Bemerkungen über den Maximum-Modul ganzer transzendenter Funktionen.

Von I. VINCZE in Budapest.

Einleitung.

1. In der vorliegenden Note beschäftigen wir uns mit der Frage, was man in Kenntnis des Maximum-Moduls $M(r)$ einer ganzen transzendenten Funktion $F(z)$ über die Koeffizienten der Potenzreihe von $F(z)$ aussagen kann. In neuerer Zeit hat W. K. HAYMAN dieses Problem [3] für gewisse ganze Funktionen und auch für Potenzreihen mit endlichem Konvergenzradius ausgearbeitet. Die Bedeutung des Problems wird in seiner Arbeit an zahlreichen Beispielen erläutert; wenn z. B. die Potenzreihe von $F(z)$ nicht bekannt, oder schwer zu behandeln ist, der Maximum-Modul von $F(z)$ sich jedoch bestimmen läßt, so kann man auch für die Koeffizienten der Potenzreihe eine asymptotische Darstellung angeben. Es ist z. B. $e^{P(z)}$ eine solche Funktion, wobei $P(z)$ ein Polynom mit nichtnegativen Koeffizienten bedeutet. — Unsere Arbeit enthält einige mit elementaren Methoden erreichte Sätze in dieser Richtung für *beliebige* ganze Funktionen. Die Resultate können wahrscheinlich noch verschärft werden.

2. Nach der Ungleichung von CAUCHY gilt

$$|a_n| \leqq \frac{M(r)}{r^n}.$$

Gleichheit kann nur im Falle eines Polynoms bestehen, was wir im folgenden außer Acht lassen werden. Es liegt nun an der Hand zu versuchen, aus dieser Ungleichung die schärfste Abschätzung für $|a_n|$ zu finden, also denjenigen Wert von r zu bestimmen, für den $\frac{M(r)}{r^n}$ minimal ist. Dieser Wert ist für jedes n eindeutig bestimmt, was schon durch CAUCHY [2] erwähnt wurde; wir werden ihn mit r_n bezeichnen[1]). Es besteht also die Ungleichung

$$(1) \qquad |a_n| < M_n = \frac{M(r_n)}{r_n^n} = \min_{0<r<\infty} \left\{\frac{M(r)}{r^n}\right\}.$$

[1]) Mit einigen Eigenschaften des Wertsystems r_n hat sich Verf. [6] beschäftigt.

Wir führen die Funktion

$$n(r)=r\frac{M'(r)}{M(r)}$$

ein; wegen der logarithmischen Konvexität von $M(r)$ ist $n(r)$ monoton zunehmend, sie kann jedoch abzählbar unendlich viele Sprungstellen haben. Wie wir sehen werden, sind die Zahlen r_n durch die Relation $n(r)=n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ bestimmt. Daher ist die Zahlenfolge r_n monoton nicht abnehmend und die Zahlen r_n, als Minimumstellen der Funktion $\frac{M(r)}{r^n}$, für jedes *reelle* $n>0$ definiert. Den Zusammenhang zwischen der Wachstumsordnung von $F(z)$ und dem Verhalten von $n(r)$ gilt der in § 1 bewiesene

Satz 1. *Es gilt*[2]) *für* $r\to\infty$

$$\begin{matrix}\limsup\\ \liminf\end{matrix}\frac{\log n(r)}{\log r}=\begin{matrix}\limsup\\ \liminf\end{matrix}\frac{\log\log M(r)}{\log r}.$$

In § 1 werden wir uns mit einigen einfachen Eigenschaften der Folge $r_1, r_2, \ldots$ beschäftigen. In § 2 werden einige einfache Ungleichungen über die Momente

$$\mu_n=\int_0^\infty\frac{r^n}{M(r)}dr$$

sowohl mittels der Werte M_n, als auch mit Hilfe der Koeffizienten der Potenzreihe von $F(z)$ abgeleitet.

