ 2. Die Ringe $R \circ \mathrm{P}$.

Wir wollen in diesem Paragraphen notwendige und hinreichende Bedingungen aufstellen, damit ein schiefes Produkt $R \circ \mathrm{P}$ von R und P ein Ring ist.

Bevor wir den Satz 1 aussprechen, bemerken wir, daß man durch die Vertauschung der Elemente von R und P in (1) und (2) aus der $R(\mathrm{P})$-Komponente die $\mathrm{P}(R)$ Komponente gewinnt. Folglich, wie es leicht zu sehen ist, liefert die Vertauschung der lateinischen und griechischen Buchstaben aus einer gültigen Formel in R (P), eine gültige Formel in P (R), die wir die *duale* der ursprünglichen Formel nennen. Von zwei solchen Formeln genügt es also immer nur eine zu beweisen.

Wir beweisen nun den folgenden

---

[2]) Unter einem komplexen Ring über einem Ring R mit Einselement e verstehen wir nach RÉDEI die Menge der Elemente

$$a + bi \qquad (a, b \in R)$$

in der $ei = ie = i$, $i^2 = e$ gilt und die Addition und Multiplikation durch

$$(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$$
$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$$

definiert werden.

Ähnlicherweise kann man den Quaternionenring über R definieren.

Satz 1. *Das durch (1) und (2) definierte schiefe Produkt mit den Anfangsbedingungen (B) ist dann und nur dann ein Ring, wenn*

$$\text{(K)}\qquad [\alpha, \beta] = [\beta, \alpha],$$

$$\text{(A}_1^+\text{)}\qquad [\alpha, \beta] + [\alpha+\beta, \gamma] = [\alpha, \beta+\gamma] + [\beta, \gamma],$$

$$\text{(A}_2^+\text{)}\qquad [[a, b], \gamma] = 0,$$

$$\text{(A}_1\text{)}\qquad a^{\{b, c\}} = {}^{\{a, b\}}c,$$

$$\text{(A}_2\text{)}\qquad {}^{\alpha}\{\beta, \gamma\} + \{\alpha, \beta\gamma\} = \{\alpha, \beta\}^{\gamma} + \{\alpha\beta, \gamma\},$$

$$\text{(A}_3\text{)}\qquad a({}^{\beta}c) + a^{(\beta^c)} = (a^{\beta})c + {}^{({}^{a}\beta)}c,$$

$$\text{(A}_4\text{)}\qquad {}^{\alpha}(b^{\gamma}) + \{\alpha, {}^{b}\gamma\} = ({}^{\alpha}b)^{\gamma} + \{\alpha^{b}, \gamma\},$$

$$\text{(A}_5\text{)}\qquad a(b^{\gamma}) + a^{{}^{b}\gamma} = (ab)^{\gamma} + \{\{a, b\}, \gamma\}, \qquad ({}^{\alpha}b)c + {}^{\alpha^{b}}c = {}^{\alpha}(bc) + \{\alpha, \{b, c\}\},$$

$$\text{(A}_6\text{)}\qquad (a^{\beta})^{\gamma} + \{{}^{a}\beta, \gamma\} = a^{\beta\gamma} + a\{\beta, \gamma\}, \qquad {}^{\alpha}({}^{\beta}c) + \{\alpha, \beta^{c}\} = {}^{\alpha\beta}c + \{\alpha, \beta\}c,$$

$$\text{(D}_1\text{)}\qquad \begin{aligned} {}^{\alpha}(b+c) + \{\alpha, [b, c]\} &= {}^{\alpha}b + {}^{\alpha}c + [\alpha^{b}, \alpha^{c}], \\ (a+b)^{\gamma} + \{[a, b], \gamma\} &= a^{\gamma} + b^{\gamma} + [{}^{a}\gamma, {}^{b}\gamma], \end{aligned}$$

$$\text{(D}_2\text{)}\qquad \begin{aligned} a^{\beta+\gamma} + a[\beta, \gamma] &= a^{\beta} + a^{\gamma} + [{}^{a}\beta, {}^{a}\gamma], \\ {}^{\alpha+\beta}c + [\alpha, \beta]c &= {}^{\alpha}c + {}^{\beta}c + [\alpha^{c}, \beta^{c}], \end{aligned}$$

$$\text{(D}_3\text{)}\qquad \begin{aligned} {}^{\alpha}[\beta, \gamma] + \{\alpha, \beta+\gamma\} &= \{\alpha, \beta\} + \{\alpha, \gamma\} + [\alpha\beta, \alpha\gamma], \\ [\alpha, \beta]^{\gamma} + \{\alpha+\beta, \gamma\} &= \{\alpha, \gamma\} + \{\beta, \gamma\} + \{\alpha\gamma, \beta\gamma\}, \end{aligned}$$

$$\text{(D}_4\text{)}\qquad a^{[b, c]} = [\{a, b\}, \{a, c\}], \qquad {}^{[a, b]}c = [\{a, c\}, \{b, c\}],$$

$$\text{(D}_5\text{)}\qquad [\{a, b\} + \alpha^{b}, {}^{a}\gamma + \alpha\gamma] = 0, \qquad [\{a, c\} + {}^{a}\gamma, \beta^{c} + \beta\gamma] = 0$$

und die dualen Gleichungen gelten.

Bemerkung. Man kann leicht sehen, daß die additive Gruppe des Ringes $R \circ \mathrm{P}$ die von RÉDEI [4] herrührende Gruppe $G \circ \Gamma$ (im kommutativen Fall) ist. Dieser Typ wurde auch von KOCHENDÖRFFER [3] untersucht.

