Über die orthogonalen Funktionen. V
(Genaue Weylsche Multiplikatorfolgen)

Von KÁROLY TANDORI in Szeged

Herrn Professor Georg Alexits zum 60. Geburtstag gewidmet

Einleitung

Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=1,2,\dots)$ ein im Intervall $[a,b]$ orthonormiertes Funktionensystem und

$$L_n(t)=\int_a^b\left|\sum_{k=1}^n \varphi_k(x)\varphi_k(t)\right|dx$$

die zugehörige n-te Lebesguesche Funktion. KACZMARZ [1] hat den folgenden Satz bewiesen (siehe auch TANDORI [1]):

Ist $L_n(t)=O(\lambda(n))$ $(a\leqq t\leqq b;\ n=1,2,\dots)$ mit einer positiven, monoton gegen Unendlich konvergierenden Zahlenfolge $\{\lambda(n)\}$, so konvergiert die Orthogonalreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$$

für jede Koeffizientenfolge $\{c_n\}$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\,\lambda(n)<\infty,$$

fast überall in $[a,b]$.

Nach dem Satz von MENCHOFF [1] und RADEMACHER [1] ist dieses Resultat besonders im Falle $\lambda(n)=O(\log^2 n)$ vom Interesse.

Einen ähnlichen Satz hat KACZMARZ [2] auch für die Cesàrosche Summierbarkeit bewiesen (siehe auch TANDORI [1]).

In dieser Note werden wir beweisen, daß der obige Satz nicht verbessert werden kann. Es gilt nämlich der folgende

Satz I. *Es sei* $\{\lambda(n)\}$ *eine positive, monoton gegen Unendlich konvergierende Zahlenfolge mit*

(1) $$\lambda(n) = O(\log^2 n).$$ [1]

Dann existiert ein im Intervall $[a, b]$ *orthonormiertes Funktionensystem* $\{\Phi_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *mit den folgenden Eigenschaften: es gilt in* $[a, b]$

(2) $$\int_a^b \left| \sum_{k=1}^{n} \Phi_k(x)\, \Phi_k(t) \right| dx = O(\lambda(n)) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

und für jede positive Zahlenfolge $\{w(n)\}$ *mit*

(3) $$w(n) = o(\lambda(n))$$

gibt es eine Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ *mit konvergentem*

(4) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 w(n),$$

und fast überall divergentem

(5) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(x).$$

Ein ähnlicher Satz kann auch für die Cesàrosche Summierbarkeit bewiesen werden; den entsprechenden Satz werden wir aber nicht ausführlich behandeln.

Die folgende Definition stammt von MENCHOFF [2]. Es sei $\{W(n)\}$ eine positive Zahlenfolge und $\{\varphi_n(x)\}$ ein im Intervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem. Die Folge $\{W(n)\}$ wird die *genaue Weylsche Multipiikatorfolge für das System* $\{\varphi_n(x)\}$ genannt, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat: für jede Koeffizientenfolge $\{c_n\}$ mit konvergentem

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 W(n)$$

konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

fast überall, und für jede positive Zahlenfolge $\{w(n)\}$ mit $w(n) = o(W(n))$ gibt es eine Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ mit konvergentem

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 W(n),$$

für die die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

fast überall divergiert.

---

[1]) In dieser Arbeit wird der Logarithmus mit der Basis 2 verwendet.

Auf Grund des erwähnten Satzes von KACZMARZ folgt leicht der folgende

Satz II. *Es sei $\{\lambda(n)\}$ eine positive, monoton gegen Unendlich konvergierende Zahlenfolge, für die die Bedingung* (1) *erfüllt wird. Dann gibt es ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$, für das diese Folge $\{\lambda(n)\}$ die genaue Weylsche Multiplikatorfolge ist.*

Dieser Satz ist eine Verschärfung eines Satzes von A. A. TALALYAN [1].

§ 1. Hilfssätze

Zum Beweis unseres Satzes benötigen wir einige Hilfssätze.

Hilfssatz I. *Es sei $p(\geqq 2)$ eine natürliche Zahl. Es kann ein im Intervall $0 \leqq x \leqq 5$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen*[2]) *$\{f_l(p; x)\}$ $(l = 1, \ldots, 2p)$ mit den folgenden Eigenschaften angegeben werden: zu jedem Punkt $x \in [2, 3]$ gibt es eine von x abhängige natürliche Zahl $m(x)(< p)$, so daß die Funktionswerte $f_1(p; x), \ldots, f_{p+m(x)}(p; x)$ positiv sind und*

$$f_1(p; x) + \cdots + f_{p+m(x)}(p; x) \geqq A\sqrt{p}\log p \tag{1.1}$$

gilt, wo A eine von x und p unabhängige, positive Zahl ist, weiterhin für $x \in [0, 5]$

$$\int_0^5 \left| \sum_{l=1}^{n} f_l(p; x) f_l(p; t) \right| dx \leqq B \log^2 p \qquad (n = 1, \ldots, 2p) \tag{1.2}$$

gilt, wobei $B(\geqq 1)$ eine von x und p unabhängige, positive Zahl ist.

