Über die orthogonalen Funktionen. VI (Eine genaue Bedingung für die starke Summation)

Von KÁROLY TANDORI in Szeged.

Einleitung

Es sei $\{\varphi_\nu(x)\}$ $(\nu=1,2,\ldots)$ ein im Intervall $[a,b]$ orthonormiertes Funktionensystem und $\{c_\nu\}$ $(\nu=1,2,\ldots)$ eine reelle Zahlenfolge mit

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2<\infty.$$

Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x),$$

ihre n-te Partialsumme bezeichnen wir mit $s_n(x)$.

Es sei weiterhin $\{\nu_n\}$ eine Indexfolge: $(1\leqq)\nu_1<\nu_2<\cdots<\nu_n<\cdots$. Wir betrachten die Folge

$$\sigma_n(\{\nu\};x)=\frac{s_{\nu_1}(x)+\cdots+s_{\nu_n}(x)}{n} \qquad (n=1,2,\ldots).$$

In einer vorigen Mitteilung haben wir eine hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß die Folge $\{\sigma_n(\{\nu\};x)\}$ für *jede* Indexfolge $\{\nu_n\}$ fast überall konvergiert, nämlich die Bedingung $\sum_\nu c_\nu^2 \log \nu<\infty$ (TANDORI [1], Satz III). In der vorliegenden Note werden wir dieses Resultat wesentlich verschärfen. Wir werden nämlich den folgenden Satz beweisen.

Satz. *Ist*

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} c_\nu^2(\log\log\nu)^2<\infty, \tag{1}$$

so gibt es eine quadratisch integrierbare Funktion $f(x)$ derart, daß

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[s_{\nu_n}(x)-f(x)]^2\to 0$$

für jede Indexfolge $\{\nu_n\}$ in $[a,b]$ fast überall gilt.

Für die Indexfolge $\nu_n = n$ $(n=1,2,\ldots)$ hat diesen Satz BORGEN [1] bewiesen und in diesem Falle folgt dieser Satz aus den Resultaten von KACZMARZ [1] bzw. MENCHOFF [1] und ZYGMUND [1].

Wegen

$$\left|\frac{s_{\nu_1}(x)+\cdots+s_{\nu_N}(x)}{N}-f(x)\right|=\frac{|(s_{\nu_1}(x)-f(x))+\cdots+(s_{\nu_N}(x)-f(x))|}{N}\leqq$$

$$\leqq\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[s_{\nu_n}(x)-f(x)]^2}$$

ist unter der Bedingung (1) *die Folge* $\{\sigma_n(\{\nu\};x)\}$ *für jede Indexfolge* $\{\nu_n\}$ *in* $[a,b]$ *fast überall konvergent*. Für die Indexfolge $\nu_n=n$ $(n=1,2,\ldots)$ haben dieses Resultat KACZMARZ [1] und MENCHOFF [1] unabhängig voneinander bekommen.

Unsere Bedingung kann nicht mehr verfeinert werden. (Siehe z. B. KACZMARZ [1], MENCHOFF [1] und TANDORI [2].)

§ 1. Hilfssätze

Zum Beweis unseres Satzes benötigen wir einige Hilfssätze.

Hilfssatz I. *Für die Konvergenz fast überall der Folge* $\{\sigma_n(\{\nu\};x)\}$ *ist notwendig und hinreichend, daß die Folge* $\{s_{\nu_{2^n}}(x)\}$ *fast überall konvergiert*[1]).

Beweis. Wir haben bewiesen (TANDORI [1], S. 21), daß

$$s_{\nu_{2^n}}(x)-\sigma_{2^n}(\{\nu\};x)\to 0$$

fast überall gilt, was die Notwendigkeit der Bedingung bedeutet.

Um die Hinlänglichkeit der Bedingung zu beweisen, betrachten wir die folgende Abschätzung:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)\int_a^b[\sigma_{n+1}(\{\nu\};x)-\sigma_n(\{\nu\};x)]^2dx=$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{n-1}k\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\sum_{\nu=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}}c_\nu\varphi_\nu(x)+\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}}c_\nu\varphi_\nu(x)\right]^2dx=$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k^2\sum_{\nu=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}}c_\nu^2\right)\leqq$$

$$\leqq\sum_{k=1}^{\infty}k^2\sum_{\nu=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}}c_\nu^2\left(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^3}\right)\leqq 2\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu^2<\infty.$$

---

[1]) Dieser Hilfssatz ist für $\nu_n=n$ $(n=1,2,\ldots)$ bekannt (siehe KOLMOGOROFF [1] und KACZMARZ und STEINHAUS [1], S. 190).

