Eine Bemerkung über die endlichen einstufig nichtkommutativen Gruppen.

Von LADISLAUS RÉDEI in Szeged.

Einstufig nichtkommutativ heißt eine Gruppe, die nur kommutative echte Untergruppen hat, ohne selbst kommutativ zu sein. Ob es unter ihnen auch unendliche Gruppen gibt, ist unbekannt. Die endlichen Gruppen dieser Art sind vollständig bekannt.[1] Sie sind teils p-Gruppen, teils haben sie eine durch genau zwei verschiedene Primzahlen teilbare Ordnung. Die letzteren Gruppen haben stets genau nur eine normale Sylowgruppe. Diese ist freilich kommutativ, außerdem ist sie elementar, worunter wir verstehen, daß ihre Elemente ($\neq 1$) von Primzahlordnung sind.

Die Frage wurde bisher nicht aufgeworfen, ob jede endliche kommutative elementare Gruppe die normale Sylowgruppe von mindestens einer endlichen einstufig nichtkommutativen Gruppe ist.

S a t z. *Eine endliche kommutative elementare Gruppe ist dann und nur dann die normale Sylowgruppe von mindestens einer endlichen einstufig nichtkommutativen Gruppe, wenn ihre Ordnung weder* 2 *noch* 2^6 *noch das Quadrat einer Mersenneschen Primzahl*[2] *ist.*

Dieser Satz wird als Folgerung aus[1] und aus einem elementarzahlentheoretischen Satz von K. ZSIGMONDY entstehen (s. unten).

Nach[1] gewinnt man nämlich diejenigen endlichen einstufig nichtkommutativen Gruppen, die keine p-Gruppen sind, folgenderweise. Man nehme ein beliebiges (geordnetes) Tripel

$$p, q, r \tag{1}$$

bestehend aus zwei verschiedenen Primzahlen p, q und einer natürlichen Zahl

---

[1]) L. RÉDEI, Das „schiefe Produkt" in der Gruppentheorie mit Anwendung auf die endlichen nichtkommutativen Gruppen mit lauter kommutativen echten Untergruppen und die Ordnungszahlen, zu denen nur kommutative Gruppen gehören, *Commentarii Math. Helv.*, **20** (1947), 225—264.

[2]) Die Mersenneschen Primzahlen sind diejenigen von der Form 2^q-1 (q Primzahl).

r. Man setze

$$u = o(p(\text{mod}\, q)), \tag{2}$$

worunter wir verstehen, daß u die Ordnung der Restklasse $p(\text{mod}\, q)$, d. h. die kleinste natürliche Zahl mit $p^u \equiv 1(\text{mod}\, q)$ ist. Man bezeichne mit K den (endlichen) Körper von der Ordnung

$$O(K) = p^u, \tag{3}$$

führe in der Menge der $p^u q^r$ Symbole

$$P_\alpha Q^i \qquad (\alpha \in K;\ i = 0, \dots, q^r - 1)$$

die Multiplikation

$$P_\alpha Q^i \cdot P_\beta Q^k = P_{\alpha + \omega^i \beta} Q^{(i+k)} \tag{4}$$

ein, wobei $(i+k)$ den kleinsten nichtnegativen Rest von $i+k \bmod q^r$ und ω ein festgewähltes Element $(\neq 0)$ von K von der Ordnung

$$o(\omega) = q$$

bezeichnet. (Da aus (2) $q \mid p^u - 1$ folgt, so gibt es wegen (3) genau $q-1$ solche ω.) Es wird durch (4) eine einstufig nichtkommutative Gruppe G von der Ordnung

$$O(G) = p^u q^r$$

definiert, dabei hängt G (bis auf Isomorphie) nur vom Tripel (1) an, dagegen sind die zu den verschiedenen Tripeln (1) gehörenden G paarweise wesentlich verschieden und erschöpfen alle endlichen einstufig nichtkommutativen Gruppen, die keine p-Gruppen sind. Man sieht aus (4) auch, daß die Elemente P_α die (normale) p-Sylowgruppe von G bilden und diese zur additiven Gruppe der Elemente von K isomorph ist. (Da G direkt unzerlegbar ist, so folgt hieraus schon, daß die q-Sylowgruppen nicht normal sein können.) Hiernach ist die normale Sylowgruppe von G kommutativ und elementar, ferner ist ihre Ordnung wegen (3) gleich p^u.

Andererseits ist (2) bei gegebenen p, u nach dem Satz von ZSIGMONDY[3]) dann und nur dann mit keinem q erfüllbar, wenn p^u gleich 2 oder 2^6 oder das Quadrat einer Mersenneschen Primzahl ist. Somit ist unser Satz bewiesen.

(Eingegangen am 20. Januar 1958.)

---

[3]) Siehe K. ZSIGMONDY, Zur Theorie der Potenzreste, *Monatshefte f. Math.*, **3** (1892), 265—284 oder L. RÉDEI, Über die algebraischzahlentheoretische Verallgemeinerung eines elementarzahlentheoretischen Satzes von Zsigmondy, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 98—126.