Über Parallelmengen nichtkonvexer ebener Bereiche

Von BÉLA SZ.-NAGY in Szeged

1. Einleitung

Die klassischen Formeln von J. STEINER

$$A(t)=A(0)+L(0)t+\pi t^2, \quad L(t)=L(0)+2\pi t,$$

über den Inhalt und die Randlänge der äußeren Parallelbereiche konvexer ebener Bereiche im Abstand $t>0$ wurden neuerdings von H. HADWIGER[1]) auf den Fall der äußeren und der inneren Parallelbereiche solcher, nicht notwendigerweise zusammenhängender, beschränkter ebener Bereiche ausgedehnt, die „unterkonvex" vom Grade α bzw. „überkonvex" vom Grade β sind. Ist der Bereich durch n Randkurven von außen und durch m Randkurven von innen begrenzt, so gelten nach HADWIGER die Formeln

$$A(t)=A(0)+L(0)t+\pi(n-m)t^2, \quad L(t)=L(0)+2\pi(n-m)t$$

für den äußeren Parallelbereich im Abstand t $(0\leqq t\leqq\alpha)$ und

$$A(-t)=A(0)-L(0)t+\pi(n-m)t^2, \quad L(-t)=L(0)-2\pi(n-m)t$$

für den inneren Parallelbereich im Abstand t $(0\leqq t\leqq\beta)$.

In seinen Untersuchungen über gewisse Variationsprobleme für ebene Bereiche benötigte E. MAKAI Abschätzungen für die Randlänge der Parallelbereiche, die ohne Beschränkungen in bezug auf t gelten[2]). Er hat die folgenden Ungleichungen gefunden: a) für die äußeren Parallelbereiche eines zusammenhängenden beschränkten Bereichs:

$$L(t)\leqq L(0)+2\pi t \qquad (t\geqq 0),$$

b) für die inneren Parallelbereiche eines $m+1$-fach zusammenhängenden beschränkten Bereichs $(m\geqq 0)$:

$$L(-t)\leqq L(0)+2\pi(m-1)t \qquad (t\geqq 0).$$

---

[1]) H. HADWIGER, Die erweiterten Steinerschen Formeln für ebene und sphärische Bereiche, *Commentarii Math. Helvetici*, **18** (1945/46), 59—75.

[2]) E. MAKAI, Bounds for the principal frequency of a membrane and the torsional rigidity of a beam, *Acta Sci. Math.*, **20** (1959), 33—35.

Der Beweis, den Herr MAKAI ursprünglich gefunden und uns freundlicherweise mitgeteilt hat, ist ziemlich kompliziert. Er geht von den Hadwigerschen Formeln aus und untersucht die Deformation des Randes bei Parallelbildung in ihren Einzelheiten; dabei treten Schwierigkeiten von topologischer Natur auf, außerdem hat man *a priori* anzunehmen, daß die Randlängen etwa im Minkowskischen Sinne $L(t) = \lim_{h \to +0} \frac{1}{h}[A(t+h) - A(t)]$ existieren. Allerdings ist diese letzte Annahme im speziellen Fall der Polygonbereiche, den MAKAI in seiner Arbeit nur benötigt, offenbar erfüllt.

In diesem Aufsatz wollen wir zeigen, daß diese Schwierigkeiten völlig verschwinden, wenn man die Ungleichungen für die Randlänge in ihren „integrierten" Formen betrachtet, wobei diese als gewisse Konkavitätsaussagen über den Flächeninhalt der Parallelbereiche erscheinen; man braucht dabei die Existenz der Randlängen nicht vorauszusetzen: alles folgt *nachträglich* aus elementaren Differenzierbarkeitseigenschaften der konkaven Funktionen.

In der Beweisführung wird kein Bezug auf frühere Literatur über Parallelbereiche genommen[3]). Unsere Methode scheint auch zur Untersuchung des gleichen Problems für mehrdimensionale Bereiche geeignet zu sein, doch wollen wir in diesem Aufsatz nur den Fall ebener Bereiche betrachten.

2. Definitionen und einfache Feststellungen

a) *Parallelmengen.* Für eine beliebige nichtleere ebene Punktmenge G, deren abgeschlossene Hülle $\bar{G}$ nicht mit der ganzen Ebene zusammenfällt, definiert man die *äußere Parallelmenge* im Abstand $t > 0$ als die Vereinigungsmenge G_t aller derjenigen abgeschlossenen Kreisschreiben vom Radius t, deren Mittelpunkt in G liegt.

