Über die orthogonalen Funktionen. VII (Approximationssätze)

Von KÁROLY TANDORI in Szeged

Einleitung

Es sei $\{\varphi_k(x)\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ ein im Intervall $[a, b]$ orthonormiertes, reellwertiges Funktionensystem und es sei $\{c_k\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ eine reelle Koeffizientenfolge; in folgendem werden wir immer annehmen, daß $\{c_k\} \in l^2$ ist. Wir betrachten die Orthogonalreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x). \tag{1}$$

Nach dem Riesz—Fischerschen Satz konvergieren die Partialsummen $s_n(x)$ dieser Reihe im Mittel gegen eine quadratisch-integrierbare Funktion $f(x)$, $f(x)$ ist also durch die Reihe (1) bis auf eine Nullmenge bestimmt.

Neuerdings hat J. MEDER[1]) den folgenden Satz bewiesen.

Besteht die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \log^{2-\varepsilon} k < \infty$$

mit einem ε, $0<\varepsilon<1$, *so gilt*

$$\sigma_n(x)-f(x)=o\left(\frac{1}{\sqrt{\log^{1-\varepsilon} n}}\right)$$

fast überall, wo $\sigma_n(x)$ *die n-te* $(C, 1)$*-Mittel der Reihe* (1) *bezeichnet.*

In dieser Note werden wir dieses Resultat verallgemeinern. Zuerst verabreden wir die folgende Bezeichnung: ist $\{f_n(x)\}$ eine in $[a, b]$ definierte Funktionenfolge und $\{\lambda(n)\}$ eine positive Zahlenfolge, so soll

$$„\text{fast überall } f_n(x)=\bar{o}\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right)“$$

---

1) J. MEDER, On the estimation of Cesàro means of orthonormal series, *Annales Polonici Mathematici*, 4 (1957—58), 183—200.

bedeuten, daß a) fast überall $\lambda(n)f_n(x)\to 0$ gilt und b) eine positive, von der Folge $\{f_n(x)\}$ abhängige Funktion $F(x)\in L^2[a,b]$ existiert, für die $\lambda(n)|f_n(x)|\leqq \leqq F(x)$ $(n=1,2,\dots; a\leqq x\leqq b)$ gilt.

Mit dieser Bezeichnung können unsere Sätze folgenderweise ausgesprochen werden:

Satz I. *Es sei* $\{\lambda(n)\}$ *eine positive, monoton gegen Unendlich wachsende Zahlenfolge. Ist*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 (\log k)^2 \lambda^2(k) < \infty, \tag{2}$$

so gilt fast überall

$$s_n(x)-f(x)=\bar{o}\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right).$$

Satz II. *Es sei* $\{\lambda(n)\}$ *eine positive, monoton gegen Unendlich wachsende Zahlenfolge, für die die Bedingung*

$$\lambda(n^2)\leqq c\lambda(n) \qquad (n=1,2,\dots) \tag{3}$$

erfüllt wird, wo c eine positive Konstante ist. Ist

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_k^2 (\log\log k)^2 \lambda^2(k) < \infty, \tag{4}$$

so gilt fast überall

$$\sigma_n(x)-f(x)=\bar{o}\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right)$$

Es ist klar, daß Satz II den Satz von J. MEDER enthält.

§ 1. Beweis von Satz I

Aus (2) folgt nach einem bekannten Satz (s. z. B. G. H. HARDY—J. E. LITTLEWOOD—G. PÓLYA, *Inequalities* (Cambridge, 1934), 120—121), daß eine positive, monoton gegen Unendlich wachsende Zahlenfolge $\{\mu(n)\}$ gibt, für die die Bedingungen

$$\lambda(n)=o(\mu(n)), \tag{1.1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 (\log k)^2 \mu^2(k) < \infty$$

erfüllt sind. Die n-te Partiellensumme der Orthogonalreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \mu(k)\varphi_k(x) \tag{1.2}$$

bezeichnen wir mit $s_n^*(x)$. Nach dem Satz von D. MENCHOFF und H. RADE-

MACHER konvergiert die Reihe (1. 2) fast überall und es gibt eine quadratisch-integrierbare Funktion $G(x)$ derart, daß

(1. 3) $$|s_n^*(x)| \leqq G(x) \qquad (n=1,2,\dots)$$

im Grundintervall fast überall gilt (s. z. B. S. KACZMARZ—H. STEINHAUS, *Theorie der Orthogonalreihen* (Warszawa—Lwów, 1935), 161—164).