Abgesehen von der letzten Behauptung ist dieser Hilfssatz bekannt. (KACZMARZ [3], siehe auch MENCHOFF [1] und TANDORI [2], Hilfssatz II.)

Beweis von Hilfssatz I. Es sei

$$\bar{f}_l(p; x) = \frac{1}{k - p - l - \frac{1}{2}} \quad \text{für } x \in \left[\frac{k-1}{p}, \frac{k}{p}\right) \quad (k = 1, \ldots, 4p;\ l = 1, \ldots, 2p).$$

Dann ist

$$\int_0^4 \bar{f}_l^2(p; x)\,dx = \sum_{k=1}^{4p} \frac{1}{\left(k - p - l - \frac{1}{2}\right)^2} \frac{1}{p} \qquad (l = 1, \ldots, 2p),$$

[2]) Eine Funktion in (a, b) heißt eine *Treppenfunktion*, wenn (a, b) in endlich viele Teilintervalle zerlegt werden kann, so daß die Funktion in jedem Teilintervall konstant ist.

woraus folgt

$$(1.3) \qquad \frac{A'}{p} \leqq \int_0^4 \bar{f}_l^2(p;x)\,dx \leqq \frac{A''}{p} \qquad (l=1,\ldots,2p),$$

wo A' und A'' von p unabhängige Zahlen sind. Wir setzen:

$$\alpha_{i,j}=\int_0^4 \bar{f}_i(p;x)\bar{f}_j(p;x)\,dx \qquad (1\leqq i\leqq 2p,\ 1\leqq j\leqq 2p;\ i\neq j).$$

Mit einfacher Rechnung ergibt sich

$$(1.4) \qquad |\alpha_{i,j}|\leqq \frac{2}{p^2}$$

(siehe KACZMARZ [3] oder TANDORI [2], S. 66—67).

Im Intervall $[4,5]$ definieren wir die Funktionen $\{\bar{f}_l(p;x)\}$ $(l=1,\ldots$ $\ldots,2p)$ folgenderweise. Wir teilen das Intervall $[4,5]$ in $N=2p(2p-1)$ paarweise disjunkte Teilintervalle gleicher Länge, die wir in irgendeiner Reihenfolge durch $I_{i,j}$ bezeichnen $(1\leqq i\leqq 2p,\ 1\leqq j\leqq 2p;\ i\neq j)$. Es sei für $l=1,\ldots,2p$

$$\bar{f}_l(p;x)=\begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2}N|\alpha_{l,j}|} & \text{für } x\in I_{l,j},\\ -\sqrt{\frac{1}{2}N|\alpha_{l,j}|}\,\operatorname{sign}\alpha_{l,j} & \text{für } x\in I_{j,l},\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Die so definierten Treppenfunktionen $\{\bar{f}_l(p;x)\}$ $(l=1,\ldots,2p)$ bilden im Intervall $[0,5]$ offenbar ein orthogonales System. Wir setzen

$$c_l^2=\int_0^5 \bar{f}_l^2(p;x)\,dx \qquad (l=1,\ldots,2p$$

Da

$$c_l^2=\int_0^4 \bar{f}_l^2(p;x)\,dx+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{l-1}|\alpha_{l,n}|+\frac{1}{2}\sum_{n=l+1}^{2p}|\alpha_{l,n}|$$

ist, so folgt nach (1.3) und (1.4) die Abschätzung:

$$(1.5) \qquad \frac{1}{A_1p}\leqq c_l^2\leqq \frac{1}{A_2p} \qquad (l=1,\ldots,2p),$$

wo A_1 und A_2 von p unabhängige positive Zahlen sind.

Wir nehmen die orthonormierten Funktionen

$$f_l(p;x)=\frac{1}{c_l}\bar{f}_l(p;x) \qquad (l=1,\ldots,2p).$$

Auf Grund von (1.5) und der Definition von $\bar{f}_l(p;x)$ läßt sich zeigen, daß für diese Funktionen die Bedingung (1.1) erfüllt wird (siehe KACZMARZ [3] oder TANDORI [2], S. 67—68).