3. Während das Maximalglied den Ausdruck $M(r)-|a_n|r^n$ minimisiert, wird in den Punkten r_n die relative Abweichung

$$\frac{M(r)-|a_n|r^n}{M(r)}$$

zum Minimum. Daß sich $M(r)$ mit irgendeinem Glied der Potenzreihe von $F(z)$ am besten in den Punkten r_n abschätzen läßt, wird aus der folgenden Bemerkung klar: zu einem beliebigen r gibt es einen Index n derart, daß die Ungleichung

$$\frac{\mu(r)}{M(r)}\leqq\frac{\mu(r_n)}{M(r_n)}<1$$

gilt, nämlich $n=\nu(r)$. Dies folgt sofort aus der Definition des Maximalglie-

[2]) Für den Fall einer Potenzreihe mit positiven Koeffizienten, und nur für die Aussage über lim sup, vgl. Pólya—Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Bd. II (Berlin, 1925), Aufg. 53, S. 8, Lösung S. 178.

des $\mu(r)$ und aus (1):

$$\frac{\mu(r)}{M(r)} = \frac{|a_{\nu(r)}|\, r^{\nu(r)}}{M(r)} \leqq \frac{|a_{\nu(r)}|\, r_{\nu(r)}^{\nu(r)}}{M(r_{\nu(r)})} \leqq \frac{|a_k|\, r_{\nu(r)}^{k}}{M(r_{\nu(r)})} < 1,$$

wobei $k = \nu(r_{\nu(r)})$ ist.

Es sei noch hier erwähnt, daß P. ERDŐS und T. KÖVÁRI [4] zu jeder ganzen Funktion mittels der Punkte r_n eine Potenzreihe $N(r)$ mit positiven Koeffizienten konstruierten, für welche

$$\frac{1}{6} < \frac{M(r)}{N(r)} < 3$$

gilt. Im Zusammenhang mit einem Problem von L. KALMÁR und P. TURÁN haben sie in [4] ein Beispiel für eine ganze Funktion angegeben, deren Maximum-Modul keiner Potenzreihe mit positiven Koeffizienten asymptotisch gleich ist.

Für die Koeffizienten gewisser ganzer Funktionen und auch für die Koeffizienten von Potenzreihen mit endlichem Konvergenzradius hat W. K. HAYMAN [3] die folgende asymptotische Darstellung angegeben:

$$a_n \sim \frac{M_n}{\sqrt{2\pi b(r_n)}} \qquad (n \to \infty), \tag{2}$$

wobei M_n dasselbe bedeutet, wie in (1), und

$$b(r) = \frac{d^2 \log M(r)}{d(\log r)^2}.$$

Wendet man (2) auf die Potenzreihe von e^z an, so erhält man die Stirlingsche Formel; daher kann (2) als eine Verallgemeinerung der Stirlingschen Formel aufgefaßt werden.

Nach (1) ist $\frac{|a_n|}{M_n} < 1$; wir werden zeigen, daß die Folge dieser Quotienten nicht zu rasch gegen Null konvergieren kann.

S a t z 2. *Es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{M_n} = \infty .$$

Hieraus folgt für beliebiges $\varepsilon > 0$ die Existenz unendlich vieler n mit

$$\frac{1}{n^{1+\varepsilon}} < \frac{|a_n|}{M_n}.$$

Nach WIMAN und VALIRON [5] gilt zwar $M(r) < \nu(r)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\mu(r)$ bis auf gewisse Intervalle von r, es ist aber eine offene Frage, wo die Ausnahmestellen liegen.

In Kenntnis von $M(r)$ gibt der folgende Satz eine gewisse Auskunft über die Größe der Lücken, die in der Potenzreihe von $F(z)$ auftreten können:

Satz 3. *Gilt für ein Paar natürlicher Zahlen n, s (mit $s > n$)*

$$\frac{r_s}{r_n} \geqq 5,$$

so gibt es unter den Koeffizienten $a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, \ldots, a_s$ mindestens einen, der nicht verschwindet.

