Bemerkung zur Divergenz der trigonometrischen Reihen

Von KÁROLY TANDORI in Szeged

Einleitung

S. B. STECKIN hat den folgenden Satz bewiesen[1]):

Satz. *Es sei* $\{\varrho_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ *eine positive, monoton nichtwachsende Zahlenfolge, die die Bedingung*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n^2 = \infty \tag{1}$$

erfüllt. Dann kann eine reelle Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ *derart angegeben werden, daß die trigonometrische Reihen*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n \cos n(x-\lambda_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n \sin n(x-\lambda_n)$$

überall divergieren.

Dieser Satz ist eine Verschärfung eines Satzes von NEDER[2]), der nur behauptet, daß unter den obigen Bedingungen eine reelle Zahlenfolge $\{\alpha_n\}$ existiert, für die die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n e^{i\alpha_n} z^n$$

am Rande des Einheitskreises überall divergiert.

In dieser Note werden wir für den Satz einen einfacheren Beweis mitteilen.

---

[1]) С. Б. Стечкин, О тригонометрических рядах, расходящихся в каждой точке, Известия Акад. Наук СССР, 21 (1957), 711—728.

[2]) L. NEDER, Zur Theorie der trigonometrischen Reihen, *Math. Annalen*, 84 (1921), 117—136.

§ 1. Hilfssätze

Zum Beweis benötigen wir einige Hilfssätze.

Hilfssatz I. *Es seien n und N natürliche Zahlen mit*

(1.1) $$2^9 n \leqq N.$$

Dann können reelle Zahlen $\mu_k = \mu_k(n, N)$ $(N+1 \leqq k \leqq N+16n)$ derart angegeben werden, daß die trigonometrischen Polynome

$$P(n, N; x) = \sum_{k=N+1}^{N+16n} \cos k(x-\mu_k), \quad \tilde{P}(n, N; x) = \sum_{k=N+1}^{N+16n} \sin k(x-\mu_k)$$

folgende Eigenschaft haben: zu jedem Punkt x des Intervalls $\left[0, \frac{\pi}{2^9 n}\right]$ gibt es natürliche Zahlen $p_1(x)$, $p_2(x)$, $q_1(x)$, $q_2(x)$ $(N+1 \leqq p_1(x) < p_2(x) \leqq N+16n$, $N+1 \leqq q_1(x) < q_2(x) \leqq N+16n)$ derart, daß im Punkte x die Funktionen $\cos k(x-\mu_k)$ für $p_1(x) \leqq k \leqq p_2(x)$, bzw. die Funktionen $\sin k(x-\mu_k)$ für $q_1(x) \leqq k \leqq q_2(x)$ gleiche Vorzeichen haben und die Abschätzungen

$$\left|\sum_{k=p_1(x)}^{p_2(x)} \cos k(x-\mu_k)\right| \geqq \frac{n}{2}, \quad \left|\sum_{k=q_1(x)}^{q_2(x)} \sin k(x-\mu_k)\right| \geqq \frac{n}{2}$$

gelten.

Beweis von Hilfssatz I. Es sei a eine natürliche Zahl mit

(1.2) $$a \geqq n, \ 2^5 a < N.$$

Wir betrachten die trigonometrischen Polynome

$$T(n, N+a; x) =$$
$$= 2\left(\frac{1}{2} + \cos x + \cdots + \cos(n-1)x\right)\cos(N+a)x + \cos(N+a+n)x =$$
$$= \sum_{\nu=N+a-n+1}^{N+a+n} \cos \nu x,$$

$$\tilde{T}(n, N+a; x) =$$
$$= 2\left(\frac{1}{2} + \cos x + \cdots + \cos(n-1)x\right)\sin(N+a)x + \sin(N+a+n)x =$$
$$= \sum_{\nu=N+a-n+1}^{N+a+n} \sin \nu x.$$

Für $|x| \leqq \frac{\pi}{4n}$ ist $\cos kx \geqq \frac{1}{2}$ $(1 \leqq k \leqq n-1)$, also gilt