Wir werden noch (1.2) beweisen. Es sei n ein beliebiger Index $(1 \leqq n \leqq 2p)$. Wir setzen

$$(1.6) \qquad \int_0^5 \left| \sum_{l=1}^n f_l(p;x) f_l(p;t) \right| dx = \left(\int_0^4 + \int_4^5 \right) \left| \sum_{l=1}^n f_l(p;x) f_l(p;t) \right| dx = $$
$$= R_1(t) + R_2(t).$$

Wir betrachten zuerst den Fall $0 \leqq t < 4$. Dann gibt es einen Index k_0 $(1 \leqq k_0 \leqq 4p)$ so, daß $t \in \left[\frac{k_0-1}{p}, \frac{k_0}{p} \right)$ gilt. Nach der Definition von $f_l(p;x)$ und auf Grund von (1.5) ist dann

$$R_1(t) = \sum_{k=1}^{4p} \int_{\frac{k-1}{p}}^{\frac{k}{p}} \left| \sum_{l=1}^n \frac{1}{c_l^2} \frac{1}{\left(k_0 - p - l - \frac{1}{2}\right)\left(k - p - l - \frac{1}{2}\right)} \right| dx \leqq$$
$$\leqq A_1 \sum_{k=1}^{4p} \sum_{l=1}^n \left| \frac{1}{\left(k_0 - p - l - \frac{1}{2}\right)\left(k - p - l - \frac{1}{2}\right)} \right| \leqq$$
$$\leqq A_1 \pi^2 + A_1 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^{4p} \frac{1}{|k - k_0|} \sum_{l=1}^n \left| \frac{1}{k_0 - p - l - \frac{1}{2}} - \frac{1}{k - p - l - \frac{1}{2}} \right| \leqq$$
$$\leqq A_1 \pi^2 + A_1 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^{4p} \frac{1}{|k - k_0|} \sum_{l=1}^n \left(\frac{1}{\left|k_0 - p - l - \frac{1}{2}\right|} + \frac{1}{\left|k - p - l - \frac{1}{2}\right|} \right)$$

Daraus folgt mit einfacher Rechnung:

$$(1.7) \qquad R_1(t) \leqq A_3 (\log p)^2,$$

wo A_3 eine positive Konstante bezeichnet. Nach der Definition der Funktionen $f_l(p;x)$ und auf Grund von (1.5) gilt in diesem Falle

$$(1.8) \qquad R_2(t) \leqq A_1 p \sum_{l=1}^n \frac{1}{\left|k_0 - p - l - \frac{1}{2}\right|} \int_4^5 |\bar{f}_l(p;x)| dx.$$

Nach der Definition von $\bar{f}_l(p;x)$ ist

$$\int_4^5 |\bar{f}_l(p;x)|\,dx = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{2p} \mu(I_{l,j}) \sqrt{\frac{1}{2} N|\alpha_{l,j}|} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{2p} \mu(I_{j,l}) \sqrt{\frac{1}{2} N|\alpha_{l,j}|}.^{3)}$$

Hier ist aber $\mu(I_{i,j}) = \dfrac{1}{2p(2p-1)} \leqq \dfrac{1}{2p^2}$, $N|\alpha_{i,j}| \leqq 8$ und so gilt

$$\int_4^5 |\bar{f}_l(p;x)|\,dx \leqq \frac{4}{p}. \tag{1.9}$$

Daraus folgt nach (1.8)

$$R_2(t) \leqq A_4 \log p,$$

wo A_4 eine positive Konstante bedeutet. Auf Grund von (1.6), (1.7) ergibt sich, daß (1.2) für $t \in [0,4)$ mit $B = \max(1, A_3 + A_4)$ besteht.

Es sei zweitens $t \in [4,5]$. Dann ist t in einem und nur einem $I_{i,j}$ enthalten. Nach der Definition der Funktionen $f_l(p;t)$ ist aber

$$f_l(p;t) = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqq l \leqq p,\ l \neq i,\ l \neq j,$$

und nach dem obigen gilt

$$|\bar{f}_i(p;t)| \leqq 2, \quad |\bar{f}_j(p;t)| \leqq 2.$$

So gilt nach (1.5)

$$\int_0^5 \left| \sum_{l=1}^{n} f_l(p;x) f_l(p;t) \right| dx \leqq 2A_1 p \left\{ \int_0^5 |\bar{f}_i(p;x)|\,dx + \int_0^5 |\bar{f}_j(p;x)|\,dx \right\}. \tag{1.10}$$

Nach der Definition von $\bar{f}_l(p;x)$ ist für $l = 1, \ldots, 2p$

$$\int_0^4 |\bar{f}_l(p;x)|\,dx = \sum_{k=1}^{4p} \int_{\frac{k-1}{p}}^{\frac{k}{p}} |\bar{f}_l(p;x)|\,dx = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{4p} \frac{1}{\left|k-p-l-\frac{1}{2}\right|} \leqq A_1 \frac{\log p}{p}.$$

Daraus folgt, nach (1.9) und (1.10), daß (1.2) auch im Falle $t \in [4,5]$ besteht.