Es is leicht einzusehen, daß für eine abgeschlossene Menge G auch G_t abgeschlossen, und für eine offene Menge G auch G_t offen ist. Es gilt

$$(1) \qquad (G_t)_s = G_{s+t} \qquad (s, t > 0);$$

G_t ist eine nichtabnehmende Funktion von t und man hat

$$(2) \qquad \bigcap_{t>0} G_t = \lim_{t \to +0} G_t = \bar{G},$$

letztere Beziehung berechtigt uns, im Falle einer abgeschlossenen Menge G,

[3]) Es ist aber zu bemerken, daß unsere Beweismethode eine gewisse Verwandtschaft mit der Methode aufweist, mit deren Hilfe G. BOL das Verhalten des sog. isoperimetrischen Defizits für innere Parallelbereiche nichtkonvexer Bereiche untersucht hat. Vgl. G. BOL, Isoperimetrische Ungleichungen für Bereiche auf Flächen, *Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung*, **51** (1941), 219—257.

G_0 gleich G zu setzen und damit die Definition der äußeren Parallelmengen G_t auch für $t=0$ auszudehnen.

Da voraussetzungsgemäß $\bar{G}$ nicht mit der ganzen Ebene zusammenfällt, ist die obere Grenze der Radien der in der Menge G^*[4]) enthaltenen Kreisscheiben positiv und eventuell gleich $+\infty$; wir wollen diese obere Grenze mit $\varrho^*(G)$ oder kurz mit ϱ^* bezeichnen. Im Falle eines endlichen ϱ^* ist $\overline{G_{\varrho^*}}$ offenbar gleich der ganzen Ebene, und da, wie man leicht einsieht, $\overline{G_{\varrho^*}}=\overline{\bigcup_{t<\varrho^*} G_t}$ ist, genügt es immer nur die Parameterwerte $t<\varrho^*$ in Betracht zu ziehen.

Für eine beliebige ebene Punktmenge G, die nicht mit der ganzen Ebene zusammenfällt und deren Innere G^0 nicht leer ist, wird für $t>0$ die *innere Parallelmenge* G_{-t} von G im Abstand t durch die äußere Parallelmenge der Menge G^* folgendermaßen definiert:

$$G_{-t}=((G^*)_t)^*.$$

Aus den Gesagten über die äußeren Parallelmengen folgen sofort die Eigenschaften: Ist G abgeschlossen (offen), so ist auch G_{-t} abgeschlossen (offen). Es gilt immer $(G_{-t})_{-s}=G_{-t-s}$ $(t, s>0)$. G_{-t} ist eine nichtwachsende Funktion von t und man hat

$$\bigcup_{t>0} G_{-t}=\lim_{t\to+0} G_{-t}=G^0; \tag{3}$$

diese Beziehung berechtigt uns, im Falle einer offenen Menge G, $G_0=G$ zu setzen und damit die Definition der inneren Parallelmengen G_{-t} auch für $t=0$ auszudehnen.

Da voraussetzungsgemäß G^0 nicht leer ist, ist die obere Grenze der Radien der in G enthaltenen Kreisscheiben positiv und eventuell gleich $+\infty$; wir bezeichnen diese obere Grenze mit $\varrho(G)$ oder kurz mit ϱ. Im Falle eines endlichen ϱ ist $(G_{-\varrho})^0=(\bigcap_{t<\varrho} G_{-t})^0$ leer, also genügt es nur die inneren Parallelmengen G_{-t} mit Parameterwerten $t<\varrho$ in Betracht zu ziehen.

b) *Kreisbereiche und Kreispolygone.* Wir werden sagen, die ebene Punktmenge H sei ein *Kreisbereich,* falls 1^0 weder H noch H^* leer sind, 2^0 H als Vereinigungsmenge von endlich vielen abgeschlossenen Kreisscheiben $K(M_k, r_k)$ (M_k ist der Mittelpunkt, r_k der Radius) und von höchstens einer abgeschossenen „uneigentlichen Kreisscheibe" $K^\infty(M, r)$ dargestellt werden kann; $K^\infty(M, r)$ wird als Komplementärmenge der offenen Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r erklärt.