Mit Anwendung des Satzes von LEVI ergibt sich daraus, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(\sigma_{n+1}(\{\nu\};x)-\sigma_n(\{\nu\};x))^2$$

fast überall konvergiert.

Es sei $2^m < n < 2^{m+1}$. Dann gilt auf Grund der obigen Relationen

$$|\sigma_n(\{\nu\};x)-\sigma_{2^m}(\{\nu\};x)|=\left|\sum_{k=2^m}^{n-1}(\sigma_{k+1}(\{\nu\};x)-\sigma_k(\{\nu\};x))\right|\leqq$$

$$\leqq \sum_{k=2^m}^{n-1}(k+1)(\sigma_{k+1}(\{\nu\};x)-\sigma_k(\{\nu\};x))^2\sum_{k=2^m}^{n-1}\frac{1}{k+1}\leqq$$

$$\leqq \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}}(k+1)(\sigma_{k+1}(\{\nu\};x)-\sigma_k(\{\nu\};x))^2\to 0$$

fast überall. Da die Folge $\{\sigma_{2^m}(\{\nu\};x)\}$ nach den obigen fast überall konvergiert, so folgt daraus die Behauptung.

Hilfssatz II. *Für die Konvergenz fast überall der Folge* $\{\sigma_n(\{\nu\};x)\}$ *zu einer Funktion* $f(x)$ *ist notwending und hinreichend, daß*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[s_{\nu_n}(x)-f(x)]^2\to 0$$

fast überall gilt.[2])

Beweis. Nach der Abschätzung

$$|\sigma_N(\{\nu\};x)-f(x)|=\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(s_{\nu_k}(x)-f(x))\right|\leqq\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[s_{\nu_k}(x)-f(x)]^2}$$

ist die Hinlänglichkeit der Bedingung klar.

Um die Notwendigkeit der Bedingung zu beweisen, definieren wir die Indexfolge $\{\mu_n\}$: für $2^m\leqq n<2^{m+1}$ $(m=0,1,\ldots)$ sei $\mu_n=\nu_{2^m}$. Es gilt die Abschätzung

$$(1.1)\quad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[s_{\nu_n}(x)-f(x)]^2\leqq\frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}[s_{\nu_n}(x)-s_{\mu_n}(x)]^2+\frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}[s_{\mu_n}(x)-f(x)]^2.$$

Da nach Hilfssatz I $s_{\mu_n}(x)\to f(x)$ $(n\to\infty)$ fast überall gilt, so konvergiert das zweite Glied fast überall gegen 0. Mit einfacher Rechnung bekommen wir:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_a^b[s_{\nu_n}(x)-s_{\mu_n}(x)]^2\,dx=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\frac{1}{n}(c^2_{\nu_{2^m+1}}+\cdots+c^2_{\nu_n})\leqq$$

$$\leqq\sum_{m=0}^{\infty}(c^2_{\nu_{2^m+1}}+\cdots+c^2_{\nu_{2^{m+1}}})\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\frac{1}{n}\leqq\sum_{\nu=1}^{\infty}c^2_{\nu}<\infty.$$

---

[2]) Dieser Hilfssatz ist für $\nu_n=n$ $(n=1,2,\ldots)$ bekannt (ZYGMUND [1]).

Daraus folgt auf Grund des Satzes von LEVI, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [s_{\nu_n}(x) - s_{\mu_n}(x)]^2$$

fast überall konvergiert. Mit Anwendung des Kroneckerschen Hilfssatzes (siehe z. B. ZYGMUND [2], S. 255) ergibt sich, daß

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} [s_{\nu_n}(x) - s_{\mu_n}(x)]^2 \to 0$$

fast überall gilt. Daraus folgt die Behauptung auf Grund von (1. 1).

Hilfssatz III. *Es sei* $\{f_k(x)\}$ $(k=1, \ldots, p)$ *ein im Intervall* $[a, b]$ *orthogonales Funktionensystem, es sei weiterhin*

$$a_k^2 = \int_a^b f_k^2(x)\,dx \qquad (k=1, \ldots, p).$$

Dann gibt es eine nicht-negative Funktion $\delta(x)$ *derart, daß*

$$|f_1(x) + \cdots + f_l(x)| \leqq \delta(x) \qquad (l=1, \ldots, p)$$

in $[a, b]$ *überall besteht und die Abschätzung*

$$\int_a^b \delta^2(x)\,dx \leqq M(\log(p+1))^2 \sum_{k=1}^{p} a_k^2$$

gilt, wo M *eine positive Konstante ist*[3]).