4. Im Falle der Funktion $F(z) = e^z = \Sigma a_n z^n$ gilt

$$\frac{1}{a_n} = \int_0^\infty \frac{r^n}{M(r)} dr, \quad \text{d.h.} \quad n! = \int_0^\infty r^n e^{-r} dr \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Daß zwischen den Koeffizienten und den erwähnten Momenten ein allgemeinerer Zusammenhang besteht, kann man aus folgenden vermuten:

Bei beliebig klein gegebenem positivem ε gilt für unendlich viele n

$$\frac{1}{|a_n|} < n^{1+\varepsilon} \int_0^\infty \frac{r^n}{M(r)} dr.$$

Unter speziellen Voraussetzungen gilt der

Satz 4. *Gilt für irgendeine ganze Funktion* $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{r_n} = 1$, *so ist auch*

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\int_0^\infty \frac{|a_n| r^n}{M(r)} \right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

§ 1. Über die Folge r_n.

1. Zuerst machen wir einige vorbereitende Bemerkungen.

Nach Blumenthal [1] ist $M(r)$ stückweise analytisch, $M'(r)$ kann jedoch abzählbar unendlich viele Sprungstellen haben ($M'(r+0) \geqq M'(r-0)$). Für die Funktion

$$S_n(r) = \frac{M(r)}{r^n}$$

gilt daher

$$S_n'(r \pm 0) = \frac{M(r)}{r^{n+1}} \left(r \frac{M'(r \pm 0)}{M(r)} - n \right).$$

Nach dem Hadamardschen Dreikreisensatz gilt ferner in jeder Stetigkeitsstelle von $M'(r)$ und $M''(r)$

$$\frac{d^2 \log M(r)}{d(\log r)^2} = r \frac{d}{dr}\left(r \frac{M'(r)}{M(r)}\right) > 0.$$

Die Funktion $n(r) = rM'(r)/M(r)$ ist also monoton streng zunehmend. Ist die Funktion $F(z)$, wie angenommen, transzendent, so strebt $n(r)$ mit $r \to \infty$ gegen Unendlich und ist bis auf die Sprungstellen analytisch; daher nimmt sie an oder überspringt den Wert $n\,(> 0)$ nur an einer einzigen Stelle. Hieraus folgt, daß $S_n(r)$ eine einzige Minimumstelle $r = r(n)$ besitzt. Auf diese Weise ist eine wegen der Monotonität von $n(r)$ ebenfalls monoton wachsende Funktion $r_n = r(n)$ definiert. Sie ist als inverse Funktion von $n(r)$ stetig.

2. Nun wenden wir uns dem Beweis des Satzes 1 zu. Da $n(r)$ die inverse Funktion von r_n ist, folgt aus der Eigenschaft von r_n als Minimumstelle:

$$\frac{M(r)}{r^{n(r)}} \leqq \frac{M(\varrho)}{\varrho^{n(r)}} \qquad (r > 0,\ \varrho > 0).$$

Ist ϱ festgelegt, so wähle man r so groß, daß

$$M(\varrho) < \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{n(r)}$$

gilt. Dann gilt

$$M(r) < \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{n(r)} M(\varrho) < \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{2n(r)},$$

oder

$$\log M(r) < n(r) \log \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2, \quad \frac{\log\log M(r)}{\log r} < \frac{\log n(r) + \log\log \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2}{\log r},$$

woraus wegen

$$\frac{\log\log \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2}{\log r} \to 0 \quad \text{für} \quad r \to \infty$$

$$\text{(1. 1)} \qquad \begin{matrix}\limsup \\ \liminf\end{matrix} \frac{\log\log M(r)}{\log r} \leqq \begin{matrix}\limsup \\ \liminf\end{matrix} \frac{\log n(r)}{\log r}$$

folgt.