Auf Grund von (2), mit Anwendung des erwähnten Satzes von D. MENCHOFF und H. RADEMACHER, ergibt sich:

$$s_n(x)-f(x) = -\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k\varphi_k(x) = -\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{\mu(k)} c_k\mu(k)\varphi_k(x) =$$

$$= -\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\mu(k)}-\frac{1}{\mu(k+1)}\right)s_k^*(x)+\frac{1}{\mu(n+1)}s_n^*(x),$$

und so ist nach (1. 3)

$$|s_n(x)-f(x)| \leqq 2G(x)\frac{1}{\mu(n)},$$

woraus, auf Grund von (1. 1), die Behauptung folgt.

§ 2. Beweis von Satz II

Zum Beweis von Satz II benötigen wir den folgenden

Hilfssatz. *Es sei $\{h_l(x)\}$ $(l=1,\dots,p;\ p\geqq 2)$ ein im Intervall $[a,b]$ orthogonales Funktionensystem und sei*

$$\int_a^b h_l^2(x)dx = a_l^2 \quad (l=1,\dots,p).$$

Dann gibt es eine Funktion $\delta(x)$, die die folgende Eigenschaften hat:

$$|h_1(x)+\dots+h_l(x)| \leqq \delta(x) \qquad (l=1,\dots,p;\ a\leqq x\leqq b)$$

und

$$\int_a^b \delta^2(x)dx \leqq A\log^2 p\sum_{l=1}^{p} a_l^2,$$

dabei ist A eine absolute Konstante.

Dieser Hilfssatz ist bekannt. (Siehe z. B. S. KACZMARZ—H. STEINHAUS, *Theorie der Orthogonalreihen* (Warszawa—Lwów, 1935), S. 162.)

Da nach (4)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^2(2^{2^n})\int_a^b[s_{2^{2^n}}(x)-f(x)]^2dx = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^2(2^{2^n})\sum_{k=2^{2^n}+1}^{\infty}c_k^2 =$$

$$=\sum_{k=3}^{\infty}c_k^2\sum_{2^{2^n}<k}\lambda^2(2^{2^n}) = \sum_{k=2}^{\infty}c_k^2(\log\log k)^2\lambda^2(k)<\infty$$

gilt, konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^2(2^{2^n})\,[s_{2^{2^n}}(x)-f(x)]^2$$

fast überall und so ist fast überall

$$s_{2^{2^n}}(x)-f(x)=\bar{o}\left(\frac{1}{\lambda(2^{2^n})}\right). \tag{2.1}$$

Mit Anwendung des Hilfssatzes auf die Funktionen $s_{2^n}(x)-s_{2^{n-1}}(x)$ $(n=2^m+1, 2^m+2, \dots, 2^{m+1})$ bekommen wir, daß eine Funktion $\bar{\delta}_m(x)$ existiert, für die die Ungleichungen

$$|s_{2^n}(x)-s_{2^{2^m}}(x)|\leqq \delta_m(x) \qquad (2^m<n\leqq 2^{m+1}), \tag{2.2}$$

$$\int_a^b \bar{\delta}_m^2(x)\,dx\leqq Am^2 \sum_{k=2^{2^m}+1}^{2^{2^{m+1}}} c_k^2 \tag{2.3}$$

erfüllt sind; dies gilt für jede natürliche Zahl m.