(1.3) $$2\left(\frac{1}{2} + \cos x + \cdots + \cos(n-1)x\right) \geqq n$$

für $|x| \leqq \frac{\pi}{4n}$. Ferner ist

(1.4) $$|\cos(N+a)x| \geqq \frac{1}{2}$$

für $x \in \left[\frac{k\pi}{N+a} - \frac{\pi}{4(N+a)}, \frac{k\pi}{N+a} + \frac{\pi}{4(N+a)}\right]$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$. Nach (1.2) ist $N+a \leqq 2N$ und so gilt (1.4) auch für $x \in I(k,a) = \left[\frac{k\pi}{N+a} - \frac{\pi}{8N}, \frac{k\pi}{N+a} + \frac{\pi}{8N}\right]$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$. Es sei $I(k) = \left[\frac{k\pi}{N} - \frac{\pi}{16N}, \frac{k\pi}{N} + \frac{\pi}{16N}\right]$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$. Ist $|k| \leqq \frac{N}{16a}$, so gilt

$$\left|\frac{k\pi}{N} - \frac{k\pi}{N+a}\right| = \frac{a\pi}{N(N+a)}|k| < \frac{\pi}{16N}.$$

Nach der Definition der Intervalle $I(k,a)$ und $I(k)$ ist also $I(k) \subseteqq I(k,a)$ für $|k| \leqq \frac{N}{16a}$. Ist $x \in I(k)$ $\left(|k| \leqq \frac{N}{16a}\right)$, so gilt (1.4); nach (1.2) hat man

$$|x| \leqq \frac{|k|\pi}{N} + \frac{\pi}{16N} \leqq \frac{\pi}{16a} + \frac{\pi}{16N} < \frac{\pi}{8n}$$

und so gilt in diesem Falle auch (1.3). Also ist

(1.5) $$\begin{aligned} &|T(n, N+a; x) - \cos(N+a+n)x| = \\ &= \left|\sum_{\nu=N+a-n+1}^{N+a+n-1} \cos \nu x\right| \geqq \frac{n}{2} \quad \text{für} \quad x \in I(k) \quad \left(|k| \leqq \frac{N}{16a}\right). \end{aligned}$$

Ähnlicherweise ist

(1.6) $$|\sin(N+a)x| \geqq \frac{1}{2}$$

für $x \in J(k,a) = \left[\frac{(2k+1)\pi}{2(N+a)} - \frac{\pi}{8N}, \frac{(2k+1)\pi}{2(N+a)} + \frac{\pi}{8N}\right]$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$. Es sei $J(k) = \left[\frac{(2k+1)\pi}{2N} - \frac{\pi}{16N}, \frac{(2k+1)\pi}{2N} + \frac{\pi}{16N}\right]$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$. Ist $|k| \leqq \frac{N}{16a} - 1$ $(\geqq 1)$, so gilt

$$\left|\frac{(2k+1)\pi}{2N} - \frac{(2k+1)\pi}{2(N+a)}\right| \leqq \frac{a\pi}{2N(N+a)}(2|k|+1) \leqq \frac{a\pi}{2N(N+a)} \frac{N}{8a} < \frac{\pi}{16N}.$$

Nach der Definition der Intervalle $J(k,a)$ und $J(k)$ ist also $J(k) \subseteqq J(k,a)$

für $|k| \leqq \frac{N}{16a} - 1$. Ist $x \in J(k)$ $\left(|k| \leqq \frac{N}{16a} - 1\right)$, so gilt (1.6); nach (1.2) hat man

$$|x| \leqq \frac{(2|k|+1)\pi}{2N} + \frac{\pi}{16N} \leqq \frac{\pi}{16a} + \frac{\pi}{16N} < \frac{\pi}{8n}$$

und so gilt in diesem Falle auch (1.3). Also ist

$$|\tilde{T}(n, N+a; x) - \sin(N+a+n)x| =$$

$$(1.7) \qquad = \left| \sum_{\nu=N+a-n+1}^{N+a+n-1} \sin \nu x \right| \geqq \frac{n}{2} \quad \text{für} \quad x \in J(k) \quad \left(|k| \leqq \frac{N}{16a} - 1\right).$$

Wir betrachten die trigonometrischen Polynome

$$T\left(n, N+(2l+1)n; x - \frac{(2l+1)\pi}{16N}\right) \qquad (l=0, 1, \dots, 7).$$