Zum Beweis betrachten wir ein schiefes Produkt $R \circ \mathrm{P}$. Damit dies ein Ring ist, ist notwendig und hinreichend, daß die Addition (1) kommutativ, assoziativ und invertierbar, die Multiplikation (2) assoziativ ist, ferner die links- und rechtsseitige Distributivität gilt.

Die Kommutativitätsbedingung der Addition drückt sich durch (K) aus.

Die Assoziativitätsbedingung der Addition lautet nach (1)

$$\text{(8)}\qquad [\alpha, \beta] + [[a, b] + \alpha + \beta, \gamma] = [\alpha, [b, c] + \beta + \gamma] + [\beta, \gamma].$$

Es genügt zu zeigen, daß unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen (B) die Bedingung (8) mit den Bedingungen (A_1^+), (A_2^+) äquivalent ist. Wird in (8) $\alpha = o$ bzw. $b = 0$ eingesetzt, so entstehen nach (B) die mit (8) äquivalenten Relationen:

$$[[a, b]+\beta, \gamma]=[\beta, \gamma] \tag{9}$$

und (A_1^+). Die Bedingung (9) ist aber wegen (A_1^+) mit (A_2^+) äquivalent.

Da $(0, o)$ das Zeroelement von $R \circ \mathrm{P}$ ist, genügt es die Existenz des additiven Inversen in $R \circ \mathrm{P}$ nachzuweisen. Es gilt

$$(a, \alpha)=(a, o)+(0, \alpha)$$

wegen (1) und (B), ferner

$$(a, o)+(-a, -[a, -a])=(0, o), \qquad (0, \alpha)+(-[\alpha, -\alpha], \alpha)=(0, o).$$

Hieraus folgt für das additive Inverse

$$-(a, \alpha)=(-a-[\alpha, -\alpha], -[a, -a]-\alpha).$$

Die Bedingung der linksseitigen Distributivität lautet nach (1), (2)

$$\begin{aligned}(ab+ac+a[\beta, \gamma]+a^{[b, c]+\beta+\gamma}+{}^{\alpha}(b+c+[\beta, \gamma])+\{\alpha, [b, c]+\beta+\gamma\},\\ \{a, b+c+[\beta, \gamma]\}+\alpha^{b+c+[\beta, \gamma]}+{}^{a}([b, c]+\beta+\gamma)+\alpha[b, c]+\beta+\gamma)=\\ =(ab+a^{\beta}+{}^{\alpha}b+\{\alpha, \beta\}, \{a, b\}+\alpha^{b}+{}^{a}\beta+\alpha\beta)+\\ +(ac+a^{\gamma}+{}^{\alpha}c+\{\alpha, \gamma\}, \{a, c\}+\alpha^{c}+{}^{a}\gamma+\alpha\gamma),\end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned}a[\beta, \gamma]+a^{[b, c]+\beta+\gamma}+{}^{\alpha}(b+c+[\beta, \gamma])+\{\alpha, [b, c]+\beta+\gamma\}=\\ =a^{\beta}+a^{\gamma}+{}^{\alpha}b+{}^{\alpha}c+\{\alpha, \beta\}+\{\alpha, \gamma\}+\\ +[\{a, b\}+\alpha^{b}+{}^{a}\beta+\alpha\beta, \{a, c\}+\alpha^{c}+{}^{a}\gamma+\alpha\gamma],\end{aligned} \tag{10}$$

und eine ähnliche Gleichung gilt für die duale Formel.

Die Bedingung für die rechtsseitige Distributivität entsteht aus (10) dadurch, daß man die Reihenfolge der Faktoren vertauscht und die Funktionen $\{\xi, \eta\}, x^{\xi}, {}^{\xi}x$ der Reihe nach durch $\{\eta, \xi\}, {}^{\xi}x, x^{\xi}$ ersetzt. Auf Grund dieser Tatsache, wenn eine Formel aus der linksseitigen Distributivität folgt, so liefert diese Ersetzung wieder eine gültige Formel, die genau die analoge Folgerung der rechtsseitigen Distributivität ist. Zum Zweck des leichteren Ausdrucks werden wir dieses Verfahren das *Symmetrisieren* des betreffenden Beweises nennen. Die dadurch entstehenden neuen Formeln werden die *symmetrisierten* der ursprünglichen Formeln genannt.

Im folgenden werden wir zu einer Formel stets auch die symmetrisierte und duale hinzunehmen.

Die Behauptung läßt sich dann so aussprechen, daß (10) mit (D_1) bis (D_5) äquivalent ist.

Für $\beta=o, c=0$ ergibt (10) wegen der Invertierbarkeit der Addition die Bedingung (D_5). Ferner, wenn wir in (10)

$$\left.\begin{array}{l} a=0, \beta=\gamma=o \\ b=c=0, \alpha=o \\ a=b=c=0 \\ \alpha=\beta=\gamma=o \end{array}\right\} \text{ einsetzen, so entstehen } \left\{\begin{array}{l} (D_1), \\ (D_2), \\ (D_3), \\ (D_4). \end{array}\right.$$

Um die Umkehrung, d. h. daß (10) eine Folgerung der Bedingungen (D_1) bis (D_5) ist, zu beweisen, zeigen wir zuerst, daß aus (K), (A_1^+), (A_2^+) und (D_1) bis (D_5) noch die hier anschließend abzuleitenden Gleichungen folgen.