Damit haben wir Hilfssatz I vollständig bewiesen.

Ist $I = [u, v]$ ein beliebiges Intervall, so definieren wir:

$$f_l(p, I; x) = \begin{cases} \sqrt{5} f_l\left(p; 5\dfrac{x-u}{v-u}\right) & \text{für} \quad u < x < v, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(l = 1, \ldots, 2p)$ und

$$F(I) = \left[2\frac{v-u}{5} + u,\ 3\frac{v-u}{5} + u\right).$$

---

3) $\mu(H)$ bezeichnet das Lebesguesche Maß der Menge H.

Dann ist

$$\int_I f_i(p, I; x) f_j(p, I; x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j, \\ \mu(I) & \text{für } i = j, \end{cases} \tag{1.11}$$

$$\mu(F(I)) = \frac{\mu(I)}{5}, \tag{1.12}$$

für $x \in F(I)$ gibt es nach (1.1) eine von x abhängige natürliche Zahl $m(x) (< p)$ derart, daß die Funktionenwerte $f_1(p, I; x), \ldots, f_{p+m(x)}(p, I; x)$ positiv sind, die Ungleichung

$$f_1(p, I; x) + \cdots + f_{p+m(x)}(p, I; x) \geqq \sqrt{5}A\sqrt{p}\log p \tag{1.13}$$

besteht und für $x \in [u, v]$

$$\int_u^v \left| \sum_{l=1}^{n} f_l(p, I; x) f_l(p, I; t) \right| dx \leqq \mu(I) B \log^2 p \qquad (n = 1, \ldots, 2p) \tag{1.14}$$

gilt.

Hilfssatz II. *Es sei* $\{\chi_n(x)\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ *das orthonormierte Haarsche Funktionensystem im Grundintervall* $[0, 1]$. *Dann ist*

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=0}^{s} \chi_n(x) \chi_n(t) \right| dx \leqq 1 \qquad (s = 0, 1, \ldots) \tag{1.15}$$

überall in $[0, 1]$.

Dieser Hilfssatz ist bekannt (siehe HAAR [1]).

Für ein beliebiges endliches Intervall $I = [u, v]$ definieren wir

$$\chi_n(I; x) = \begin{cases} \chi_n\left(\dfrac{x-u}{v-u}\right) & \text{für } u < x < v \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Offenbar ist

$$\int_u^v \chi_i(I; x) \chi_j(I; x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j, \\ \mu(I) & \text{für } i = j. \end{cases} \tag{1.16}$$

Aus (1.15) folgt, daß überall in I gilt:

$$\int_I \left| \sum_{n=0}^{s} \chi_n(I; x) \chi_n(I; t) \right| dx \leqq \mu(I) \qquad (s = 0, 1, \ldots). \tag{1.17}$$

Hilfssatz III. *Es seien* $\{N_k\}, \{M_k\}$ $(N_0 = 0, M_0 = 2, M_k \geqq 2; k = 0, 1, \ldots)$ *Zahlenfolgen von natürlichen Zahlen mit* $N_k + 2M_k \leqq N_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. *Dann existiert ein im Grundintervall* $[a, b]$ *orthonormiertes Funktionensystem von Treppenfunktionen* $\Phi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *und eine Folge* *von meßbaren Mengen* $F_k(\subseteq [a,b])$ $(k=1,2,\ldots)$ *derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

die Mengen F_k $(k=1,2,\ldots)$ *sind stochastisch unabhängig*[4]) *und es gilt für* $k=1,2,\ldots$

$$\mu(F_k)=\frac{b-a}{5}; \tag{1.18}$$

für jedes $x\in F_k$ *gibt es eine von* x *abhängige natürliche Zahl* $m_k(x)$ $(<M_k)$ *derart, daß die Funktionswerte* $\Phi_{N_k+1}(x),\ldots,\Phi_{N_k+M_k+m_k(x)}(x)$ *gleiche Vorzeichen haben und*

$$|\Phi_{N_k+1}(x)+\cdots+\Phi_{N_k+M_k+m_k(x)}(x)|\geqq C\sqrt{M_k}\log M_k \tag{1.19}$$

gilt, wo C *eine von* k *und* x *unabhängige, positive Zahl ist;*

für jedes $t\in[a,b]$ *und für jedes* k $(k=0,1,\ldots)$ *ist*

$$\int_a^b\left|\sum_{n=N_k+1}^{N}\Phi_n(x)\Phi_n(t)\right|dx\leqq D\log^2 M_k\qquad(N_k+1\leqq N\leqq N_{k+1}), \tag{1.20}$$

wo $D(\geqq 1)$ *eine von* t *und* k *unabhängige, positive Zahl bedeutet.*

B e w e i s v o n H i l f s s a t z III. Es seien

$$\Phi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}\chi_{n-1}([a,b];x)\qquad(n=1,\ldots,N_1).$$

Nach (1.16) bilden diese Funktionen in $[a,b]$ ein orthonormiertes System und nach (1.17) ist (1.20) für $k=0$ erfüllt.