Andererseits gilt

$$\frac{n(r \pm 0)}{r} = \frac{M'(r \pm 0)}{M(r)},$$

also

$$\int_{r/e}^{r} \frac{n(t)}{t}\, dt = \log M(r) - \log M\left(\frac{r}{e}\right).$$

Ist nun $M\left(\frac{r}{e}\right) > 1$, so gilt wegen der Monotonie von $n(r)$

$$n\left(\frac{r}{e}\right) < \log M(r),$$

also

$$\frac{\log n\left(\frac{r}{e}\right)}{\log \frac{r}{e}} < \frac{\log \log M(r)}{\log r} \frac{1}{1 - \frac{1}{\log r}}.$$

Hieraus folgt die zu (1. 1) entgegensetzte Ungleichung. Damit ist unser Satz 1 bewiesen.

3. Es bezeichne wieder M_n das Minimum der Funktion $S_n(r)$, also

$$M_n = \frac{M(r_n)}{r_n^n}.$$

Es gilt für $n \to \infty$

$$0 \leqq \limsup M_n^{\frac{1}{n}} \leqq \lim \frac{M^{\frac{1}{n}}(r)}{r} = \frac{1}{r}$$

für jedes $r > 0$, also ist

$$\lim M_n^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Wie bekannt, gilt $\lim |a_n|^{\frac{1}{n}} = 0$. Es besteht jedoch — wie wir es in § 3 sehen werden — für jede ganze, transzendente Funktion

$$\limsup \left(\frac{|a_n|}{M_n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

4. Für die Folgen $\{r_n\}$ bzw. $\{M_n\}$ bestehen folgende einfache Relationen für $n \geqq 1$ und $n \geqq k \geqq 1$:

$$\frac{M_{n-1}}{M_n} \leqq r_n \leqq \frac{M_n}{M_{n+1}} \qquad (M_0 = |F(0)|), \tag{1.2}$$

$$\frac{r_1}{M(r_1)} \frac{M(r_n)}{r_n} \leqq \frac{r_n^n}{r_1 r_2 \ldots r_n} \leqq \frac{M(r_n)}{M(r_1)}, \tag{1.3}$$

$$r_k^{n-k} \leqq \frac{M_k}{M_n} \leqq r_n^{n-k}. \tag{1.4}$$

(1. 2) folgt aus der Minimaleigenschaft von r_{n-1} und r_{n+1}:

$$M_{n-1} = \frac{M(r_{n-1})}{r_{n-1}^{n-1}} \leqq \frac{M(r_n)}{r_n^{n-1}} = r_n M_n$$

und

$$M_{n+1}=\frac{M(r_{n+1})}{r_{n+1}^{n+1}}\leqq\frac{M(r_n)}{r_n^{n+1}}=\frac{M_n}{r_n}.$$

(1.3) und (1.4) folgen aus (1.2) durch Multiplikation und aus der Monotonität der Folge r_n.

Für $F(z)=e^z$ erhält man aus (1.2) die wohlbekannte Ungleichung

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

und aus (1.3) die folgende schwächere Gestalt den Stirlingschen Formel:

$$\sqrt[n]{n!}\sim\frac{n}{e}.$$

§ 2. Ungleichungen für gewisse Momente.

In folgendem werden wir die Momente

$$\mu_n=\int_0^\infty\frac{r^n}{M(r)}\,dr$$

mittels der M_n und auch mittels der Koeffizienten der Potenzreihe von oben abschätzen.

Sind a, b, n reell und nichtnegativ, $b<n+1$, so gilt

$$\mu_n<\frac{a+b}{ab}M_{n+1+a}^{-\frac{b}{a+b}}M_{n+1-b}^{-\frac{a}{a+b}},\tag{2.1}$$

$$\mu_n<\frac{1}{M_n}\left[\frac{a+1}{a}\left(\frac{M_n}{M_{n+1+a}}\right)^{\frac{1}{a+1}}-\frac{b-1}{b}\left(\frac{M_{n-b+1}}{M_n}\right)^{\frac{1}{b-1}}\right].\tag{2.2}$$