Aus (A_1^+) folgt

$$(11) \qquad [\alpha_1+\alpha_2, \beta_1+\beta_2]+[\alpha_1, \alpha_2]+[\beta_1, \beta_2]=[\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2]+[\alpha_1, \beta_1]+[\alpha_2, \beta_2].$$

Die Gleichungen

$$(12) \qquad [\{a, b\}, {}^a\gamma]=[\alpha^b, \alpha\gamma]=0$$

sind einfache Folgerungen von (D_5), wenn man in (D_5) $\alpha=o$ bzw. $a=0$ einsetzt. Wegen (11) und (12) ist (D_5) mit

$$(13) \qquad [\{a, b\}+{}^a\gamma, \alpha^b+\alpha\gamma]=0$$

äquivalent.

Es gelten auch die folgenden:

$$(14) \qquad [\alpha^b+\alpha\beta, \alpha^c+\alpha\gamma]=[\alpha[b,c], \alpha(\beta+\gamma)]+[\alpha\beta, \alpha\gamma]+[\alpha^b, \alpha^c],$$

$$(15) \qquad [\{a, b\}+{}^a\beta, \{a, c\}+{}^a\gamma]=[{}^a[b,c], {}^a(\beta+\gamma)]+[\{a, b\}, \{a, c\}]+[{}^a\beta, {}^a\gamma].$$

Die Gleichung (14) sieht man so ein. Wegen (11) und (12) ist

$$[\alpha^b+\alpha\beta, \alpha^c+\alpha\gamma]=[\alpha^b+\alpha^c, \alpha(\beta+\gamma)]+[\alpha\beta, \alpha\gamma]+[\alpha^b, \alpha^c].$$

Es genügt zu zeigen, daß

$$[\alpha^b+\alpha^c, \alpha(\beta+\gamma)]=[\alpha[b,c], \alpha(\beta+\gamma)].$$

Unter Berücksichtigung von (9) (d. h. (A_1^+), (A_2^+)), (D_2), (11) und (12) ergibt sich

$$[\alpha^b+\alpha^c, \alpha(\beta+\gamma)]=[\alpha^b+\alpha^c+[{}^ab, {}^ac], \alpha(\beta+\gamma)]=[\alpha[b,c]+\alpha^{b+c}, \alpha(\beta+\gamma)]=$$
$$=[\alpha(\beta+\gamma+[b,c]), \alpha^{b+c}]+[\alpha(\beta+\gamma), \alpha[b,c]]=[\alpha[b,c], \alpha(\beta+\gamma)],$$

was zu beweisen war.

Wenden wir (11) auf die linke Seite von (15) an, so gilt

$$[\{a, b\}+{}^a\beta, \{a, c\}+{}^a\gamma]=[{}^a\beta+{}^a\gamma, \{a, b\}+\{a, c\}]+[\{a, b\}, \{a, c\}]+[{}^a\beta, {}^a\gamma].$$

Also hat man nur noch

$$(16) \qquad [{}^a\beta+{}^a\gamma, \{a, b\}+\{a, c\}]=[{}^a[b,c], {}^a(\beta+\gamma)]$$

einzusehen. Die linke Seite ist nach (9) (d. h. (A_1^+) und (A_2^+)), (D_1), (D_3) und (11)

$$[{}^a\beta + {}^a\gamma, \{a, b\} + \{a, c\}] = [{}^a\beta + {}^a\gamma + [a^\beta, a^\gamma], \{a, b\} + \{a, c\} + [ab, ac]] =$$
$$= [{}^a(\beta+\gamma) + \{a, [\beta, \gamma]\}, {}^a[b, c] + \{a, b+c\}] =$$
$$= [{}^a(\beta+\gamma) + {}^a[b, c], \{a, [\beta, \gamma]\} + \{a, b+c\}] + [\{a, [\beta, \gamma]\}, \{a, b+c\}] +$$
$$+ [{}^a(\beta+\gamma), {}^a[b, c]].$$

Der zweite Summand verschwindet hier wegen (D_4) und (A_2^+). Jetzt beweisen wir, daß auch das erste Glied verschwindet. Dieses ist von ähnlicher Form, wie die linke Seite von (16). Folglich ist

$$[{}^a(\beta+\gamma) + {}^a[b, c], \{a, [\beta, \gamma]\} + \{a, b+c\}] =$$
$$= [{}^a(\beta+\gamma+[b, c]) + {}^a[[\beta, \gamma], b+c], \{a, [\beta+\gamma, [b, c]\} + \{a, [\beta, \gamma] + b + c\}] +$$
$$+ [{}^a(\beta+\gamma+[b, c]), {}^a[[\beta, \gamma], b+c]].$$

Das letzte Glied ist wegen (A_2^+) gleich 0, das erste kann man wegen (A_2^+) als

$$[{}^a(\beta+\gamma+[b, c]), \{a, [\beta, \gamma] + b + c\}]$$

schreiben. Da dieses nach (12) verschwindet, so haben wir (15) bewiesen.