Da die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(1\leqq n\leqq N_1)$ Treppenfunktionen sind, so kann das Intervall $[a,b]$ in endlich viele Teilintervalle I_ϱ $(1\leqq\varrho\leqq r)$ derart zerlegt werden, daß in den einzelnen Teilintervallen die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(1\leqq n\leqq N_1)$ konstant sind. Die zwei Hälften des Intervalls I_ϱ bezeichnen wir mit I'_ϱ, I''_ϱ $(1\leqq\varrho\leqq r)$. Wir wenden den Hilfssatz I für die Zahl $M_1(\geqq 2)$ an. Wir setzen

$$\Phi_{N_1+l}(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}\left\{\sum_{\varrho=1}^{r}f_l(M_1,I'_\varrho;x)-\sum_{\varrho=1}^{r}f_l(M_1,I''_\varrho;x)\right\}\qquad(l=1,\ldots,2M_1)$$

und

$$F_1=\bigcup_{\varrho=1}^{r}(F(I'_\varrho)\cup F(I''_\varrho)).$$

Da die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(1\leqq n\leqq N_1+2M_1)$ Treppenfunktionen sind, kann das Intervall $[a,b]$ in endlich viele Teilintervalle $\bar I_\varrho$ $(1\leqq\varrho\leqq r)$ zerlegt werden, derart, daß in den einzelnen Teilintervallen die Funktionen $\Phi_n(x)$

[4]) Betreffs dieser Definition siehe TANDORI [2], S. 69.

$(1 \leqq n \leqq N_1 + 2M_1)$ konstant sind. Die zwei Hälften des Intervalls $\bar{I}_\varrho$ bezeichnen wir mit $\bar{I}'_\varrho, \bar{I}''_\varrho$ $(1 \leqq \varrho \leqq \bar{r})$. Wir setzen

$$\Phi_{N_1+2M_1+l+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \left\{ \sum_{\varrho=1}^{\bar{r}} \chi_l(\bar{I}'_l; x) - \sum_{\varrho=1}^{\bar{r}} \chi_l(\bar{I}''_\varrho; x) \right\}$$
$$(l = 0, \ldots, N_2 - N_1 - 2M_1 - 1).$$

Auf Grund von (1. 11) und (1. 16) kann gezeigt werden, daß die Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq N_2)$ in $[a, b]$ ein orthonormiertes Funktionensystem bilden. Nach (1. 12) besteht (1. 18) für $k = 1$. Ist $x \in F_1$, so folgt nach (1. 13), daß (1. 19) für $k = 1$ mit geeigneterweise gewähltem $m_1(x)$ gilt, mit $C = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{b-a}} A$, wo A die im Hilfssatz I stehende Zahl ist. Endlich, nach (1. 14) und (1. 17) folgt, daß (1. 20) für $k = 1$ besteht, mit $D = 2B$, wo B die im Hilfssatz I stehende Zahl bedeutet.

Es sei $\varkappa \geqq 2$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq N_\varkappa)$ und die Mengen F_k $(1 \leqq k \leqq \varkappa - 1)$ schon definiert sind, derart, daß diese Funktionen in $[a, b]$ ein orthonormiertes Funktionensystem bilden, diese Mengen stochastisch unabhängig sind, und (1. 18), (1. 19) und (1. 20) für $k = 1, \ldots, \varkappa - 1$ erfüllt sind.

Dann kann das Intervall $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle J_ϱ $(1 \leqq \varrho \leqq s)$ derart zerlegt werden, daß die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq N_\varkappa)$ in den einzelnen Teilintervallen konstant sind. Die zwei Hälften des Intervalls J_ϱ bezeichnen wir mit J'_ϱ, J''_ϱ $(1 \leqq \varrho \leqq s)$. Wir wenden den Hilfssatz I mit der Zahl $M_\varkappa$ $(\geqq 2)$ an. Wir setzen

$$\Phi_{N_\varkappa+l}(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \left\{ \sum_{\varrho=1}^{s} f_l(M_\varkappa, J'_\varrho; x) - \sum_{\varrho=1}^{s} f_l(M_\varkappa, J''_\varrho; x) \right\} \qquad (l = 1, \ldots, 2M_\varkappa)$$

