Eine Ungleichung für Tschebyscheffsche Approximationspolynome.

Von G. FREUD in Budapest.

Es sei $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ein Tschebyscheffsches Funktionensystem, d.h. eine Folge von Funktionen, welche im endlichen Intervall $[a, b]$ stetig sind und für welche jedes nicht identisch verschwindende f-Polynom $\sum_{k=1}^{n} a_k f_k$ in $[a, b]$ höchstens $n-1$ Nullstellen besitzt. (Vgl. N. I. ACHIESER [1] § 43—48.) Nach einem Satz von A. HAAR [2] gibt es zu jeder in $[a, b]$ definierten stetigen Funktion $F(x)$ ein eindeutig bestimmtes f-Polynom $P(F; x)$, welches unter allen f-Polynomen die kleinste Abweichung von F in der Metrik C besitzt:

$$E(F) = \operatorname*{Max}_{x\in[a,b]} |F(x)-P(F;x)| \leqq \operatorname*{Max}_{x\in[a,b]} |F(x)-\Sigma a_k f_k(x)|,$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur für $\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x) \equiv P(f; x)$.

Satz. *Es seien $F_0(x)$, $F(x)$ in $[a, b]$ stetige Funktionen mit*

$$(1) \qquad |F(x)-F_0(x)| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad x \in [a, b].$$

Dann besteht die Ungleichung

$$(2) \qquad |P(F;x)-P(F_0;x)| \leqq A\varepsilon \quad \text{für} \quad x\in[a,b],$$

wobei die Zahl A von F_0 und vom System $\{f_i\}$ abhängt, aber von F und ε unabhängig ist.

Aus diesem Satze kann man z.B. sofort ablesen, daß wenn $F_\lambda(x)$ in beiden Veränderlichen λ und x stetig ist, dann auch $P(F_\lambda; x)$ in λ stetig ist. Im speziellen Falle der gewöhnlichen Polynome wurde dieser Satz von C. DE LA VALLÉE POUSSIN [3] bewiesen. Der hier angeführte Beweis scheint einfacher zu sein.

Beweis. Es gibt $n+1$ verschiedene Stellen $x_i \in [a, b]$ $(i = 0, 1, \ldots, n;$ $x_i < x_{i+1})$, für welche

$$(3) \qquad \gamma(-1)^i [F(x_i)-P(F;x_i)] = E(f) \quad (\gamma = +1 \text{ oder } \gamma = -1)$$

gültig ist (vgl. ACHIESER [1] § 48).

Aus (1) folgt

$$|F(x)-P(F_0;x)| \leqq |F(x)-F_0(x)|+|F_0(x)-P(F_0;x)| \leqq E(F_0)+\varepsilon,$$

also[1)]

$$E(F) \leqq E(F_0)+\varepsilon. \tag{4}$$

Hieraus folgt, wenn man (3) und (4) berücksichtigt,

$$\left\{\begin{aligned} &\gamma(-1)^{k+1}[P(F;x_k)-P(F_0;x_k)] \leqq |P(F;x_k)-F(x_k)|+|F(x_k)-F_0(x_k)|+\\ &\qquad+\gamma(-1)^{k+1}[F_0(x_k)-P(f_0,x_k)] \leqq E(F)+\varepsilon-E(F_0) \leqq 2\varepsilon. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Es seien nun $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ $(i=1,2,\ldots,n)$ verschiedene Stellen in $[a,b]$. Das homogene Gleichungssystem $\sum_{k=1}^{n} \gamma_k f_k(\xi_i)=0 \quad (i=1,2,\ldots,n)$ besitzt keine nichttriviale Lösung in den γ_k, da ein f-Polynom nicht mehr als $n-1$ Nullstellen besitzen kann, ohne daß es identisch verschwindet. Hieraus folgt, daß die determinante $|f_k(\xi_i)|$ von Null verschieden ist. Es gibt also ein eindeutig bestimmtes f-Polynom $L(x)$, welches an den Stellen ξ_i die beliebig vorgeschriebenen Werte λ_i annimmt, und es kann, wie man leicht zeigt, in der Form