B e w e i s. Es gilt wegen der Minimaleigenschaft von r_ν $(\nu>0)$

$$M_\nu=\frac{M(r_\nu)}{r_\nu^\nu}\leqq\frac{M(r)}{r^\nu},\quad\text{also}\quad\frac{r^n}{M(r)}\leqq\frac{1}{M_\nu}r^{n-\nu}.\tag{2.3}$$

Setzt man $\nu=n+a+1$ und $\nu=n-b+1$ (>0), so folgt

$$\frac{r^n}{M(r)}\leqq\min\left\{\frac{1}{M_{n+1+a}}r^{-a-1},\ \frac{1}{M_{n+1-b}}r^{b-1}\right\}.$$

Für

$$r=\bar{r}=\left(\frac{M_{n+1-b}}{M_{n+1+a}}\right)^{\frac{1}{a+b}}$$

werden die beiden, zwischen { } stehenden Ausdrücke gleich; für $0 < r < \bar{r}$ ist also der zweite, für $\bar{r} < r < \infty$ jedoch der erste Ausdruck der kleinere. Also gilt

$$\mu_n < \frac{1}{M_{n+1-b}} \int_0^{\bar{r}} r^{b-1}\,dr + \frac{1}{M_{n+1+a}} \int_{\bar{r}}^{\infty} \frac{1}{r^{a+1}}\,dr = \frac{1}{M_{n+1-b}} \frac{\bar{r}^b}{b} + \frac{1}{M_{n+1+a}} \frac{\bar{r}^{-a}}{a},$$

woraus nach Einsetzen des Wertes von $\bar{r}$ (2. 1) folgt.

Zum Beweis von (2. 2) bestimme man zuerst die Zahlen $\bar{r}$ und $\bar{\bar{r}}$ derart, daß $\frac{\bar{r}^{b-1}}{M_{n+1-b}} = \frac{1}{M_n}$ und $\frac{\bar{\bar{r}}^{-a-1}}{M_{n+1+a}} = \frac{1}{M_n}$; dann wende man (2. 3) für $\nu = n + 1 - b$ im Intervall $0 < r \leqq \bar{r}$, für $\nu = n + 1 + a$ im Intervall $\bar{\bar{r}} \leqq r \leqq \infty$, und für $\nu = n$ im Intervall $\bar{r} < r < \bar{\bar{r}}$ an. — Aus (1. 4) folgt, daß $\bar{r} \leqq \bar{\bar{r}}$ immer besteht.

Wegen $|a_n| < M_n$ können wir in (2. 3) $|a_\nu|$ anstatt M_ν setzen, also

$$\text{(2. 3')} \qquad \frac{r^n}{M(r)} < \frac{1}{|a_\nu|} r^{n-\nu}$$

schreiben. Mit Hilfe dieser Ungleichung lassen sich auf ähnliche Weise die folgenden Ungleichungen ableiten:

$$\text{(2. 1')} \qquad \mu_n < \frac{a+b}{ab} |a_{n+a+1}|^{-\frac{b}{a+b}} |a_{n-b+1}|^{-\frac{a}{a+b}},$$

$$\text{(2. 2')} \qquad \mu_n < \frac{1}{|a_n|} \left(\frac{a+1}{a} \left| \frac{a_n}{a_{n+a+1}} \right|^{\frac{1}{a+1}} - \frac{b-1}{b} \left| \frac{a_{n-b+1}}{a_n} \right|^{\frac{1}{b-1}} \right),$$

für die Gültigkeit von (2. 2') muß man jedoch noch

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+a+1}} \right|^{\frac{1}{a+1}} \geqq \left| \frac{a_{n-b+1}}{a_n} \right|^{\frac{1}{b-1}}$$

voraussetzen, damit $\bar{r} < \bar{\bar{r}}$ herausfällt.

Es sei weiterhin eine interessante Folgerung von (2. 1') erwähnt: Ist in der Potenzreihe einer transzendenten Funktion $|a_1| = |a_N| = 1$, so besteht für $n = 2, 3, \ldots, N-2$

$$\mu_n < \frac{N-1}{n(N-1-n)},$$

d. h. es gilt zwar $\mu_n \to \infty$ für $n \to \infty$, jedoch die ersten $N-2$ Glieder der Folge $\mu_1, \mu_2, \ldots$ sind klein.