Im folgenden benötigen wir die folgende Gleichung:

$$[\{a, b\} + {}^a\beta + \alpha^b + \alpha\beta, \{a, c\} + {}^a\gamma + \alpha^c + \alpha\gamma] = \tag{17}$$
$$= [\{a, b\} + {}^a\beta, \{a, c\} + {}^a\gamma] + [\alpha^b + \alpha\beta, \alpha^c + \alpha\gamma].$$

Um diese zu beweisen, formen wir die linke Seite nach (12) und (11) um:

$$[\{a, b\} + {}^a\beta, \{a, c\} + {}^a\gamma] + [\alpha^b + \alpha\beta, \alpha^c + \alpha\gamma] +$$
$$+ [\{a, b\} + {}^a\beta + \{a, c\} + {}^a\gamma, \alpha^b + \alpha^c + \alpha(\beta+\gamma)].$$

Der letzte Summand ist wegen (A_2^+) gleich

$$[\{a, b\} + \{a, c\} + [ab, ac] + {}^a\beta + {}^a\gamma + [a^\beta, a^\gamma], \alpha^b + \alpha^c + [{}^ab, {}^ac] + \alpha(\beta+\gamma)].$$

Hieraus folgt nach (D_3), (D_1) und (D_2)

$$[{}^a[b, c] + \{a, b+c\} + {}^a(\beta+\gamma) + \{a, [\beta, \gamma]\}, \alpha[b, c] + \alpha^{b+c} + \alpha(\beta+\gamma)] =$$
$$= [{}^a([b, c] + \beta + \gamma) + \{a, [[b, c], \beta+\gamma]\} +$$
$$+ {}^a[b+c, [\beta, \gamma]] + \{a, b+c+[\beta, \gamma]\}, \alpha([b, c] + \beta + \gamma) + \alpha^{b+c}].$$

Wenn man hier (A_2^+) berücksichtigt, folgt wegen (D_5) das Verschwinden dieses Gliedes.

Wir sind schon in der Lage die Bedingung (10) der (linksseitigen) Distributivität aus (K), (A_1^+), (A_2^+), (D_1)—(D_5) leicht zu beweisen. Mit wiederholter Anwendung von (D_1)—(D_4) bekommt man

$$\begin{aligned} {}^a(b+c+[\beta, \gamma]) &= {}^a(b+c+[\beta, \gamma]) + \{\alpha, [b+c, [\beta, \gamma]]\} = \\ &= {}^a(b+c) + {}^a[\beta, \gamma] + [\alpha^{b+c}, \alpha^{[\beta, \gamma]}] = {}^ab + {}^ac + [\alpha^b, \alpha^c] - \{\alpha, [b, c]\}, \end{aligned} \tag{18}$$

ferner

$$a[\beta,\gamma]+a^{[b,c]+\beta+\gamma}=a[\beta,\gamma]+a^{[b,c]+\beta+\gamma}+a[[b,c],\beta+\gamma]=$$

$$(19)\qquad =a[\beta,\gamma]+a^{[b,c]}+a^{\beta+\gamma}+[{}^a[b,c],{}^a(\beta+\gamma)]=$$

$$=[\{a,b\},\{a,c\}]+a^{\beta}+a^{\gamma}+[{}^a\beta,{}^a\gamma]+[{}^a[b,c],{}^a(\beta+\gamma)],$$

endlich

$$\{\alpha,[b,c]+\beta+\gamma\}=\{\alpha,[b,c]+\beta+\gamma\}+{}^\alpha[[b,c],\beta+\gamma]=$$

$$=\{\alpha,[b,c]\}+\{\alpha,\beta+\gamma\}+[\alpha[b,c],\alpha(\beta+\gamma)]=$$

$$=\{\alpha,[b,c]\}+\{\alpha,\beta\}+\{\alpha,\gamma\}+\{\alpha\beta,\alpha\gamma\}-{}^\alpha[\beta,\gamma]+[\alpha[b,c],\alpha(\beta+\gamma)].$$

Die Summe der linken Seiten von (18), (19), (20) ist eben die linke Seite von (10). Da die Formeln (14), (15) und (17) nach obigem Folgerungen der Bedingungen (D_1) bis (D_5) (und (K), (A_1^+), (A_2^+)) sind und die Summe der rechten Seiten von (18)—(20) nach (14), (15) und (17) der rechten Seite von (10) gleich ist, folgt die Äquivalenz der Bedingungen (10) und (D_1)—(D_5).

Es genügt also noch zu zeigen, daß unter Berücksichtigung von (B) die Assoziativität der Multiplikation mit den Bedingungen (A_1)—(A_6) äquivalent ist. Da nach (1) die Zerlegung $(a,\alpha)=(a,o)+(0,\alpha)$ gilt, so genügt es wegen der Distributivität, daß man die Bedingungen der Assoziativität der Multiplikation für die Elemente von der Form (a,o), $(0,\alpha)$ aufstellt. Es kommen die acht Dreierprodukte

$$(21)\qquad (a,o)(b,o)(c,o),\qquad (0,\alpha)(0,\beta)(0,\gamma),$$

$$(22)\qquad (a,o)(b,o)(0,\gamma),\qquad (0,\alpha)(b,o)(c,o),$$

$$(23)\qquad (a,o)(0,\beta)(0,\gamma),\qquad (0,\alpha)(0,\beta)(c,o),$$

$$(24)\qquad (a,o)(0,\beta)(c,o),\qquad (0,\alpha)(b,o)(0,\gamma)$$

in Betracht. Für die Produkte (21_1) und (21_2) sind die Assoziativitätsbedingungen nach (2) mit (A_1) bzw. (A_2) äquivalent. Aus (22) und (23) ergeben sich die Bedingungen (A_5) und (A_6). Endlich sind für (24_1), (24_2) die Assoziativitätsbedingungen eben (A_3) und (A_4), womit Satz 1 bewiesen ist.