Da nach (2.3) und (4)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^2(2^{2^m})\int_a^b \bar{\delta}_m^2(x)\,dx\leqq A\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^2(2^{2^m})\,m^2 \sum_{k=2^{2^m}+1}^{2^{2^{m+1}}} c_k^2\leqq$$

$$\leqq \sum_{k=2}^{\infty} c_k^2(\log\log k)^2\lambda^2(k)<\infty$$

gilt, konvergiert die Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^2(2^{2^m})\bar{\delta}_m^2(x)$$

fast überall, also gilt

$$\bar{\delta}_m(x)=\bar{o}\left(\frac{1}{\lambda(2^{2^m})}\right)$$

fast überall. Zu jeder natürlichen Zahl n $(n>3)$ bestimmen wir die natürliche Zahl m so, daß $2^m<n\leqq 2^{m+1}$ gilt. Auf Grund von (3), (2.1) und (2.2) ergibt sich dann, daß

$$s_{2^n}(x)-f(x)=s_{2^n}(x)-s_{2^{2^m}}(x)+s_{2^{2^m}}(x)-f(x)=\bar{o}\left(\frac{1}{\lambda(2^n)}\right) \tag{2.4}$$

fast überall besteht.

Mit einfacher Rechnung ergibt sich die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^2(2^n)\int_a^b [s_{2^n}(x)-\sigma_{2^n}(x)]^2\,dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^2(2^n)\sum_{k=1}^{2^n}\frac{k^2}{4^n}c_k^2=\\ &=\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2k^2\sum_{2^n\geqq k}\frac{\lambda^2(2^n)}{4^n}=\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2k^2\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{\lambda^2(2^n)}{4^n},\end{aligned} \tag{2.5}$$

wo $n_0 = n_0(k)$ jene nichtnegative ganze Zahl ist, für die $2^{n_0-1} < k \leqq 2^{n_0}$ besteht. Ist $2^{m_0-1} \leqq n_0 < 2^{m_0}$, so gilt nach (3)

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\lambda^2(2^n)}{4^n} = \sum_{n=n_0}^{2^{m_0}-1} \frac{\lambda^2(2^n)}{4^n} + \sum_{\nu=m_0}^{\infty} \sum_{n=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} \frac{\lambda^2(2^n)}{4^n} \leqq$$

$$\leqq \frac{\lambda^2(2^{2^{m_0}})}{4^{n_0}} \sum_{n=n_0}^{2^{m_0}-1} \frac{1}{4^{n-n_0}} + \sum_{\nu=m_0}^{\infty} \lambda^2(2^{2^{\nu+1}}) \sum_{n=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} \frac{1}{4^n} \leqq$$

$$\leqq \frac{4}{3} c \frac{\lambda^2(k)}{k^2} + c\lambda^2(k) \sum_{\nu=m_0}^{\infty} \frac{c^{\nu-m_0}}{4^{2^\nu}} \sum_{n=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} \frac{1}{4^{n-2^\nu}} \leqq$$

$$\leqq \frac{4}{3} c \left(\frac{\lambda^2(k)}{k^2} + \frac{\lambda^2(k)}{k^2} \sum_{\nu=m_0}^{\infty} \frac{c^{\nu-m_0}}{4^{2^\nu-2^{m_0}}} \right) \leqq M \frac{\lambda^2(k)}{k^2},$$

wo M eine positive, von k unabhängige Konstante bedeutet. Nach (2.5) und (4) folgt die Abschätzung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^2(2^n) \int_a^b [s_{2^n}(x) - \sigma_{2^n}(x)]^2 dx \leqq \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \lambda^2(k) < \infty .$$

Daraus ergibt sich, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^2(2^n) [s_{2^n}(x) - \sigma_{2^n}(x)]^2$$

fast überall konvergiert; also fast überall

$$s_{2^n}(x) - \sigma_{2^n}(x) = \bar{o}\left(\frac{1}{\lambda(2^n)} \right)$$

gilt. Nach (2.4) ergibt sich

$$\sigma_{2^n}(x) - f(x) = \sigma_{2^n}(x) - s_{2^n}(x) + s_{2^n}(x) - f(x) = \bar{o}\left(\frac{1}{\lambda(2^n)} \right) \tag{2.6}$$

fast überall.