Setzt man insbesondere

$$F(z)=e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots,$$

so ist

$$\mu_{N-2}=(N-2)!.$$

Wenn wir aber in dieser Potenzreihe von e^z nur einen Koeffizienten verändern, wenn wir also die Potenzreihe

$$F^*(z)=1+\frac{z}{1!}+\cdots+\frac{z^{N-1}}{(N-1)!}+z^N+\frac{z^{N+1}}{(N+1)!}+\cdots$$

betrachten, so besteht für diese

$$\mu^*_{N-2}<1.$$

§ 3. Sätze über die Koeffizienten.

1. Der in der Einleitung erwähnte Satz 2 ist eine einfache Konsequenz der folgenden, für jedes r und für jedes natürliche n gültigen Relation:

$$1=\frac{M(r)}{M(r)}\leqq\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}|a_k|r^k}{M(r)}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}|a_k|r^k}{M(r)}+\sum_{k=n}^{\infty}|a_k|\frac{r^k}{M(r)}<$$

$$<\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}|a_k|r^k}{M(r)}+\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|a_k|}{M_k}.$$

Da bei festgelegtem n die Relation

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}|a_k|r^k}{M(r)}=0$$

gilt, so ist für jedes n

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|a_k|}{M_k}\geqq 1,$$

woraus Satz 2 der Einleitung schon folgt.

2. Zum Beweis des Satzes 3 betrachte man zu einem gegeben Index n einen weiteren Index s, so daß $s>n$ und $r_s>r_n$ gilt. Es seien ferner r und r' zwei Zahlen mit

$$r_n<r<r'<r_s.$$

Bezeichnet man nun $\mathfrak{M}(\varrho)=\sum\limits_{0}^{\infty}|a_k|\varrho^k$, so gilt wegen $M(\varrho)\leqq\mathfrak{M}(\varrho)$

$$1=\frac{1}{r'-r}\int\limits_{r}^{r'}d\varrho\leqq\frac{1}{r'-r}\int\limits_{r}^{r'}\frac{\mathfrak{M}(\varrho)}{M(\varrho)}\,d\varrho=\frac{1}{r'-r}\int\limits_{r}^{r'}\frac{\sum\limits_{0}^{\infty}|a_k|\varrho^k}{M(\varrho)}\,d\varrho=$$

$$(3.1)\qquad =\frac{1}{r'-r}\sum_{0}^{n-3}|a_k|\int\limits_{r}^{r'}\frac{\varrho^k}{M(\varrho)}\,d\varrho+\frac{1}{r'-r}\sum_{n-2}^{s}|a_k|\int\limits_{r}^{r'}\frac{\varrho^k}{M(\varrho)}\,d\varrho+$$

$$+\frac{1}{r'-r}\sum_{s+1}^{\infty}|a_k|\int\limits_{r}^{r'}\frac{\varrho^k}{M(\varrho)}\,d\varrho.$$

Wir schätzen jetzt die ersten und dritten Summen ab. Es gilt für $k\leqq n-3$

$$(3.2)\quad \frac{|a_k|\varrho^k}{M(\varrho)}=\frac{|a_k|\varrho^n}{M(\varrho)}\,\frac{1}{\varrho^{n-k}}\leqq\frac{|a_k|}{M_n}\,\frac{1}{\varrho_{n-k}}=\frac{|a_k|}{M_k}\,\frac{M_k}{M_n}\,\frac{1}{\varrho_r^{n-k}}<\left(\frac{r_n}{\varrho}\right)^{n-k}.$$