und

$$F_\varkappa = \bigcup_{\varrho=1}^{s} (J'_\varrho \cup J''_\varrho).$$

Da die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq N_\varkappa + 2M_\varkappa)$ Treppenfunktionen sind, so kann das Intervall $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle $\bar{J}_\varrho$ $(1 \leqq \varrho \leqq \bar{s})$ derart zerlegt werden, daß in den einzelnen Teilintervallen die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq N_\varkappa + 2M_\varkappa)$ konstant sind. Die zwei Hälften des Intervalls $\bar{J}_\varrho$ bezeichnen wir mit $\bar{J}'_\varrho, \bar{J}''_\varrho$ $(1 \leqq \varrho \leqq \bar{s})$. Wir setzen

$$\Phi_{N_\varkappa+2M_\varkappa+l+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \left\{ \sum_{\varrho=1}^{\bar{s}} \chi_l(\bar{J}'_\varrho; x) - \sum_{\varrho=1}^{\bar{s}} \chi_l(\bar{J}''_\varrho; x) \right\}$$
$$(l = 0, \ldots, N_{\varkappa+1} - N_\varkappa - 2M_\varkappa - 1).$$

Auf Grund von (1. 11) und (1. 16) kann gezeigt werden, daß die Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq N_{\varkappa+1})$ in $[a, b]$ ein orthonormiertes Funktionensystem bilden. Nach (1. 12) besteht (1. 18) für $k = \varkappa$. Es ist klar, daß die Mengen $F_1, \ldots, F_\varkappa$ stochastisch unabhängig sind. Ist $x \in F_\varkappa$, so folgt nach (1. 13), daß (1. 19) für $k = \varkappa$ mit geeignet gewähltem $m_\varkappa(x)$ und mit der obigen Konstante C gilt. Nach (1. 14) und (1. 17) folgt endlich, daß (1. 20) für $k = \varkappa$ mit der obigen Konstante D besteht.

Mit vollständiger Induktion ergibt sich ein Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ und eine Mengenfolge $\{F_m\}$, für welche die Bedingungen des Hilfssatzes III erfüllt sind.

§ 2. Beweis von Satz I

Es sei $\{\lambda(n)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine positive, monoton gegen Unendlich strebende Zahlenfolge, für die die Bedingung (1) erfüllt wird; ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $\lambda(1) \geqq 2$ angenommen werden. Dann sei M eine positive Zahl, für die $\lambda(n) \leqq M \log^2 n$ $(n = 2, 3, \ldots)$ gilt; wir können $M \geqq 1$ annehmen. Dann können eine im strengen Sinne monoton wachsende Indexfolge $\{\nu_m\}$ $(\nu_1 \geqq 16)$ und eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge $\{\bar\lambda(n)\}$ derart angegeben werden, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a) $\lambda(n) \leqq \bar\lambda(n) \leqq 2\lambda(n)$ $\qquad (n = 1, 2, \ldots)$,

a) $\bar\lambda(\nu_m) \leqq \frac{1}{2}\bar\lambda(\nu_{m+1})$ $\qquad (m = 1, 2, \ldots)$,

c) für $\nu_{m+1} - \nu_m > 1$ ist $\bar\lambda(\nu_{m+1}) \leqq 4\bar\lambda(\nu_m)$ $\qquad (m = 1, 2, \ldots)$.

(Für die Konstruktion dieser Folgen siehe TANDORI [3], S. 174—175.)

Wir behaupten daß die Ungleichung

$$\nu_{m+1} \geqq 2\nu_m \tag{2. 1}$$

für unendlich viele m erfüllt wird. Im entgegengesetzten Fall gäbe es nämlich einen Index a derart, daß $\nu_{m+a} < 2^m \nu_a$ für $m = 0, 1, \ldots$ gilt. Dann wäre nach (1) und a)

$$\bar\lambda(\nu_{m+a}) \leqq 2\lambda(\nu_{m+a}) \leqq 2M \log^2 \nu_{m+a} \leqq 2M\,(m + \log \nu_a)^2. \tag{2. 2}$$

Nach b) ist aber

$$\bar\lambda(\nu_{m+1}) \geqq 2^m \bar\lambda(\nu_1),$$

was für genügend großes m (2. 2) widerspricht.

Wir setzen $N_0 = 0$ und es sei $N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots$ eine wachsende unendliche Folge von solchen Indizes $\nu_m (\geqq 16)$, für die (2. 1) erfüllt wird.