Wir sagen, der Kreisbereich H sei *regulär,* falls keine zwei der erzeugenden (eigentlichen und uneigentlichen) Kreisscheiben sich berühren. Der

[4]) Für eine beliebige Punktmenge M soll M^* die in bezug auf die ganze Ebene genommene Komplementärmenge bezeichnen.

Rand C von H besteht dann offenbar aus endlich vielen, paarweise punktfremden einfachen Kurven, die je aus endlich vielen Kreisbogen gebildet sind; Kurven von dieser Art wollen wir *Kreispolygone* nennen. Orientieren wir den Rand des regulären Kreisbereichs H derart, daß das Innere von H immer an der linken Hand ist, so ist die Anzahl n der positiv orientierten Bestandteile gleich der Anzahl der beschränkten Komponenten der Menge H, und die Anzahl m der negativ orientierten Bestandteile ist gleich der Anzahl der beschränkten Komponenten der Komplementärmenge H^*. Jedenfalls ist $n \geqq 0$, $m \geqq 0, n+m \geqq 1$; enthält H eine uneigentliche Kreisscheibe, so ist $m \geqq 1$.

Es ist zweckmäßig, folgende Ausdrucksweise einzuführen. Eine abgeschlossene, nicht leere und nicht mit der ganzen Ebene zusammenfallende ebene Punktmenge G soll *vom Typus* (n, ν) genannt werden, wobei n eine nichtnegative ganze Zahl und ν gleich 0 oder 1 ist, falls G aus n beschränkten und ν unbeschränkten Komponenten besteht; die unbeschränkte Komponente, falls existiert $(\nu=1)$, soll eine volle Umgebung des unendlichfernen Punktes, d. h. eine uneigentliche Kreisscheibe enthalten. Ist G vom Typus (n, ν), so ist die äußere Parallelmenge G_t für $0 \leqq t < \varrho^*$ offenbar von einem Typus (n_t, ν_t) mit

$$n_t \leqq n, \quad \nu_t = \nu. \tag{4}$$

Für die Zwecke unserer Arbeit sind die Kreisbereiche deswegen von Bedeutung, weil ihre äußeren Parallelmengen ebenfalls Kreisbereiche sind. Für

$$H = \bigcup_k K(M_k, r_k) \quad \text{bzw.} \quad H = (\bigcup_k K(M_k, r_k)) \cup K^\infty (M, r)$$

und für $0 \leqq t < \varrho^*(H)$ ist nämlich

$$H_t = \bigcup_k K(M_k, r_k+t) \quad \text{bzw.} \quad H_t = (\bigcup_k K(M_k, r_k+t)) \cup K^\infty (M, r-t);$$

abgesehen von endlich vielen Werten von t ist G_t sogar *regulär.*

3. Parallelkurven von Kreispolygonen

Ist C eine beliebige einfache geschlossene Kurve mit dem inneren Gebiet G, so wird die äußere *Parallelkurve* $C^a(t)$ von C im Abstand t $(0 < t < \infty)$ als der Rand des Parallelgebiets G_t, und die *innere Parallelkurve* $C^i(t)$ von C im Abstand t $(0 < t < \varrho(G))$ als der Rand des Parallelgebiets G_{-t} definiert.

Ist C insbesondere ein Kreispolygon, so sind ihre Parallelkurven aus Kreisbogen zusammengesetzt, und für genügend kleine Werte von t sind sie sogar einfache geschlossene Kurven, also wieder Kreispolygone.

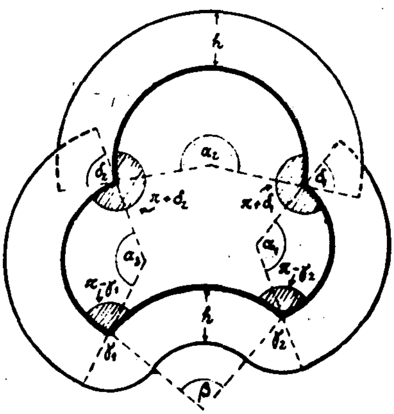
Wir führen noch zwei Bezeichnungen ein: für eine (eventuell aus mehreren Zügen bestehende) rektifizierbare Kurve C soll $L[C]$ die Bogenlänge (bzw. die gesamte Bogenlänge), und für eine meßbare Punktmenge G in der Ebene wird $A[G]$ den *Flächeninhalt* (genauer gesagt, das zweidimensionale Lebesguesche Maß) bedeuten.