Nach (1.1), (1.2), (1.5) und (1.7) ergibt sich

$$\left| T\left(n, N+(2l+1)n; x - \frac{(2l+1)\pi}{16N}\right) - \right.$$

$$\left. - \cos(N+2(l+1)n)\left(x - \frac{(2l+1)\pi}{16N}\right) \right| \geqq \frac{n}{2}$$

$$\text{für} \quad x \in I(k) + \frac{(2l+1)\pi}{16N} \quad \left(0 \leqq k \leqq \frac{N}{2^8 n}\right),$$

$$\left| \tilde{T}\left(n, N+(2l+1)n; x - \frac{(2l+1)\pi}{16N}\right) - \right.$$

$$\left. - \sin(N+2(l+1)n)\left(x - \frac{(2l+1)\pi}{16N}\right) \right| \geqq \frac{n}{2}$$

$$\text{für} \quad x \in J(k) + \frac{(2l+1)\pi}{16N} \quad \left(-1 \leqq k \leqq \frac{N}{2^8 n} - 1\right).$$ [4]

Da nach der Definition von $I(k)$ und $J(k)$

$$\bigcup_{l=0}^{7} \bigcup_{k=0}^{\left[\frac{N}{2^8 n}\right]} \left(I(k) + \frac{(2l+1)\pi}{16N}\right) \supseteqq \left[0, \left[\frac{N}{2^8 n}\right] \frac{\pi}{N}\right],$$

$$\bigcup_{l=0}^{7} \bigcup_{k=-1}^{\left[\frac{N}{2^8 n}\right]-1} \left(J(k) + \frac{(2l+1)\pi}{16N}\right) \supseteqq \left[0, \left[\frac{N}{2^8 n}\right] \frac{\pi}{N}\right]$$ [5]

---

[4] Für $I=[u, v]$ bezeichnet $I+a$ das Intervall $[u+a, v+a]$.

[5] $[\alpha]$ bezeichnet den ganzen Teil von α.

ist und nach (1. 1) $\left[\frac{N}{2^8 n}\right] \geqq \frac{N}{2^9 n}$ gilt, so ist es klar, daß die durch die Identität

$$P(n, N; x) \equiv \sum_{l=0}^{7} T\left(n, N+(2l+1)n; x - \frac{(2l+1)\pi}{16N}\right) \equiv \sum_{k=N+1}^{N+16n} \cos k(x-\mu_k)$$

bestimmten μ_k ($|\mu_k| < 2\pi$, $N+1 \leqq k \leqq N+16n$) die Bedingungen des Hilfssatzes erfüllen.

Damit haben wir Hilfssatz I vollständig bewiesen.

Hilfssatz II. *Es seien c und m natürliche Zahlen mit*

$$c \leqq 2^{m-9}. \tag{1.8}$$

Dann können die reellen Zahlen $\nu_k = \nu_k(c, m)$ $(4^m+1 \leqq k \leqq 4^{m+1})$ derart angegeben werden, daß die trigonometrischen Polynome

$$S_m(c; x) = \sum_{k=4^m+1}^{4^{m+1}} \cos k(x-\nu_k), \quad \tilde{S}_m(c; x) = \sum_{k=4^m+1}^{4^{m+1}} \sin k(x-\nu_k)$$

die folgende Eigenschaft haben: zu jedem Punkt x des Intervalls $\left[0, \frac{\pi}{2^{14}c^2}\right]$ existieren natürliche Zahlen $r_1(x), r_2(x), s_1(x), s_2(x)$ $(4^m+1 \leqq r_1(x) < r_2(x) \leqq 4^{m+1}$, $4^m+1 \leqq s_1(x) < s_2(x) \leqq 4^{m+1})$ derart, daß im Punkte x die Funktionen $\cos k(x-\nu_k)$ für $r_1(x) \leqq k \leqq r_2(x)$, bzw. die Funktionen $\sin k(x-\nu_k)$ für $s_1(x) \leqq k \leqq s_2(x)$ gleiche Vorzeichen haben und die Ungleichungen

$$\left|\sum_{k=r_1(x)}^{r_2(x)} \cos k(x-\nu_k)\right| \geqq \frac{c2^m}{2}, \quad \left|\sum_{k=s_1(x)}^{s_2(x)} \sin k(x-\nu_k)\right| \geqq \frac{c2^m}{2}$$

bestehen.