Dann ist

$$(2.3) \qquad 2N_k \leqq N_{k+1} \qquad (k=1,2,\ldots).$$

Nach a) und b) gilt weiterhin

$$(2.4) \quad 1+\lambda(N_1)+\cdots+\lambda(N_k) \leqq 1+\bar{\lambda}(N_1)+\cdots+\bar{\lambda}(N_k) \leqq 2\bar{\lambda}(N_k) \leqq 4\lambda(N_k)$$
$$(k=1,2,\ldots).$$

Wir definieren eine Folge von natürlichen Zahlen M_k $(k=0,1,\ldots)$ folgenderweise. Es sei $M_0=2$. Ist $N_k=\nu_{m_k}$, so gilt nach der Definition von N_k und auf Grund von (1), a), c) und (2. 1):

$$(2.5) \ \log^2\left[\frac{N_k}{2}\right] > \log^2\frac{N_k}{4} \geqq \frac{1}{4}\log^2 N_k \geqq \frac{1}{8M}\bar{\lambda}(N_k) \geqq \frac{1}{32M}\bar{\lambda}(\nu_{m_k+1}) \geqq \frac{1}{32M}\bar{\lambda}(2N_k)$$

$(k=1,2,\ldots)$. $\left(\left[\frac{N_k}{2}\right]\right.$ ist der ganze Teil von $\left.\frac{N_k}{2}\right)$. Es sei M_k die erste natürliche Zahl, für die die Bedingungen

$$M_k \geqq 2, \quad 2M_k \leqq N_k, \quad \log^2 M_k \geqq \frac{1}{32M}\bar{\lambda}(2N_k) \qquad (k=1,2,\ldots)$$

erfüllt sind. Nach (2. 5) sind diese Bedingungen nicht in Widerspruch. Dann ist nach a)

$$(2.6) \qquad \log^2 M_k \geqq \frac{1}{32M}\lambda(N_k+2M_k) \qquad (k=1,2,\ldots)$$

und nach (2. 3) gilt

$$(2.7) \qquad N_k+2M_k \leqq N_{k+1} \qquad (k=1,2,\ldots).$$

Wir werden noch beweisen, daß

$$(2.8) \qquad \log^2 M_k \leqq \lambda(N_k) \qquad (k=1,2,\ldots)$$

gilt. Im Falle $\frac{1}{32M}\bar{\lambda}(2N_k) \leqq 1$ ist $M_k=2$ nach der Definition, und so ist dann (2. 8) richtig. Ist aber $\frac{1}{32M}\bar{\lambda}(2N_k) > 1$, so ist $M_k>2$ und folglich

$$\log^2(M_k-1) < \frac{1}{32M}\bar{\lambda}(2N_k);$$

nach der Definition von N_k und auf Grund von a) und c) gilt aber

$$\log^2 M_k = \log^2(M_k-1)+(\log^2 M_k-\log^2(M_k-1)) <$$
$$< \frac{1}{32M}\bar{\lambda}(2N_k)+1 < \frac{1}{16M}\bar{\lambda}(\nu_{m_k+1}) \leqq \frac{1}{4M}\bar{\lambda}(\nu_{m_k}) \leqq \frac{1}{2M}\lambda(N_k) < \lambda(N_k).$$

Damit haben wir (2. 8) auch in diesem Falle bewiesen.

Auf Grund von (2.7) kann Hilfssatz III auf die Folgen $\{N_k\}$ und $\{M_k\}$ angewendet werden. Das so erhaltene Funktionensystem bezeichnen wir mit $\{\Phi_n(x)\}$ $(n=1,2,\ldots)$; wir werden zeigen, daß dieses System die in Satz I formulierten Eigenschaften besitzt.

Es sei N eine beliebige natürliche Zahl, etwa $N_\varkappa < N \leqq N_{\varkappa+1}$. Dann gilt nach (1.20), (2.4) und (2.8) überall in $[a,b]$

$$\int_a^b \left|\sum_{n=1}^{N} \Phi_n(x)\Phi_n(t)\right| dt \leqq \sum_{k=0}^{\varkappa-1} \int_a^b \left|\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \Phi_n(x)\Phi_n(t)\right| dt +$$

$$+\int_a^b \left|\sum_{n=N_\varkappa+1}^{N} \Phi_n(x)\Phi_n(t)\right| dt \leqq D(1+\log^2 M_1+\cdots+\log^2 M_\varkappa) \leqq$$

$$\leqq D(1+\lambda(N_1)+\cdots+\lambda(N_\varkappa)) \leqq 4D\lambda(N_\varkappa) = O(1)\lambda(N).$$

Damit haben wir die im Satze formulierte Eigenschaft (2) bewiesen.

