Über die Konvergenz fast überall der Orthogonalreihen bei jeder Anordnung ihrer Glieder.

Von G. ALEXITS in Budapest.

1. Bezeichne $\{\varphi_n(x)\}$ ein beliebiges, im endlichen Intervall (a, b) definiertes System von normierten Orthogonalfunktionen. Den allgemeinen Orthogonalsystemen kann man offenbar keine natürliche Gliederanordnung zuschreiben, man hat also keinen Grund, daß man bei der Entwicklung einer Funktion $f \in L^2$ in die Orthogonalreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{1}$$

die zufällig vorliegende Anordnung der Reihenglieder einer anderen bevorzugt. Es ist viel natürlicher zu fragen, welchen Bedingungen die Koeffizienten c_n zu genügen haben, damit die Orthogonalreihe (1) bei beliebiger Anordnung der Reihenglieder fast überall konvergiert. ORLICZ [2] hat dafür verschiedene Kriterien angegeben. Weit nicht das allgemeinste, aber wohl das einfachste lautet folgenderweise (MENCHOFF [1] und ORLICZ [2]):

Konvergiert für ein $\varepsilon > 0$ die Reihe $\Sigma |c_n|^{2-\varepsilon}$, so ist die Orthogonalreihe (1) bei jeder Anordnung ihrer Glieder fast überall konvergent.

Was ist aber die Sachlage, wenn man hier die feste Konstante $\varepsilon > 0$ durch eine positive, monoton gegen Null konvergente Zahlenfolge $\{\alpha_n\}$ ersetzt? Auf diese Frage möchten wir im folgenden eine Antwort geben:

Satz I. *Sei $|c_{m_n}|$ die in monoton abnehmende Anordnung gestellte Folge der nicht verschwindenden Koeffizienten. Ist*

$$\alpha_n \geqq (4+\varepsilon)\frac{\log\log n}{\log n} \qquad (\varepsilon > 0), \tag{2}$$

so folgt aus

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_{m_n}|^{2-\alpha_n} < \infty \tag{3}$$

die Konvergenz fast überall der Orthogonalreihe (1) *bei jeder Anordnung ihrer Glieder.* (Wir bezeichnen mit $\log n$ den Logarithmus mit der Basis 2.)

Es ist bemerkenswert, daß der Faktor $4+\varepsilon$ in der Bedingung (2) nicht verschärft werden kann. Wir werden nämlich auch den folgenden Satz beweisen:

Satz II. *Ist für ein* $\varepsilon>0$

$$\alpha_n \leqq (4-\varepsilon)\frac{\log\log n}{\log n} \qquad (n\geqq 2), \tag{4}$$

so gibt es eine überall divergente Orthogonalreihe $\Sigma c_n \Phi_n(x)$, *deren Koeffizienten eine positive, monoton abnehmende Folge bilden und der Bedingung* (3) *genügen.*

2. Wir bemerken zum Beweise des Satzes I, daß aus der Monotonie der Folge $\{c_{m_n}^2\}$ und $\Sigma c_{m_n}^2<\infty$ für alle genügend große Indizes $c_{m_n}^2 \leqq n^{-1}$, also

$$\log\frac{1}{c_{m_n}^2} \geqq \log n$$

folgt. Bei Beachtung von (2) ergibt sich somit für genügend große n die Abschätzung

$$\alpha_n \geqq (4+\varepsilon)\frac{\log\log n}{\log\frac{1}{c_{m_n}^2}}.$$

Ist N schon so groß, daß auch $\varepsilon\log\log N \geqq 4\log\log\log N$ gesetzt werden darf, so läßt sich für $n\geqq N$ aus der vorangehenden Abschätzung auf

$$\frac{\alpha_n}{2}\log\frac{1}{c_{m_n}^2} \geqq 2(\log\log n+\log\log\log n)$$

schließen. Daraus folgt

$$\left(\frac{1}{c_{m_n}^2}\right)^{\frac{\alpha_n}{2}} \geqq (\log\log n)^2\log^2 n,$$

oder anders geschrieben:

$$|c_{m_n}|^{-\alpha_n} \geqq (\log\log n)^2\log^2 n.$$

Aus (3) ergibt sich mithin

$$\sum_{n=N}^{\infty} c_{m_n}^2(\log\log n)^2\log^2 n \leqq \sum_{n=N}^{\infty}|c_{m_n}|^{2-\alpha_n}<\infty.$$

