Une contribution à la théorie constructive des fonctions.

Par GEORGES ALEXITS à Budapest.

1. Introduction.

La théorie constructive des fonctions s'occupe de la recherche des relations réciproques entre les propriétés structurelles des fonctions et les propriétés de convergence de leurs différentes approximations. Le problème directe recherche l'ordre de grandeur de l'approximation, lorsque la fonction limite jouit de propriétés données; le problème inverse s'occupe de la détermination des propriétés structurelles de la fonction limite garanties par la vitesse de convergence d'une approximation donnée.

Un théorème fondamental dû à M. BERNSTEIN [1] résoût les deux problèmes d'une manière très simple pour une classe importante de fonctions 2π-périodiques $f(x)$ en affirmant que *la condition nécessaire et suffisante pour que $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ avec $0<\alpha<1$ est que l'approximation de $f(x)$ par les moyennes de Fejér soit d'ordre de grandeur $O(n^{-\alpha})$*. La démonstration de ce théorème est étroitement liée à la structure particulière du noyau de Fejér; elle ne donne donc aucune indication, comment pourrait-on éventuellement étendre cette proposition à d'autres développements orthogonaux.

Dans ce qui suit, nous allons montrer que, dans le cas $0<\alpha<\frac{1}{2}$, le théorème de M. BERNSTEIN peut être généralisé à une classe assez étendue de séries orthogonales; classe comprenant la série de Fourier et les séries de polynômes orthogonaux engendrés par une fonction de poids $\varrho(x) \geqq 0$. Il n'est peut-être pas sans intérêt que, même pour les moyennes de Fejér, notre théorème rend plus que le théorème original, parce que nous démontrerons, dans le cas $0<\alpha<\frac{1}{2}$, la validité de l'ordre de grandeur $O(n^{-\alpha})$ pour l'approximation au sens fort et non seulement au sens habituel.

2. Approximation des fonctions appartenant à une classe de Lipschitz par leurs développements suivant de polynômes orthogonaux.

Soit (a, b) un intervalle fini et $\varrho(x) \geqq 0$ une fonction intégrable en (a, b). Il est connu que $\varrho(x)$ détermine uniquement un système $\{p_n(x)\}$ de polynômes orthogonaux et normés tels que $p_n(x)$ soit de degré n et le coefficient de x^n soit positif. Désignons par

$$K_n(t, x) = \sum_{k=0}^{n} p_k(t) p_k(x)$$

le n-ième noyau du système $\{p_n(x)\}$ et par

$$s_n(x) = \int_a^b \varrho(t) f(t) K_n(t, x) dt$$

la n-ième somme partielle du développement de la fonction $L^2_{\varrho(x)}$-intégrable $f(x)$ suivant les fonctions du système $\{p_n(x)\}$. Soient enfin $C_1, C_2, \ldots$ des constantes positives indépendantes de l'indice n.

Théorème I. *Soit (c, d) un sous-intervalle de (a, b) et supposons que*

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} p_k^2(x) \leqq C_1 \qquad et \qquad 0 \leqq \varrho(x) \leqq C_2 \tag{1}$$

pour $x \in (c, d)$. Si la fonction $f \in L^2_{\varrho(x)}$ satisfait pour $x \in (c, d)$ à la condition de Lipschitz

$$|f(t) - f(x)| \leqq C_3 |t - x|^{\alpha} \tag{2}$$

avec $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, on a en tout intervalle $(c+\delta, d-\delta)$ intérieur à (c, d) uniformément

$$\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} |s_\nu(x) - f(x)| = \frac{C_4}{n^{\alpha}} \qquad (C_4 = C_4(\delta)). \tag{3}$$

Nous avons à évaluer la somme

$$\sum_{\nu=0}^{n} |s_\nu(x) - f(x)| = \sum_{\nu=0}^{n} \left| \int_a^b \varrho(t) [f(t) - f(x)] K_\nu(t, x) dt \right| \tag{4}$$

pour $x \in (c+\delta, d-\delta)$. Décomposons, à ce but, pour $n \geqq n_0$ où n_0 désigne le plus petit entier $> 1/\delta$, les intégrales figurant au deuxième membre en trois parties:

$$I_{\nu 1} = \int_a^c + \int_d^b, \qquad I_{\nu 2} = \int_c^{x-\frac{1}{n}} + \int_{x+\frac{1}{n}}^{d}, \qquad I_{\nu 3} = \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}.$$