§ 3. Spezialfälle.

A. Everett [2] hat nach Schreier die folgende Definition eingeführt: Man nenne einen Ring $\mathfrak{R}$ eine Erweiterung von P mit R, wenn $\mathfrak{R}$ ein Ideal P' hat, wofür $P'\approx P$, $\mathfrak{R}/P'\approx R$ gilt. Man darf natürlich $P'=P$ setzen, wie das üblich ist. Die angegebene Form der Definition ist aber für unsere Zwecke bequemer.

Der folgende Satz stimmt im wesentlichen mit dem Hauptsatz der Erweiterungstheorie von Everett [2] überein (siehe auch Rédei [6]):

Ein schiefes Produkt $\mathfrak{R} = R\,\varepsilon\,\mathrm{P}$ *der Ringe* R, P *ist dann und nur dann ein Ring, wenn*

$$(E_1) \qquad [a, b] = [b, a],$$

$$(E_2) \qquad [a, b] + [a+b, c] = [a, b+c] + [b, c],$$

$$(E_3) \qquad {}^{a}\{b, c\} + \{a, bc\} = \{a, b\}^{c} + \{ab, c\},$$

$$(E_4) \qquad \alpha({}^{b}\gamma) = (\alpha^{b})\gamma,$$

$$(E_5) \qquad {}^{a}(\beta^{c}) = ({}^{a}\beta)^{c},$$

$$(E_6) \qquad \alpha(\beta^{c}) = (\alpha\beta)^{c}, \qquad ({}^{a}\beta)\gamma = {}^{a}(\beta\gamma),$$

$$(E_7) \qquad (\alpha^{b})^{c} = \alpha^{bc} + \alpha\{b, c\}, \qquad {}^{a}({}^{b}\gamma) = {}^{ab}\gamma + \{a, b\}\gamma,$$

$$(E_8) \qquad {}^{a}(\beta+\gamma) = {}^{a}\beta + {}^{a}\gamma, \qquad (\alpha+\beta)^{c} = \alpha^{c} + \beta^{c},$$

$$(E_9) \qquad \alpha^{b+c} + \alpha[b, c] = \alpha^{b} + \alpha^{c}, \qquad {}^{a+b}\gamma + [a, b]\gamma = {}^{a}\gamma + {}^{b}\gamma,$$

$$(E_{10}) \qquad \begin{aligned} {}^{a}[b, c] + \{a, b+c\} &= [ab, ac] + \{a, b\} + \{a, c\}, \\ [a, b]^{c} + \{a+b, c\} &= \{ac, bc\} + \{a, c\} + \{b, c\} \cdot \end{aligned}$$

gelten. Diese Ringe sind bis auf Isomorphie die sämtlichen Everettschen Erweiterungen von P *mit* R, *und zwar bilden dann die Elemente* $(0, \alpha)$ *ein Ideal* P' *von* $\mathfrak{R}$, *wofür*

$$\mathfrak{R}/\mathrm{P}' \approx R((a, o) + \mathrm{P}' \to a), \quad \mathrm{P}' \approx \mathrm{P}((0, \alpha) \to \alpha)$$

gilt.

Die erste Behauptung dieses Satzes ist bloß der Spezialfall $[\alpha, \beta] = \{\alpha, \beta\} = a^{\beta} = {}^{\alpha}b = 0$ vom Satz 1. Die Beweise der übrigen Behauptungen dieses Satzes kann man in [2], [6] finden.

Für Ergänzungen der Everettschen Erweiterungstheorie verweisen wir auf [6], [10],[3]) [11].

B. Wir wollen jetzt die Ringe $R\,\mathrm{s}\,\mathrm{P}$ aus (5) bestimmen. Wir haben schon in der Einleitung bemerkt, daß diese Ringe mit den Szépschen Erweiterungen identisch sind. Bezeichnen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ $(\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2 = 0)$ einen belie-

---

[3]) Wir berichtigen einen Fehler in der zitierten Arbeit, und zwar sind dort auf Seite 180 die Wörter „splitting" in den Zeilen 1, 10, 18 zu streichen und die Zeilen 13—16 durch die folgenden zu ersetzen:

$$(\bar{a}, \alpha) + (\bar{b}, \beta) = (\overline{a+b}, [\bar{a}, \bar{b}] + \alpha + \beta),$$

$$(\bar{a}, \alpha)(\bar{b}, \beta) = (\overline{a+b}, \{\bar{a}, \bar{b}\} + \alpha\bar{b} + \bar{a}\beta + \alpha\beta),$$

where $[\bar{a}, \bar{b}] = \left[\frac{a+b}{m}\right]\mu$, $\{\bar{a}, \bar{b}\} = \left[\frac{ab}{m}\right]\mu$ if $m > 0$, denoting by μ the element of P for which $m\xi = \mu\xi = \xi\mu$, and $[\bar{a}, \bar{b}] = \{\bar{a}, \bar{b}\} = o$ if $m = 0$, finally $\bar{x}\xi = \xi\bar{x} = x\xi$. ($x$ denotes the least non-negative representative of the residue class $\bar{x}$.)

bigen Ring bzw. zwei echte Unterringe von $\mathfrak{R}$, gilt ferner[4])

$$\mathfrak{R}^+ = \mathfrak{S}_1^+ \dotplus \mathfrak{S}_2^+,$$

wo $\dotplus$ das Zeichen der direkten Summe ist, so wird $\mathfrak{R}$ in Bezug auf die Addition *zerlegbar* genannt.