Nach einem Satz von Orlicz [2] zieht aber die Konvergenz der links stehenden Reihe die Konvergenz fast überall der Orthogonalreihe (1) bei jeder Anordnung ihrer Glieder nach sich, und hiermit ist der Satz I bewiesen.

3. Um auch den Satz II zu beweisen, setzen wir

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2^m m^3}} \qquad (2^m \leqq n < 2^{m+1})$$

für $m = 2, 3, \ldots$. Dann ist

$$\sum_{n=4}^{\infty} c_n^2 \log^2 n = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{2^m m^3} \sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1} \log^2 n \geqq \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m} = \infty.$$

Da $\{c_n\}$ monoton abnimmt und $\sum_{n=4}^{\infty} c_n^2 \log n$ divergiert, gibt es nach TANDORI [3] ein Orthogonalsystem $\{\Phi_n(x)\}$, so daß die Reihe

$$\sum_{n=4}^{\infty} c_n \Phi_n(x)$$

überall divergiert. Wir haben also nur noch zu zeigen, daß die Beziehung (3) unter der Bedingung (4) erfüllt ist. In der Tat gilt wegen der monotonen Abnahme von $\{\alpha_n\}$

$$\sum_{n=4}^{\infty} |c_n|^{2-\alpha_n} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{2^m m^3} \sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1} 2^{\frac{m\alpha_n}{2}} m^{\frac{3\alpha_n}{2}} \leqq \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^3} 2^{\frac{1}{2} m\alpha_{2^m}} m^{\frac{3}{2}\alpha_{2^m}}.$$

Nach (4) ist aber

$$\alpha_{2^m} \leqq (4-\varepsilon) \frac{\log m}{m},$$

also $m^{\frac{3}{2}\alpha_{2^m}} = O(1)$ und

$$2^{\frac{1}{2} m\alpha_{2^m}} = m^{2-\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Somit folgt

$$\sum_{n=4}^{\infty} |c_n|^{2-\alpha_n} = \sum_{m=2}^{\infty} O\left(\frac{1}{m^{1+\varepsilon/2}}\right) < \infty,$$

w. z. b. w.

4. Aus dem Gang des Beweises ist ersichtlich, daß man in Satz I

$$\alpha_n \geqq 4 \frac{\log\log n + \log\log\log n}{\log n}$$

und in Satz II

$$\alpha_n \leqq 4 \frac{\log\log n - \log\log\log n}{\log n}$$

wählen darf. Die Frage, ob etwa

$$\alpha_n = 4 \frac{\log\log n}{\log n}$$

der "richtige" Exponent ist, welcher den Konvergenzfall vom Divergenzfall scheidet, scheint sehr schwer zu sein.

Bemerken wir noch, daß der Satz von TANDORI, auf welchem unsere Divergenzkonstruktion beruht, auch dann richtig bleibt, wenn $\{\Phi_n(x)\}$ beschränkt vorausgesetzt wird. Unser Satz II bleibt also ebenfalls richtig, wenn man der Betrachtung nur beschränkte Orthonormalsysteme zuläßt.

Schrifttum.

[1] D. MENCHOFF, Sur les séries de fonctions orthogonales. III, *Fundamenta Math.*, **10** (1927), 375—420.

[2] W. ORLICZ, Zur Theorie der Orthogonalreihen, *Bulletin intern. Acad. Sci. Polonaise Cracovie, Sect. A*, **1927**, 81—115.

[3] K. TANDORI, Über die orthogonalen Funktionen. I, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957) 57—130.

(Eingegangen am 25. März 1958.)