Considérons d'abord la somme des $|I_{\nu 3}|$. Il s'ensuit par application de l'inégalité de Schwarz

$$I_{\nu 3}^2 \leqq \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \varrho(t)[f(t)-f(x)]^2 dt \int_a^b \varrho(t) K_\nu^2(t,x)\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu} p_k^2(x) \cdot \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \varrho(t)[f(t)-f(x)]^2 dt.$$

On obtient donc d'après (1) et (2)

$$I_{\nu 3}^2 \leqq C_1(\nu+1)\cdot C_2 C_3 \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} |t-x|^{2\alpha} dt \leqq \frac{C_5^2}{n^{2\alpha}},$$

c'est-à-dire que, pour $n \geqq n_0$,

$$\sum_{\nu=0}^{n} |I_{\nu 3}| \leqq C_5 n^{1-\alpha}. \tag{5}$$

Passons à la somme des $|I_{\nu 1}|$ et remarquons que, d'après la formule de Christoffel—Darboux, on a

$$K_\nu(t,x) = \gamma_\nu \frac{p_\nu(t)p_{\nu+1}(x) - p_{\nu+1}(t)p_\nu(x)}{t-x}$$

où $|\gamma_\nu| \leqq C_6$. Posons

$$g(t,x) = \begin{cases} \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x} & \text{pour } t \in (a,c) \cup (d,b), \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

alors

$$|I_{\nu 1}| \leqq C_6 |p_{\nu+1}(x)| \left| \int_a^b \varrho(t) g(t,x) p_\nu(t)\,dt \right| + C_6 |p_\nu(x)| \left| \int_a^b \varrho(t) g(t,x) p_{\nu+1}(t)\,dt \right|,$$

par conséquent

$$\left(\sum_{\nu=0}^{n} |I_{\nu 1}|\right)^2 \leqq 2C_6^2 \sum_{\nu=0}^{n} p_{\nu+1}^2(x) \sum_{\mu=0}^{n} \left[\int_a^b \varrho(t) g(t,x) p_\mu(t)\,dt \right]^2 +$$

$$+ 2C_6^2 \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu^2(x) \sum_{\mu=0}^{n} \left[\int_a^b \varrho(t) g(t,x) p_{\mu+1}(t)\,dt \right]^2.$$

Les intégrales figurant au deuxième membre étant les coefficients du développement de la fonction $L^2_{\varrho(x)}$-intégrable $g(t,x)$, on obtient, en tenant compte de (1), par application de l'inégalité de Bessel:

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n}|I_{\nu 1}|\right)^2 \leqq 2C_6^2\int_a^b \varrho(t)g^2(t,x)\,dt\cdot\sum_{\nu=0}^{n}\left[p_\nu^2(x)+p_{\nu+1}^2(x)\right]\leqq$$

$$\leqq 2C_6^2C_7\cdot C_1(2n+3)\leqq C_8^2 n.$$

Rappelons-nous de l'hypothèse $0<\alpha<\frac{1}{2}$ ou, en autres termes, de $n^{1-\alpha}>n^{\frac{1}{2}}$, et nous obtenons

$$\sum_{\nu=0}^{n}|I_{\nu 1}|\leqq C_8 n^{1-\alpha}. \tag{6}$$

Posons maintenant, pour évaluer la somme des $|I_{\nu 2}|$,

$$h_n(t,x)=\begin{cases}\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x} & \text{pour}\quad t\in\left(c,x-\dfrac{1}{n}\right)\cup\left(x+\dfrac{1}{n},d\right),\\ 0 & \text{ailleurs.}\end{cases}$$

On voit comme ci-dessus que

$$\left(\sum_{\nu=0}^{n}|I_{\nu 2}|\right)^2\leqq C_9 n\int_a^b\varrho(t)h_n^2(t,x)\,dt\leqq$$

$$\leqq C_9 n\left(\int_c^{x-\frac{1}{n}}+\int_{x+\frac{1}{n}}^{d}\right)\varrho(t)\left[\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right]^2dt.$$

Il en résulte d'après (1) et (2):

$$\sum_{\nu=0}^{n}|I_{\nu 2}|\leqq\left\{C_2C_3C_9 n\left(\int_c^{x-\frac{1}{n}}+\int_{x+\frac{1}{n}}^{d}\right)\frac{dt}{|t-x|^{2-2\alpha}}\right\}^{\frac{1}{2}}\leqq C_{10}n^{1-\alpha}. \tag{7}$$

En réunissant les relations (4), (5), (6) et (7) nous obtenons pour $n\geqq n_0$

$$\sum_{\nu=0}^{n}|s_\nu(x)-f(x)|\leqq C_{11}n^{1-\alpha},$$

quel que soit le point $x\in(c+\delta,d-\delta)$, ce qui équivaut à l'inégalité (3) et la démonstration est achevée.