Es ist nämlich $\frac{|a_k|}{M_k}<1$ und nach (1.4) des § 1 $\frac{M_k}{M_n}<r_n^{n-k}$. Daher ist

$$|a_k|\int\limits_{r}^{r'}\frac{\varrho^k}{M(\varrho)}\,d\varrho\leqq\int\limits_{r}^{r'}\left(\frac{r_n}{\varrho}\right)^{n-k}d\varrho=\frac{r_n^{n-k}}{n-k-1}\left(\frac{1}{r^{n-k-1}}-\frac{1}{r'^{\,n-k-1}}\right),$$

also

$$\frac{1}{r'-r}\sum_{0}^{n-3}|a_k|\int\limits_{r}^{r'}\frac{\varrho^k}{M(\varrho)}\,d\varrho\leqq\sum_{k=0}^{n-3}\frac{1}{n-k-1}\,\frac{r_n}{r'-r}\left[\left(\frac{r_n}{r}\right)^{n-k-1}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{r_n}{r'}\right)^{n-k-1}\right]\leqq\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\,\frac{r_n}{r'-r}\left[\left(\frac{r_n}{r}\right)^{k}-\left(\frac{r_n}{r'}\right)^{k}\right].$$

Gilt nun $k\geqq s+1$, so erhalten wir genau wie (3.2) die Ungleichung

$$\frac{|a_k|\varrho^k}{M(\varrho)}<\left(\frac{\varrho}{r_s}\right)^{k-s}.$$

Daher ist

$$|a_k|\int\limits_{r}^{r'}\frac{\varrho^k}{M(\varrho)}\,d\varrho\leqq\frac{1}{k-s+1}\,\frac{1}{r_s^{k-s}}\left(r'^{\,k-s+1}-r^{k-s+1}\right)$$

und

$$\frac{1}{r'-r}\sum_{k=s+1}^{\infty}|a_k|\int\limits_{0}^{r'}\frac{\varrho^k}{M(\varrho)}\,d\varrho<\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\,\frac{r_s}{r'-r}\left[\left(\frac{r'}{r_s}\right)^{k}-\left(\frac{r}{r^s}\right)^{k}\right].$$

Aus (3. 1) erhalten wir nun

$$1 \leqq \frac{1}{r'-r} \sum_{n=2}^{s} |a_k| \int_r^{r'} \frac{\varrho_k}{M(\varrho)} d\varrho + \frac{r_n}{r'-r} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \left[\left(\frac{r_n}{r}\right)^k - \left(\frac{r_n}{r'}\right)^k\right] +$$
$$+ \frac{r_s}{r'-r} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \left[\left(\frac{r'}{r_s}\right)^k - \left(\frac{r}{r_s}\right)^k\right].$$

Man setze nun $\frac{r}{r_n} = x$, $\frac{r'}{r_n} = y$, $\frac{r_s}{r_n} = a$ $(1 < x < y < a)$, dann gilt

$$1 < \frac{1}{r'-r} \sum_{n=2}^{s} |a_k| \int_r^{r'} \frac{\varrho^k}{M(\varrho)} d\varrho + \frac{1}{y-x} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{x^k} - \frac{1}{y^k}\right) +$$
$$+ \frac{a}{y-x} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \left[\left(\frac{y}{a}\right)^k - \left(\frac{x}{a}\right)^k\right].$$

Aus der für $0 \leqq u < 1$ gültigen Potenzreihe der Funktion $\log \frac{1}{1-u}$ ergibt sich

$$1 < \frac{1}{r'-r} \sum_{n=2}^{s} |a_k| \int_r^{r'} \frac{\varrho^k}{M(\varrho)} d\varrho + \frac{1}{y-x} \log \left[\frac{y-1}{x-1} \frac{x}{y} \left(\frac{a-x}{a-y}\right)^a\right] - 1 - \frac{1}{yx}.$$