Beweis von Hilfssatz II. Wir wenden Hilfssatz I mit $n = c2^m$, $N = 4^m + 16lc2^m$ $\left(0 \leqq l \leqq \left[\frac{2^m}{2^4 c}\right] - 1\right)$ an. Nach (1.8) ist die Bedingung (1. 1) in diesen Fällen erfüllt. So bekommen wir die trigonometrischen Polynome

$$P(c2^m, 4^m+16lc2^m; x) = \sum_{k=4^m+16lc2^m+1}^{4^m+16(l+1)c2^m} \cos k(x-\mu_k(c2^m, 4^m+16lc2^m)).$$

Wir betrachten die folgende Summe

$$S_m(c, x) = \sum_{l=0}^{\left[\frac{2^m}{2^4c}\right]-1} P\left(c2^m, 4^m+16lc2^m; x - \frac{l\pi}{2^9 c 2^m}\right) + \sum_{k=4^m+16\left[\frac{2^m}{2^4c}\right]c2^m+1}^{4^{m+1}} \cos kx;$$

da $4^m + 16\left[\frac{2^m}{2^4c}\right]c2^m \leqq 4^m + 16\frac{2^m}{2^4c}c2^m < 4^{m+1}$ gilt, ist diese Definition richtig. Die Zahlen ν_k ($|\nu_k|<2\pi$, $4^m+1\leqq k\leqq 4^{m+1}$) definieren wir durch die Identität

$$S_m(c;x)\equiv\sum_{k=4^m+1}^{4^{m+1}}\cos k(x-\nu_k).$$

Auf Grund von Hilfssatz I ist es klar, daß für die Punkte x der Intervalle $I_l=\left[\frac{l\pi}{2^9c2^m},\frac{(l+1)\pi}{2^9c2^m}\right]$ natürliche Zahlen $r_1(x)$, $r_2(x)$, $s_1(x)$, $s_2(x)$ angegeben werden können, für die die Bedingungen des Hilfssatzes II erfüllt sind. Es gilt aber nach (1.8)

(1.8) $$\bigcup_l I_l=\left[0,\left[\frac{2^m}{2^4c}\right]\frac{\pi}{2^9c2^m}\right]\supseteqq\left[0,\frac{\pi}{2^{14}c^2}\right].$$

Damit haben wir Hilfssatz II vollständig bewiesen.

§ 2. Beweis von Satz I

Aus (1) folgt

(2.1) $$\sum_{m=0}^{\infty}4^m\varrho_{4^m+1}^2=\infty.$$

Es seien $(9\leqq)m_1<m_2<\cdots<m_n<\cdots$ alle diejenigen Indizes m, für die

(2.2) $$\varrho_{4^m+1}\geqq 2^9 4^{-m}$$

gilt. Aus (2.1) folgt

(2.3) $$\sum_{n=1}^{\infty}4^{m_n}\varrho_{4^{m_n}+1}^2=\infty.$$

Es sei

$$c_n=\begin{cases}1 & \text{für}\quad 2^{m_n}\varrho_{4^{m_n}+1}\geqq\frac{1}{2},\\ \left[\frac{1}{2^{m_n}\varrho_{4^{m_n}+1}}\right] & \text{für}\quad 2^{m_n}\varrho_{4^{m_n}+1}<\frac{1}{2}\end{cases}\qquad (n=1,2,\ldots).$$

Aus (2.3) folgt leicht:

(2.4) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n^2}=\infty.$$

Nach (2.2) erfüllen die Zahlen c_n, m_n $(n=1,2,\ldots)$ die Bedingung (1.8), also können wir Hilfssatz II anwenden und so bekommen wir die trigonometrischen Polynome

$$\begin{aligned} S_{m_n}(c_n; x) &= \sum_{k=4^{m_n}+1}^{4^{m_n+1}} \cos k(x - \nu_k(c_n, m_n)), \\ \tilde{S}_{m_n}(c_n; x) &= \sum_{k=4^{m_n}+1}^{4^{m_n+1}} \sin k(x - \nu_k(c_n, m_n)) \end{aligned} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Es sei n eine beliebige natürliche Zahl. Auf Grund von Hilfssatz II existieren für $x \in \left[0, \frac{\pi}{2^{14} c_n^2}\right]$ solche natürliche Zahlen $r_1(n; x)$, $r_2(n; x)$, $s_1(n; x)$, $s_2(n; x)$ $(4^{m_n} + 1 \leqq r_1(n; x) < r_2(n; x) \leqq 4^{m_n+1},\ 4^{m_n} + 1 \leqq s_1(n; x) < s_2(n; x) \leqq 4^{m_n+1})$, daß im Punkte x die Funktionen $\cos k(x - \nu_k(c_n, m_n))$ für $r_1(n; x) \leqq k \leqq r_2(n; x)$, bzw. die Funktionen $\sin k(x - \nu_k(c_n, m_n))$ für $s_1(n; x) \leqq k \leqq s_2(n; x)$ gleiche Vorzeichen haben und die Abschätzungen

$$\text{(2.5)} \quad \begin{aligned} \left| \sum_{k=r_1(n;x)}^{r_2(n;x)} \cos k(x - \nu_k(c_n, m_n)) \right| &\geqq \frac{c_n 2^{m_n}}{2}, \\ \left| \sum_{k=s_1(n;x)}^{s_2(n;x)} \sin k(x - \nu_k(c_n, m_n)) \right| &\geqq \frac{c_n 2^{m_n}}{2} \end{aligned}$$

gelten. Nach der Definition von c_n folgt aber leicht:

$$\text{(2.6)} \qquad \varrho_{4^{m_n+1}} \frac{c_n 2^{m_n}}{2} \geqq \frac{1}{4} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Nach (2.5) und (2.6) ergibt es sich für $x \in \left[0, \frac{\pi}{2^{14} c_n^2}\right]$:

$$\text{(2.7)} \quad \begin{aligned} \left| \sum_{k=r_1(n;x)}^{r_2(n;x)} \varrho_k \cos k(x - \nu_k(c_n, m_n)) \right| &\geqq \frac{1}{4}, \\ \left| \sum_{h=s_1(n;x)}^{s_2(n;x)} \varrho_k \sin k(x - \nu_k(c_n, m_n)) \right| &\geqq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Es sei

$$\sigma_{n+1} = \frac{\pi}{2^{14}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k^2} \quad (n = 1, 2, \ldots), \qquad \sigma_1 = 0.$$

Es sei weiterhin $\lambda_k = \nu_k(c_n, m_n) + \sigma_n$ für $4^{m_n} + 1 \leqq k \leqq 4^{m_n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und es sei $\lambda_k = 0$ sonst. Wir nehmen die trigonometrischen Summen

$$\begin{aligned} Q_m(x) &= \sum_{k=4^m+1}^{4^{m+1}} \varrho_k \cos k(x - \lambda_k), \\ \tilde{Q}_m(x) &= \sum_{k=4^m+1}^{4^{m+1}} \varrho_k \sin k(x - \lambda_k) \end{aligned} \qquad (m = 0, 1, \ldots).$$

Nach der Definition von λ_k ist

$$Q_m(x) = \sum_{k=4^{m_n}+1}^{4^{m_n+1}} \varrho_k \cos k(x - \nu_k(c_n, m_n) - \sigma_n) \quad \text{für} \quad m = m_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

und für jedes $x \in [\sigma_n, \sigma_{n+1}]$ existieren nach (2.7) Partialsummen von $Q_{m_n}(x)$ und $\tilde{Q}_{m_n}(x)$, die im Absolutbetrag nicht kleiner als $\frac{1}{4}$ sind. Nach (2.4) ergibt es sich, daß die Folge $\{\lambda_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ die Bedingungen des Satzes erfüllt, d. h. die trigonometrischen Reihen

$$\varrho_1 \cos x + \sum_{m=0}^{\infty} Q_m(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k \cos k(x - \lambda_k),$$

$$\varrho_1 \sin x + \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{Q}_m(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k \sin k(x - \lambda_k)$$

überall divergieren.

Damit haben wir den Satz vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 13. September 1958)