Théorème II. *Si $\{p_n(x)\}$ est le système des polynômes orthogonaux et normés engendrés par une fonction de poids $\varrho(x)\geqq 0$ satisfaisant à la condition*

$$0<m\leqq\varrho(x)\leqq M\quad \textit{pour}\quad x\in(c,d),$$

la validité de l'évaluation (3) *est nécessaire et suffisante pour que la fonction* $f \in L^2_{\varrho(x)}$ *satisfasse, en tout intervalle intérieur à (c, d) à la condition de Lipschitz* (2) *avec* $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

La nécessité découle d'un théorème de M. FREUD [2] d'après lequel l'hypothèse $\varrho(x) \geqq m > 0$ pour $x \in (c, d)$ entraîne la validité de la première inégalité (1) en tout intervalle intérieur à (c, d), et de notre théorème I. Quant à la suffisance, elle découle directement du théorème fondamental de M. BERNSTEIN d'après lequel l'ordre de grandeur $O(n^{-\alpha})$ de l'approximation de $f(x)$ par des polynômes de degré n entraîne $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ aux intervalles intérieurs à celui où cet ordre de grandeur est atteint.

3. Extension du théorème I à certains systèmes plus généraux de fonctions orthogonales.

On constate aisément que la démonstration du théorème I est basée uniquement sur deux propriétés essentielles du noyau $K_n(t, x)$. D'abord, c'est la représentabilité de la somme des $|s_\nu(x) - f(x)|$ dans la forme (4), ce qui est une conséquence de

$$\int_a^b \varrho(t) K_n(t, x)\, dt = 1 \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

relation dont la validité est assurée pour tout système $\{\varphi_n(x)\}$ de fonctions orthonormales si $\varphi_0(x)$ est une constante. Deuxièmement, les propriétés suivantes de la représentation du noyau $K_n(t, x)$ par la formule de Christoffel—Darboux: 1° $|K_n(t, x)|$ est majoré par une fonction $O(|t-x|^{-1})$, 2° $K_n(t, x)$ est de la forme

$$\frac{1}{t-x} \sum_{i,j=0}^{1} \gamma_{i,j}^{(n)} p_{n+i}(t) p_{n+j}(x)$$

où les $\gamma_{i,j}^{(n)}$ sont des constantes bornées dans leur ensemble. Ces propriétés du noyau $K_n(t, x)$ suggèrent la définition d'une classe de systèmes orthogonaux comprenant les polynômes orthogonaux et le système trigonométrique pour lesquels le théorème I conserve sa validité. Or cette généralisation n'est point construite seulement à ce but; au contraire, elle donne lieu à la généralisation de plusieurs théorèmes importants, connus il y a longtemps dans la théorie des séries de Fourier et démontrés, grâce aux propriétés indiquées du noyau $K_n(t, x)$, récemment pour les séries de polynômes orthogonaux. Tels sont p. ex. les théorèmes de convergence et de sommation dus à MM. SZ.-NAGY [3], TANDORI [4] et FREUD [2]. Leurs théorèmes sont valables pour la classe des développements orthogonaux que nous allons définir maintenant (v. aussi la remarque finale chez M. TANDORI [4], deuxième communication).

Appelons $\{\varphi_n(x)\}$ un système *quasi-polynomial,* si les fonctions $\varphi_n(x)$ sont orthonormales relativement à une fonction de poids $\varrho(x)$, $\varphi_0(x)$ est constante, et le noyau

$$K_n(t, x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(t)\varphi_k(x)$$

est de la forme

$$K_n(t, x) = \sum_{k=1}^{r} F_k(t, x) \sum_{i,j=-p}^{p} \gamma_{i,j}^{(n,k)} \varphi_{n+i}(t)\varphi_{n+j}(x)$$

où p, r sont des entiers positifs indépendants de n et les $\gamma_{i,j}^{(n,k)}$ des constantes bornées dans leur ensemble, tandis que les fonctions $F_k(t, x)$ sont soumises à la condition

$$|F_k(t, x)| \leqq \frac{C_{12}(\delta)}{|t-x|}$$

pour tout point $x \in (a+\delta, b-\delta)$.