Wenn wir nun die Werte von x und y so wählen können, daß

$$\frac{1}{y-x} \log \left[\frac{y-1}{x-1} \frac{x}{y} \left(\frac{a-x}{a-y}\right)^a\right] - 1 - \frac{1}{xy} < 1 \tag{3.3}$$

besteht, so muß $\sum_{n=2}^{s} \frac{|a_k|}{M_k} > 0$ sein; damit wird auch unser Satz bewiesen sein. Nun läßt sich (3. 3) auf die folgende Gestalt bringen:

$$f_a(x) = \frac{x(a-x)^a}{x-1} e^{2x-\frac{1}{x}} < \frac{y(a-y)^a}{y-1} e^{2y-\frac{1}{y}} = f_a(y).$$

Die Existenz eines Punktpaars x, y $(1<x<y<a)$ mit dieser Eigenschaft folgt nun für $a \geqq 5$ (und ja sogar für $a > 14/3$) daraus, daß, wie man leicht nachrechnet, $f_a'(2)$ für diese Werte von a *positiv* ausfällt.

3. Nun beweisen wir unseren Satz 4. Aus (2. 2) des § 2 und aus (1. 4) des § 1 folgt

$$\int_0^{\infty} \frac{|a_n| r^n}{M(r)} dr < \frac{|a_n|}{a} \frac{a+1}{M_n} \left(\frac{M_n}{M_{n+a+1}}\right)^{\frac{1}{a+1}} \leqq \frac{|a_n|}{M_n} \frac{a+1}{a} r_{n+a+1}.$$

Da für $n \to \infty$ voraussetzungsgemäß

$$\limsup \sqrt[n]{r_{n+\alpha+1}} = \limsup \left(\sqrt[n+\alpha+1]{r_{n+\alpha+1}}\right)^{1+\frac{\alpha+1}{n}} = 1$$

ist, so besteht

$$\limsup \left(\int_0^\infty \frac{|a_n| r^n}{M(r)} dr\right)^{\frac{1}{n}} \leqq 1.$$

Andererseits gilt

$$1 \leqq \frac{\mathfrak{M}(r)}{M(r)} = \sum_0^\infty |a_k| \frac{r^k}{M(r)}$$

oder, indem man von R bis $R+1$ integriert,

$$1 \leqq \sum_0^\infty |a_k| \int_R^{R+1} \frac{r^k}{M(r)} dr < \sum_0^n |a_k| \int_R^{R+1} \frac{r^k}{M(r)} dr + \sum_{n+1}^\infty |a_k| \int_0^\infty \frac{r^k}{M(r)} dr,$$

was für jedes feste n gültig ist. Strebt nun R gegen Unendlich, so gilt

$$\sum_{k=0}^n \int_R^{R+1} |a_k| \frac{r^k}{M(r)} dr \to 0,$$

woraus die Divergenz der Reihe $\sum_0^\infty \int_0^\infty \frac{|a_k| r^k}{M(r)} dr$ folgt. Daraus ergibt sich

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\int_0^\infty \frac{|a_n| r^n}{M(r)} dr\right)^{\frac{1}{n}} \geqq 1, \tag{3.4}$$

womit Satz 4 bewiesen ist.

Aus der Divergenz der Reihe $\sum_0^\infty a_n \mu_n$ folgt weiterhin unsere in der Einleitung zu Satz 4 gestellte Bemerkung.

Literatur.

[1] O. Blumenthal. Sur le mode de croissance des fonctions entières, *Bull. Soc. Math. France*, **35** (1907), 213—32.

[2] A. Cauchy, *Oeuvres complètes*, Bd. 9 (Paris, 1896), 75.

[3] W. K. Hayman, A Generalisation of Stirling's Formula, *Journal für die reine und angew. Math.*, **196** (1956), 67—95.

[4] P. Erdős—T. Kővári, On the maximum modulus of entire functions, *Acta Math. Hung.*, **7** (1957), 305—318.

[5] G. Valiron, *Lectures on the general theory of integral functions* (Toulouse, 1923), 106.

[6] I. Vincze, Transzcendens egész függvények maximum modulusáról, *Magyar Tud. Akad. III. Oszt. Közl.*, **6** (1956), 451—459.

(Eingegangen am 22. September 1957.)