Als Umkehrung tritt das dem Everettschen ähnliche Szépsche Erweiterungsproblem auf, aus gegebenen Ringen R, P alle Ringe $\mathfrak{R}$ mit

$$\mathfrak{R}^+ = \mathfrak{S}_1^+ \dotplus \mathfrak{S}_2^+, \quad \mathfrak{S}_1 \approx R, \quad \mathfrak{S}_2 \approx P \quad (\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2 = 0)$$

zu bestimmen, wo $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ Unterringe von $\mathfrak{R}$ sind.

Es gilt der von Szép herrührende Satz:

Das schiefe Produkt $R s P$ der Ringe R und P ist dann und nur dann ein Ring, wenn

$$(S_1) \qquad a({}^{\beta}c) + a^{({}^{\beta}c)} = (a^{\beta})c + {}^{(a^{\beta})}c,$$

$$(S_2) \qquad {}^{\alpha}(b^{\gamma}) = ({}^{\alpha}b)^{\gamma},$$

$$(S_3) \qquad a(b^{\gamma}) + a^{b^{\gamma}} = (ab)^{\gamma}, \qquad ({}^{\alpha}b)c + {}^{\alpha^{b}}c = {}^{\alpha}(bc),$$

$$(S_4) \qquad (a^{\beta})^{\gamma} = a^{\beta\gamma}, \qquad {}^{\alpha}({}^{\beta}c) = {}^{\alpha\beta}c,$$

$$(S_5) \qquad {}^{\alpha}(b+c) = {}^{\alpha}b + {}^{\alpha}c, \qquad (a+b)^{\gamma} = a^{\gamma} + b^{\gamma},$$

$$(S_6) \qquad a^{\beta+\gamma} = a^{\beta} + a^{\gamma}, \qquad {}^{\alpha+\beta}c = {}^{\alpha}c + {}^{\beta}c$$

und die duale Gleichungen gelten. Diese Ringe sind bis auf Isomorphie die sämtlichen Szépschen Erweiterungen von R und P.

Die Elemente (a, o) bzw. $(0, \alpha)$ bilden je einen Unterring (R, o), $(0, P)$, denn

$$(a, o) + (b, o) = (a+b, o), \quad (0, \alpha) + (0, \beta) = (0, \alpha+\beta),$$
$$(a, o)(b, o) = (ab, o), \quad (0, \alpha)(0, \beta) = (0, \alpha\beta)$$

gelten, woraus $(R, o) \approx R$ und $(0, P) \approx P$, ferner

$$(R s P)^+ = (R, o)^+ \dotplus (0, P)^+$$

folgen.

Die erste Behauptung des Satzes ergibt sich sofort aus Satz 1 als der Spezialfall $[\alpha, \beta] = \{\alpha, \beta\} = 0$, $[a, b] = \{a, b\} = o$. Für die übrigen Behauptungen und anderen Ergänzungen der Szépschen Erweiterungen verweisen wir auf seine Arbeit [12].

C. Wir wollen uns mit dem sehr interessanten schiefen Produkt $R * P$ beschäftigen, das 5-fach ausgeartet ist. Es gilt als Spezialfall von Satz 1 der folgende Satz

---

[4]) T^+ bezeichnet die additive Gruppe des Ringes T.

Das schiefe Produkt $R*\mathrm{P}$ ist dann und nur dann ein Ring, wenn

(I) $$\alpha({}^b\gamma)=(\alpha^b)\gamma,$$
(II) $${}^a(\beta^c)=({}^a\beta)^c,$$
(III) $$\alpha(\beta^c)=(\alpha\beta)^c, \qquad ({}^a\beta)\gamma={}^a(\beta\gamma),$$
(IV) $$(\alpha^b)^c=\alpha^{bc}, \qquad {}^a({}^b\gamma)={}^{ab}\gamma,$$
(V) $${}^a(\beta+\gamma)={}^a\beta+{}^a\gamma, \qquad (\alpha+\beta)^c=\alpha^c+\beta^c,$$
(VI) $$\alpha^{b+c}=\alpha^b+\alpha^c, \qquad {}^{a+b}\gamma={}^a\gamma+{}^b\gamma,$$
(VII) $$\alpha^{\{\beta,\gamma\}}={}^{\{\alpha,\beta\}}\gamma,$$
(VIII) $$\{\alpha,\beta\gamma\}=\{\alpha\beta,\gamma\},$$
(IX) $$\{\alpha,{}^b\gamma\}=\{\alpha^b,\gamma\},$$
(X) $$\{{}^a\beta,\gamma\}=a\{\beta,\gamma\}, \qquad \{\alpha,\beta^c\}=\{\alpha,\beta\}c,$$
(XI) $$\{\alpha,\beta+\gamma\}=\{\alpha,\beta\}+\{\alpha,\gamma\}, \qquad \{\alpha+\beta,\gamma\}=\{\alpha,\gamma\}+\{\beta,\gamma\}$$

gelten.

Wir kommen jetzt zu einer Anwendung des schiefen Produktes $R*\mathrm{P}$. Hier bezeichnen R und R_0 einen beliebigen Ring mit Einselement, bzw. einen Zeroring, dessen additive Gruppe zu der additiven Gruppe von R isomorph ist. Die Elemente von R und R_0 werden mit $0, a, b, \ldots$ bzw. $0_0, a_0, b_0, \ldots$ bezeichnet, so daß die Abbildung $a\to a_0$ einen Isomorphismus von R^+ auf R_0^+ liefert. Wir betrachten das schiefe Produkt $R*R_0$ der Ringe R und R_0, wobei die vorkommenden Funktionen durch

$$\{a_0, b_0\}=-ab, \quad {}^ab_0=(ab)_0, \quad a_0^b=(ab)_0$$

definiert werden.