$$L(x)=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i l_i(x) \tag{6}$$

dargestellt werden. Wir nennen (6) die Lagrangesche Interpolationsformel der f-Polynome und $l_i(x)$ die Lagrangeschen f-Parabeln zum Grundpunktsystem $\{\xi_i\}$. Es gilt

$$l_i\{\xi_k\}=\begin{cases} 1 & \text{für } i=k,\\ 0 & \text{für } i\neq k,\end{cases}$$

und in der Nähe jeder von ξ_i verschiedenen Stelle $\xi_k \in (a,b)$ ändert l_i sein Vorzeichen (vgl. [1]),

$$\operatorname{sign} l_i(x)=\begin{cases} (-1)^{i-j} & \text{für } \xi_i < x \in (\xi_j, \xi_{j+1}),\\ (-1)^{i-j+1} & \text{für } \xi_i > x \in (\xi_j, \xi_{j+1}).\end{cases} \tag{7}$$

Wir wollen als Grundpunktsystem $\{\xi_i\}$ die Folge $x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_n$ wählen, wobei x_i die in der Formel (3) auftretenden Punkte sind. Die zu x_k gehörige Lagrangesche Parabel nennen wir jetzt $L_k(x)$ $(k \neq n)$. Für $x \in (x_r, x_{r+1})$ erhält man aus (7)

$$\operatorname{sign} L_k(x)=(-1)^{k-r+1} \qquad (k \neq r). \tag{7a}$$

Schreibt man die Lagrangesche Interpolationsformel für das f-Polynom

1) Ebenso erhält man auch $E(F_0) \leqq E(F)+\varepsilon$. Hieraus folgt, daß $E(F)$ als Funktion der Elemente des C-Raumes stetig ist. Insbesondere ist $E(F_\lambda)$ in λ stetig, falls $F_\lambda(x)$ in beiden Variabeln x und λ stetig ist.

$\psi(x) \equiv \gamma[P(F;x) - P(F_0;x)]$ auf, dann ergibt sich aus (7a) und (5) für $x \in (x_r, x_{r+1})$:

$$(8a)\quad \begin{aligned}(-1)^r \psi(x) &= (-1)^r \sum_{\substack{k=0\\k \neq r}}^{n} \psi(x_k) L_k(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \psi(x_k) |L_k(x)| \leqq 2 \sum_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{n} |L_k(x)|\,\varepsilon.\end{aligned}$$

Wählt man als Grundpunktsystem $x_0, x_1, \ldots, x_r, x_{r+2}, \ldots, x_n$ und nennt die entsprechende Lagrangesche Parabel $L_k^*(x)$ $(k \neq r+1)$, so erhält man für $x \in (x_r, x_{r+1})$

$$(7b)\qquad \operatorname{sign} L_k^*(x) = (-1)^{k-r} \qquad (k \neq r+1),$$

und hieraus folgt für $x \in (x_r, x_{r+1})$ mit demselben Schluß wie in (8a)

$$(8b)\qquad (-1)^{r+1} \psi(x) \leqq 2 \sum_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{n} |L_k^*(x)|\,\varepsilon.$$

Aus Stetigkeitsgründen sind (8a) und (8b) auch für $x = x_r$ und $x = x_{r+1}$ gültig.

(8a) und (8b) zusammen ergeben eine Abschätzung von $|P(F;x) - P(F_0;x)|$ für $x \in [x_0, x_n]$. Es müssen noch die Intervalle $[a, x_0)$ und $(x_n, b]$ betrachtet werden; in diesen Intervallen erhält man ebenfalls Ungleichungen von der Form (8a) und (8b), indem man als Grundpunkte einmal $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, das andere Mal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wählt.

Herrn Dr. F. PTÁK (Prag) bin ich für die Fragestellung zu Dank verpflichtet.

Literatur.

[1] Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации (Москва—Ленинград, 1947). Deutsche Übersetzung: N. I. ACHIESER, *Vorlesungen über Approximationstheorie* (Berlin, 1956).

[2] A. HAAR, Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen, *Math. Annalen*, 78 (1918), 294—311.

[3] CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle* (Paris, 1919).

(Eingegangen am 12. Februar 1958.)