Nun sei $\{w(n)\}$ eine positive Zahlenfolge, die die Bedingung (3) erfüllt. Mit vollständiger Induktion kann aus der Folge $\{N_k\}$ eine Teilfolge $\{N_{k_\nu}\}$ $(\nu=1,2,\ldots)$ ausgewählt werden, für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$N_{k_{\nu+1}} > N_{k_\nu}, \quad \frac{w(n)}{\lambda(n)} \leqq \frac{1}{\nu^2} \quad \text{für} \quad n > N_{k_\nu} \qquad (\nu=1,2,\ldots).$$

Wir definieren eine Folge $\{a_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ folgendermaßen. Gibt es zu n ein ν mit

$$N_{k_\nu} < n \leqq N_{k_\nu}+2M_{k_\nu}, \quad \text{so sei} \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{M_{k_\nu}}\log M_{k_\nu}} \qquad (\nu=1,2,\ldots),$$

sonst sei $a_n=0$ gesetzt. Dann ist nach (2.6)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 w(n) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=N_{k_\nu}+1}^{N_{k_\nu}+2M_{k_\nu}} a_n^2\lambda(n)\frac{w(n)}{\lambda(n)} \leqq 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}\frac{\lambda(N_{k_\nu}+2M_{k_\nu})}{\log^2 M_{k_\nu}} \leqq 64\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2} < \infty.$$

Für die Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ ist also die Reihe (4) konvergent. Es bleibt zu beweisen, daß die mit diesen Koeffizienten gebildete Orthogonalreihe (5) fast überall divergiert. Nach Hilfssatz III gibt es für $x \in F_{k_\nu}$ eine von x abhängige natürliche Zahl $m_{k_\nu}(x)\,(< M_{k_\nu})$, für die die Funktionswerte $\Phi_{N_{k_\nu}+1}(x), \ldots, \Phi_{N_{k_\nu}+M_{k_\nu}+m_{k_\nu}(x)}(x)$ gleiche Vorzeichen haben und so nach (1.19)

$$\text{(2.9)} \qquad |a_{N_{k_\nu}+1}\Phi_{N_{k_\nu}+1}(x)+\cdots+a_{N_{k_\nu}+M_{k_\nu}+m_{k_\nu}(x)}\Phi_{N_{k_\nu}+M_{k_\nu}+m_{k_\nu}(x)}(x)| \geqq C$$

gilt.

Ist $x \in \overline{\lim_{\nu\to\infty}} F_{k_\nu}$, so gilt (2. 9) mit geeigneterweise gewählten $m_{k_\nu}(x)$ für unendlich viele ν; folglich ist die Reihe (5) im Punkt x divergent. Da aber die Mengen F_{k_ν} $(\nu = 1, 2, \ldots)$ stochastisch unabhängig sind und nach (1. 18)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(F_{k_\nu}) = \infty$$

ist, so folgt mit Anwendung des zweiten Borel—Cantellischen Lemmas (siehe z. B. FELLER [1], S. 155):

$$\mu(\overline{\lim_{\nu\to\infty}} F_{k_\nu}) = b - a.$$

Also ist die orthogonale Reihe (5) in $[a, b]$ fast überall divergent.

Damit haben wir unseren Satz vollständig bewiesen.

Schriftenverzeichnis

FELLER, W., [1] *An introduction to probability theory and its applications*, vol. I (New York, 1950).

HAAR, A., [1] Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, *Math. Annalen*, **69** (1910), 331—371.

KACZMARZ, S., [1] Sur la convergence et la sommabilité des développements orthogonaux, *Studia Math.*, **1** (1929), 87—121; [2] Notes on orthogonal series. I, *ebenda*, **5** (1934), 26—28; [3] Notes on orthogonal series. II, *ebenda*, **5** (1934), 103—106.

MENCHOFF, D., [1] Sur les séries de fonctions orthogonales (Première partie), *Fundamenta Math.*, **4** (1923), 82—105; [2] Sur les multiplicateurs de convergence pour les séries de polynômes orthogonaux, *Mat. Sbornik*, **6** (48) (1939), 27—52.

RADEMACHER, H., [1] Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen*, **87** (1922), 112—138.

Талалян, А. А., [1] О сходимости ортогональных рядов, Доклады Акад. Наук СССР, **110** (1956), 511—516.

TANDORI, K., [1] Über die Cesàrosche Summierbarkeit der orthogonalen Reihen, *Acta Sci. Math.*, **14** (1951—52), 85—95; [2] Über die orthogonalen Funktionen. I, *ebenda*, **18** (1957), 57—130; [3] Über die orthogonalen Funktionen. III (Lebesguesche Funktionen), *ebenda*, **18** (1957), 169—178.

(Eingegangen am 15. September 1958)