Nach den obigen ist $R*R_0$ ein Ring, die mit dem *komplexen Ring über* R isomorph ist. Wir betrachten nämlich den komplexen Ring R über R. Die Elemente von R — wie es üblich ist — kann man in der Form $a+bi$ angeben. Dann liefert die Abbildung

$$a+bi\to(a, b_0)$$

von R auf $R*R_0$ einen passenden Isomorphismus.

Wenn R insbesondere der Körper $\mathfrak{R}$ der reellen Zahlen ist, so ist $\mathfrak{R}*\mathfrak{R}_0$ isomorph mit dem Körper K der komplexen Zahlen.

Betrachten wir jetzt das schiefe Produkt $\mathsf{R}*\mathsf{R}_0$, wobei R den komplexen Ring über einem Ring R mit Einselement und R_0 einen Zeroring mit $\mathsf{R}_0^+\approx\mathsf{R}^+$ bezeichnet. Es seien $0, \alpha, \beta, \ldots,$ und $0_0, \alpha_0, \beta_0, \ldots$ die Elemente von R bzw. R_0 und es gelte der Isomorphismus $\mathsf{R}^+\approx\mathsf{R}_0^+(\alpha\to\alpha_0)$. Die jetzt vorkommenden Funktionen werden durch

$$\{\alpha_0, \beta_0\}=-\alpha\bar{\beta}, \quad {}^\alpha\beta_0=(\alpha\beta)_0, \quad \alpha_0^\beta=(\alpha\bar{\beta})_0$$

definiert, wobei $\bar{\xi}$ das Konjugierte von ξ bezeichnet. Nach Satz 4 ist $R * R_0$ ein Ring, der mit dem *Quaternionenring* Q (über R) isomorph ist.

Die Elemente des Quaternionenringes Q über R kann man bekanntlich in der Form $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ annehmen. Ein Isomorphismus von auf $R * R_0$ ist dann durch

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \rightarrow (\alpha, \beta_0)$$

angegeben.

Wird R mit dem Körper K der komplexen Zahlen identifiziert, so ergibt sich, daß $K * K_0$ mit dem Quaternionenkörper über $\mathfrak{R}$ isomorph ist.

D. Man gewinnt durch die Spezialisierung $[\alpha, \beta] = \{\alpha, \beta\} = a^{\beta} = {}^{\alpha}b = 0$, $[a, b] = \{a, b\} = o$ die folgende Behauptung:

Das schiefe Produkt $R \bullet P$ der Ringe R und P aus (7) *ist dann und nur dann ein Ring, wenn die Gleichungen* (I) *bis* (VI) *aus dem Spezialfall* **C** *gelten.*

Diese Ringkonstruktion, die als die faktorenfreie Everettsche Erweiterung von P mit R bekannt ist, ist ein Spezialfall sowohl der Everettschen als auch der Szépschen Erweiterungen.

Diese Konstruktion geht im Fall $\alpha^b = {}^b\alpha$ auf DORROH [1] zurück. Er hat mit dieser Hilfe bewiesen, daß jeder Ring P eine Erweiterung mit Einselement hat. In seinem Fall ist $R = \mathfrak{J}$ der Ring der ganzen rationalen Zahlen, ferner sind jetzt $\alpha^b, {}^b\alpha$ durch $\alpha^b = {}^b\alpha = b\alpha$ definiert, weshalb die obigen Bedingungen (I) bis (VI) trivialerweise erfüllt sind.

§ 4. Das Isomorphieproblem des schiefen Produktes $R \circ P$.

Endlich wollen wir uns noch mit dem Isomorphieproblem des schiefen Produktes $R \circ P$ beschäftigen. Dieses Problem besteht darin, daß man bei gegebenen Ringen R, P die sämtlichen isomorphen schiefen Produkte $R \circ P$ bestimmt. Es genügt vollkommen, daß man einen Ring $R \circ P$ gleich in der Form von Satz 1 annimmt, was wir im folgenden stets tun wollen. Ausdrücklich gesagt bedeutet das, daß man einen Ring $R \circ P$ durch (1), (2) und (B) definiert. Das hat den großen Vorteil, daß bei festen R und P die sämtlichen schiefen Produkte $R \circ P$ aus denselben Elementen (a, α) bestehen. Die vollständige Lösung des Isomorphieproblems ist sehr schwer. Das weiteste, was wir in dieser Richtung sagen können, ist im folgenden Satz enthalten.