Dieser Hilfssatz ist bekannt. (Siehe z. B. KACZMARZ—STEINHAUS [1], S. 162.)

§ 2. Beweis des Satzes

Nach Sätzen von KACZMARZ [1] bzw. MENCHOFF [1] und KOLMOGOROFF [1] konvergiert unter der Bedingung (1) die Folge $\{s_{2^m}(x)\}$ fast überall gegen eine quadratisch-integrierbare Funktion $f(x)$. Es sei $m (\geqq 2)$ eine beliebige, natürliche Zahl, für die die Menge der natürlichen Zahlen n mit $2^m < \nu_{2^n} < 2^{m+1}$ nicht leer ist, sie möge aus den Zahlen n mit $n_1(m) \leqq n \leqq n_2(m)$ bestehen. Mit Anwendung des Hilfssatzes III auf die Funktionen

$$f_1(x) = s_{\nu_{2^{n_1(m)}}}(x) - s_{2^m}(x), \quad f_2(x) = s_{\nu_{2^{n_1(m)+1}}}(x) - s_{\nu_{2^{n_1(m)}}}(x), \ \ldots$$
$$\ldots, f_{n_2(m)-n_1(m)+1}(x) = s_{\nu_{2^{n_2(m)}}}(x) - s_{\nu_{2^{n_2(m)-1}}}(x)$$

---

3) In dieser Arbeit wird der Logarithmus mit der Basis 2 verwendet.

erhalten wir eine nichtnegative Funktion $\delta_m(x)$, für die im Falle $2^m < \nu_{2^n} < 2^{m+1}$

$$(2.1) \qquad |s_{\nu_{2^n}}(x) - s_{2^m}(x)| = \left| \sum_{k=1}^{n-n_1(m)+1} f_k(x) \right| \leq \delta_m(x)$$

in $[a, b]$ überall gilt und

$$\int_a^b \delta_m^2(x)dx \leq M(\log(n_2(m) - n_1(m) + 2))^2 \sum_{\nu=2^m+1}^{2^{m+1}} c_\nu^2$$

ist. Es ist klar, daß $n_2(m) - n_1(m) + 1 \leq m$ besteht und so ist

$$(\log(n_2(m) - n_1(m) + 2))^2 \sum_{\nu=2^m+1}^{2^{m+1}} c_\nu^2 \leq 2 \sum_{\nu=2^m+1}^{2^{m+1}} c_\nu^2 (\log\log\nu)^2.$$

Daraus folgt nach der Annahme, daß

$$\sum_{m=2}^{\infty} \int_a^b \delta_m^2(x)dx < \infty$$

ist, und so konvergiert die Reihe

$$\sum_{m=2}^{\infty} \delta_m^2(x)$$

fast überall. Daraus folgt nach (2. 1), daß für $2^m < \nu_{2^n} < 2^{m+1}$ und $m \to \infty$ fast überall gilt:

$$s_{\nu_{2^n}}(x) - s_{2^m}(x) \to 0.$$

Also konvergiert $s_{\nu_{2^n}}(x)$ fast überall in $[a, b]$ gegen eine Funktion $f(x)$. Nach Hilfssatz I folgt daraus $\sigma_n(\{\nu\}; x) \to f(x)$ fast überall in $[a, b]$. Mit Anwendung des Hilfssatzes II ergibt sich endlich die Behauptung.

Damit haben wir unseren Satz vollständig bewiesen.

Schriftenverzeichnis

Borgen, S., [1] Über $(C, 1)$-summierbarkeit von Reihen orthogonaler Funktionen, *Math. Annalen*, **98** (1928), 125—150.

Kaczmarz, S., [1] Über die Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Math. Zeitschrift*, **26** (1927), 99—105.

Kaczmarz, S., und Steinhaus, H., [1] *Theorie der Orthogonalreihen* (Warszawa-Lwów, 1935).

Kolmogoroff, A. N., [1] Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, *Fundamenta Math.*, **5** (1924), 96—97.

Menchoff, D., [1] Sur les séries de fonctions orthogonales (Deuxième Partie), *Fundamenta Math.*, **8** (1926), 56—108,

Tandori, K., [1] Über die orthogonalen Funktionen. IV, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 18—25.; [2] Über die orthogonalen Funktionen. II, *ibidem*, **18** (1957), 149—168.

Zygmund, A., [1] Sur l'application de la première moyenne arithmétique dans la théorie des séries de fonctions orthogonales, *Fundamenta Math.*, **10** (1927), 356—362.; [2] *Trigonometrical series* (Warszawa—Lwów, 1935).

(Eingegangen am 11. September 1958)