Les systèmes $\{p_n(x)\}$ de polynômes orthogonaux sont évidemment quasi-polynomiaux et on voit aisément que le système trigonométrique l'est aussi. On peut bien construire d'autres systèmes quasi-polynomiaux en orthogonalisant un système de fonctions indépendantes qui satisfont à une formule de récursion convenable. Tel est p. ex. le système que l'on obtient par l'orthogonalisation des puissances $g^n(x)$ $(n=0, 1, \ldots)$ d'une fonction mesurable et bornée $g(x)$ satisfaisant à la condition $|g(t)-g(x)| \geqq C_{13}|t-x|, C_{13} > 0$. Le n-ième noyau est, dans ce cas, défini par la formule de Christoffel—Darboux, mais avec $g(t)-g(x)$ au lieu de $t-x$ au dénominateur.

En faisant de petits changements dans la démonstration, on voit aisément que le théorème I reste exact, si on y échange $\{p_n(x)\}$ pour un système quasi-polynomial $\{\varphi_n(x)\}$ satisfaisant à la condition (1). Le théorème I est donc applicable p. ex. au système trigonométrique et on peut alors choisir pour (a, b) et (c, d) le même intervalle de longueur 2π de position quelconque. Il en résulte que le théorème de M. BERNSTEIN cité à l'introduction tient même pour l'approximation au sens fort, lorsque $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

4. Approximation des fonctions appartenant à une classe de Lipschitz par leurs développements quasi-polynomiaux.

Si on prend pour $\{\varphi_n(x)\}$ un système quasi-polynomial quelconque en renonçant à la condition (1), on obtient un résultat concernant l'approximation presque partout.

Théorème III. *Soit* $\varrho(x)>0$ *presque partout,* $\{\varphi_n(x)\}$ *un système quasi-polynomial arbitraire et* (c,d) *un sous-intervalle de* (a,b) *où la fonction* $f\in L^2_{\varrho(x)}$ *satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre* $0<\alpha<\frac{1}{2}$. *Si* $\{\lambda_n\}$ *est une suite non-décroissante de nombres positifs tels que* $\Sigma\lambda_n^{-2}<\infty$, *on a en* (c,d) *presque partout*

$$\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}|s_\nu(x)-f(x)|=o\left(\frac{\lambda_n}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}}\right). \tag{8}$$

La démonstration ne diffère pas beaucoup de celle du théorème I. Remarquons d'abord que

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_a^b\varrho(x)\frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2}dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}<\infty,$$

la série $\Sigma\varrho(x)\varphi_k^2(x)/\lambda_k^2$ converge donc presque partout. Il s'ensuit, grâce à un lemme connu (v. p. ex. A. Zygmund, *Trigonometrical series* (Warszawa-Lwów, 1935), p. 255) et vu que $\varrho(x)>0$ presque partout:

$$\sum_{k=0}^{n}\varphi_k^2(x)=o(\lambda_n^2).$$

Pour évaluer les intégrales $I_{\nu 3}$, on constate que, pour $n\geqq n_0$,

$$I_{\nu 3}^2\leqq\sum_{k=0}^{\nu}\varphi_k^2(x)\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}\varrho(t)O(|t-x|^{2\alpha})dt=o(\lambda_\nu^2)O\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}\varrho(t)dt$$

presque partout. Désignons par $\mathrm{P}(t)$ une intégrale de $\varrho(t)$, alors

$$\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}\varrho(t)dt=\mathrm{P}\left(x+\frac{1}{n}\right)-\mathrm{P}\left(x-\frac{1}{n}\right)=O_x\left(\frac{1}{n}\right)$$

pour presque tous les points x, notamment pour tous les points x auxquels $\varrho(x)=\mathrm{P}'(x)$, donc