Satz 2. *Man nehme ein schiefes Produkt $R \circ P$ aus Satz 1. Mit dem zugehörigen Funktionenachter* (3) *zusammen genügt auch jeder Funktionen-*

achter

$$(25)\qquad \begin{aligned}&A^{-1}[\mathrm{A}\alpha, \mathrm{A}\beta],\ A^{-1}\{\mathrm{A}\alpha, \mathrm{A}\beta\},\ A^{-1}((Aa)^{\mathrm{A}\beta}),\ A^{-1}({}^{\mathrm{A}\alpha}(Ab)),\\ &\mathrm{A}^{-1}[Aa, Ab],\ \mathrm{A}^{-1}\{Aa, Ab\},\ \mathrm{A}^{-1}((\mathrm{A}\alpha)^{Ab}),\ \mathrm{A}^{-1}({}^{Aa}(\mathrm{A}\beta)),\end{aligned}$$

den Bedingungen (B), (K) *bis* (D_5), *wobei* $a \to Aa$ *und* $\alpha \to \mathrm{A}\alpha$ *einem Automorphismus von* R *bzw.* P *bezeichnet. Werden in* (1), (2) *die acht Funktionen durch* (25) *ersetzt, so entsteht wieder ein schiefes Produkt und es gilt zwischen ihnen der Isomorphismus*

$$(26)\qquad (a, \alpha) \to (Aa, \mathrm{A}\alpha).$$

Zum Beweis nehmen wir vor allem in acht, daß der Funktionenachter (25) offenbar den Bedingungen (B) genügt. Nun betrachten wir die Permutation $(a, \alpha) \to \Pi^{-1}(a, \alpha) = (Aa, \mathrm{A}\alpha)$ der Elemente von $R \circ \mathrm{P}$. Nach dem bekannten allgemeinen Prinzip (s. RÉDEI [4] § 3) liefert der Übergang zu den neuen Verknüpfungen

$$\begin{aligned}(a, \alpha) \oplus (b, \beta) &= \Pi(\Pi^{-1}(a, \alpha) + \Pi^{-1}(b, \beta)),\\ (a, \alpha) \odot (b, \beta) &= \Pi(\Pi^{-1}(a, \alpha)\, \Pi^{-1}(b, \beta))\end{aligned}$$

eine zu $R \circ \mathrm{P}$ isomorphe Struktur, und zwar gilt dabei der Isomorphismus (26). Ferner berechnen sich die rechten Seiten der vorigen Gleichungen zu

$$\begin{aligned}\Pi((Aa, \mathrm{A}\alpha) + (Ab, \mathrm{A}\beta)) &= \Pi(Aa + Ab + [\mathrm{A}\alpha, \mathrm{A}\beta], [Aa, Ab] + \mathrm{A}\alpha + \mathrm{A}\beta) =\\ &= (a + b + A^{-1}[\mathrm{A}\alpha, \mathrm{A}\beta], \mathrm{A}^{-1}[Aa, Ab] + \alpha + \beta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pi((Aa, \mathrm{A}\alpha)(Ab, \mathrm{A}\beta)) &= \Pi(Aa\,Ab + (Aa)^{\mathrm{A}\beta} +\\ &\quad + {}^{\mathrm{A}\alpha}(Ab) + \{\mathrm{A}\alpha, \mathrm{A}\beta\}, \{Aa, Ab\} + (\mathrm{A}\alpha)^{Ab} + {}^{Aa}(\mathrm{A}\beta) + \mathrm{A}\alpha\mathrm{A}\beta) =\\ &= (ab + A^{-1}((Aa)^{\mathrm{A}\beta}) + A^{-1}({}^{\mathrm{A}\alpha}(Ab)) + A^{-1}\{\mathrm{A}\alpha, \mathrm{A}\beta\}, \mathrm{A}^{-1}\{Aa, Ab\} +\\ &\quad + \mathrm{A}^{-1}((\mathrm{A}\alpha)^{Ab}) + \mathrm{A}^{-1}({}^{Aa}(\mathrm{A}\beta)) + \alpha\beta).\end{aligned}$$

Der Vergleich mit (1) und (2) beweist (25), ferner folgt aus Satz 1 mit Notwendigkeit, daß für (25) auch (K)—(D_5) gelten. Somit haben wir Satz 2 bewiesen.

Insbesondere für das Isomorphieproblem des schiefen Produktes $R \varepsilon \mathrm{P}$ verweisen wir auf RÉDEI [6].

Literaturverzeichnis.

[1] J. L. Dorroh, Concerning adjunctions to algebras, *Bulletin of the American Math. Society*, **38** (1932), 85—88.

[2] C. J. Everett, An extension theory for rings, *American Journal of Math.*, **64** (1942), 363—370.

[3] R. Kochendörffer, Zur Theorie der Rédeischen schiefen Produkte, *Journal für die reine und angewandte Math.*, **192** (1953), 96—101.

[4] L. Rédei, Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, *Journal für die reine und angewandte Math.*, **188** (1950), 201—227.

[5] L. Rédei, Über gewisse Ringkonstruktionen durch schiefes Produkt, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **2** (1951), 185—188.

[6] L. Rédei, Die Verallgemeinerung der Schreierschen Erweiterungstheorie, *Acta Sci. Math.*, **14** (1952), 252—273.

[7] L. Rédei und A. Stöhr, Über ein spezielles schiefes Produkt in der Gruppentheorie, *Acta Sci. Math.*, **15** (1953—54), 7—11.

[8] F. Rühs, Über ein spezielles Rédeisches schiefes Produkt in der Gruppentheorie, *Acta Sci. Math.*, **16** (1955), 160—164.

[9] G. Szász, Rédeische schiefe Produkte von Halbverbänden, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **7** (1957), 441—461.

[10] J. Szendrei, On Schreier extension of rings without zerodivisors, *Publicationes Math. Debrecen*, **2** (1952), 276—280.

[11] J. Szendrei, On rings admitting only direct extensions, *Publicationes Math. Debrecen*, **3** (1953), 180—182.

[12] J. Szép, Über eine neue Erweiterung von Ringen. I, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 51—62.

(Eingegangen am 17. Oktober 1957.)