Mit einfacher Rechnung ergibt sich endlich

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \lambda^2(n) n \int_a^b [\sigma_n(x) - \sigma_{n-1}(x)]^2 dx &= \sum_{n=2}^{\infty} \lambda^2(n) n \left[\frac{1}{n^2(n-1)^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 c_k^2 + \frac{1}{n^2} c_n^2 \right] \leqq \\ &\leqq 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^2(n)}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 c_k^2 = 4 \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 k^2 \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^2(n)}{n^3} . \end{aligned} \tag{2.7}$$

Für $k \geqq 2$ sei $m_0 = m_0(k)$ jene ganze Zahl, für die $2^{2^{m_0-1}} \leqq k < 2^{2^{m_0}}$ gilt. Dann ist nach (3)

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^2(n)}{n^3}=\sum_{n=k}^{2^{2^{m_0}}-1}\frac{\lambda^2(n)}{n^3}+\sum_{\nu=m_0}^{\infty}\sum_{n=2^{2^\nu}}^{2^{2^{\nu+1}}-1}\frac{\lambda^2(n)}{n^3}\leqq$$

$$\leqq 4c\frac{\lambda^2(k)}{k^2}+c\sum_{\nu=m_0}^{\infty}\lambda^2(2^{2^\nu})\sum_{n=2^{2^\nu}}^{2^{2^{\nu+1}}-1}\frac{1}{n^3}\leqq 4c\left[\frac{\lambda^2(k)}{k^2}+\lambda^2(k)\sum_{\nu=m_0}^{\infty}\frac{c^{\nu-m_0}}{(2^{2^\nu})^2}\right]\leqq$$

$$\leqq 4c\left[\frac{\lambda^2(k)}{k^2}+\frac{\lambda^2(k)}{k^2}\sum_{\nu=m_0}^{\infty}\frac{c^{\nu-m_0}}{4^{2^\nu-2^{m_0}}}\right]\leqq \bar{M}\frac{\lambda^2(k)}{k^2},$$

wo $\bar{M}$ eine von k unabhängige, positive Konstante ist; $\bar{M}$ kann so gewählt werden, daß diese Abschätzung für jedes $k(\geqq 1)$ gilt. Aus (2.7), nach (4) folgt dann die Abschätzung

$$\sum_{n=2}^{\infty}\lambda^2(n)n\int_a^b[\sigma_n(x)-\sigma_{n-1}(x)]^2dx\leqq \bar{M}\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2\lambda^2(k)<\infty.$$

Daraus folgt, daß die Reihe fast überall konvergiert und so gilt

$$\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}}\lambda^2(k)k[\sigma_k(x)-\sigma_{k-1}(x)]^2=\bar{o}(1) \tag{2.8}$$

fast überall.

Es sei $2^m<n<2^{m+1}$. Dann ist nach (2.8)

$$|\sigma_n(x)-\sigma_{2^m}(x)|=\left|\sum_{k=2^m+1}^{n}(\sigma_k(x)-\sigma_{k-1}(x))\right|=$$

$$=\left|\sum_{k=2^m+1}^{n}\lambda(k)\sqrt{k}(\sigma_k(x)-\sigma_{k-1}(x))\frac{1}{\lambda(k)\sqrt{k}}\right|\leqq$$

$$\leqq\left\{\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}}\lambda^2(k)k[\sigma_k(x)-\sigma_{k-1}(x)]^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}}\frac{1}{k}\right\}^{1/2}\frac{1}{\lambda(2^m)}=\bar{o}\left(\frac{1}{\lambda(2^m)}\right)$$

fast überall und so folgt nach (3) im Falle $2^m<n<2^{m+1}$

$$\sigma_n(x)-\sigma_{2^m}(x)=\bar{o}\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right)$$

fast überall.

Nach (2.6) ergibt sich endlich, daß die Relation

$$\sigma_n(x)-f(x)=\sigma_n(x)-\sigma_{2^m}(x)+\sigma_{2^m}(x)-f(x)=\bar{o}\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right)$$

fast überall gilt.

Damit haben wir Satz II vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 14. Oktober 1958)