$$\sum_{\nu=0}^{n}|I_{\nu 3}|=\sum_{\nu=0}^{n}o(\lambda_\nu)O_x\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}}\right)=o(\lambda_n\cdot n^{\frac{1}{2}-\alpha}) \tag{9}$$

presque partout. Pour évaluer la somme des $|I_{\nu 1}|$, posons

$$g_k(t,x)=\begin{cases}[f(t)-f(x)]F_k(t,x) & \text{pour } t\in(a,c)\cup(d,b),\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}$$

et nous obtenons

$$\sum_{\nu=0}^{n} |I_{\nu 1}| \leqq \sum_{k=1}^{r} \sum_{i,j=-p}^{p} \sum_{\nu=0}^{n} |\gamma_{i,j}^{(\nu,k)} \varphi_{\nu+j}(x)| \left| \int_a^b \varrho(t) g_k(t,x) \varphi_{\nu+i}(t)\,dt \right| =$$

$$= O(1) \sum_{k=1}^{r} \sum_{i,j=-p}^{p} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_{\nu+j}^2(x) \sum_{\nu=0}^{n} \left[\int_a^b \varrho(t) g_k(t,x) \varphi_{\nu+i}(t)\,dt \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= O(1) \sum_{k=1}^{r} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n+p} \varphi_\nu^2(x) \cdot \int_a^b \varrho(t) g_k^2(t,x)\,dt \right\}^{\frac{1}{2}},$$

c'est-à-dire que

$$\sum_{\nu=0}^{n} |I_{\nu 1}| = o(\lambda_{n+p}) = o(\lambda_n \cdot n^{\frac{1}{2}-\alpha}) \tag{10}$$

presque partout. Enfin, pour évaluer les sommes des $|I_{\nu 2}|$, posons

$$h_{kn}(t,x) = \begin{cases} [f(t)-f(x)]F_k(t,x) & \text{pour} \quad t \in \left(c, x-\frac{1}{n}\right) \cup \left(x+\frac{1}{n}, d\right), \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et il s'ensuit

$$\sum_{\nu=n_0}^{n} |I_{\nu 2}| = o(\lambda_n) \left\{ \left(\int_c^{x-\frac{1}{n}} + \int_{x+\frac{1}{n}}^{d} \right) \frac{\varrho(t)}{|t-x|^{2-2\alpha}}\,dt \right\}^{\frac{1}{2}}$$

presque partout. En intégrant par parties on obtient

$$\int_c^{x-\frac{1}{n}} \frac{\varrho(t)\,dt}{|t-x|^{2-2\alpha}} \leqq \left[\frac{|\mathrm{P}(t)-\mathrm{P}(x)|}{|t-x|^{2-2\alpha}} \right]_c^{x-\frac{1}{n}} + 2 \int_c^{x-\frac{1}{n}} \frac{|\mathrm{P}(t)-\mathrm{P}(x)|}{|t-x|^{3-2\alpha}}\,dt =$$

$$= O_x(1) \left[\frac{1}{|t-x|^{1-2\alpha}} \right]_c^{x-\frac{1}{n}} + O_x(1) \int_c^{x-\frac{1}{n}} \frac{dt}{|t-x|^{2-2\alpha}} = O_x(n^{1-2\alpha})$$

presque partout et une évaluation analogue vaut pour l'intégrale étendue à $\left(x+\frac{1}{n}, d\right)$. Il en résulte

$$\sum_{\nu=n_0}^{n} |I_{\nu 2}| = o(\lambda_n \cdot n^{\frac{1}{2}-\alpha}) \tag{11}$$

presque partout. L'évaluation (8) est, pour presque tous les points $x \in (c, d)$, une conséquence de (4), (9), (10) et (11).

Ouvrages cités.

[1] Bernstein, S., Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes de degré donné, *Mémoires Acad. Roy. Belgique*, (2) **4** (1912), 1—104.

[2] Freud, G., Über die starke (C, 1)-Summierbarkeit von orthogonalen Polynomreihen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **3** (1952), 83—88.

[3] Sz.-Nagy, B., Über die Konvergenz von Reihen orthogonaler Polynome, *Math. Nachrichten*, **4** (1951), 50—55.

[4] Tandori, K., Über die Cesàrosche Summierbarkeit der orthogonalen Polynomreihen. I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **3** (1952), 73—82 et II, *ibid.*, **5** (1954), 237—253.

(Reçu le 1 mars 1958.)