Lemma 1. *Für jedes Kreispolygon C existieren die beiden Grenzwerte*

$$d^a = \lim_{h\to+0} \frac{1}{h}\{L[C^a(h)]-L[C]\},\quad d^i = \lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\{L[C^i(h)]-L[C]\}$$

und genügen den Ungleichungen

$$d^a \leqq 2\pi, \quad d^i \leqq -2\pi.^{5)}$$



Figur 1.

Beweis. Wir bezeichnen mit α_i bzw. β_j die Öffnungswinkel derjenigen Kreisbogenbestandteile von C, die von außen gesehen konvex bzw. konkav sind; ferner seien $\pi-\gamma_k$ die konvexen und $\pi+\delta_l$ die konkaven (inneren) Winkel von C $(0<\gamma_k\leqq\pi,\ 0<\delta_l\leqq\pi)$.

Für kleine Werte von h entsteht $C^a(h)$ aus C, indem man jeden Kreisbogen mit dem konzentrischen, um $h\alpha_i$ längeren bzw. um $h\beta_j$ kürzeren Kreisbogen im Abstande h ersetzt, an jedem konkaven Winkel $\pi+\delta_l$ zwei Stücke von diesen von der Gesamtlänge $2h \operatorname{tg}\frac{\delta_l}{2}+O(h^2)$ wegnimmt[6]) und an jedem konvexen Winkel $\pi-\delta_k$ je einen Kreisbogen vom Radius h und der Länge $h\gamma_k$ hinzunimmt (vgl. Figur 1). Also ist

$$L[C^a(h)]-L[C]=\sum_i h\alpha_i-\sum_j h\beta_j+\sum_k h\gamma_k-\sum_l 2h\operatorname{tg}\frac{\delta_l}{2}-O(h^2).$$

Hieraus folgt, daß der Grenzwert d^a existiert, und zwar ist

$$d^a=\sum_i\alpha_i-\sum_j\beta_j+\sum_k\gamma_k-\sum_l 2\operatorname{tg}\frac{\delta_l}{2}.$$

Nun ist $\operatorname{tg}\varphi\geqq\varphi$ für $0\leqq\varphi\leqq\pi/2$, also gilt die Ungleichung

(5) $$d^a\leqq\sum_i\alpha_i-\sum_j\beta_j+\sum_k\gamma_k-\sum_l\delta_l.$$

---

5) Herr Makai teilte mir nachträglich freundlicherweise mit, daß er in einem früheren Beweisansatz für seine in der Einleitung erwähnten Ungleichungen ebenfalls von diesem Lemma ausgegangen ist.

6) Man beachte, daß der Schnittpunkt der Parallelkreisbogen der beiden am Eckpunkt des Winkels $\pi+\delta_l$ anstoßenden Kreisbogen sich auf einer Hyperbel bzw. Ellipse bewegt, deren Brennpunkte die Mittelpunkte der entsprechenden Kreise sind. Man benütze die Winkelhalbierungseigenschaft der Tangenten der Hyperbeln und der Ellipsen.

Wir durchlaufen die Kurve C im positiven Sinn und betrachten die Richtungsvariation der nach außen gerichteten Normalen. Längs dem Bogen von der Öffnung α_i dreht sich die Normale stetig im positivem Sinne mit dem Gesamtwinkel α_i, und längs dem Bogen von der Öffnung β_j dreht sich sie stetig im negativen Sinne mit dem Gesamtwinkel β_j. Am Eckpunkte des Winkels $\pi-\gamma_k$ erfährt sie eine Drehung um den Winkel γ_k im positiven Sinne, und am Eckpunkte des Winkels $\pi+\delta_l$ eine Drehung um den Winkel δ_l im negativen Sinne ($0<\gamma_k\leqq\pi$, $0<\delta_l\leqq\pi$). Die algebraische Summe dieser Drehungswinkel ist also gleich der Summe an der rechten Seite von (5). Nun ist aber diese Totaldrehung bekanntlich immer gleich 2π. Damit haben wir die Ungleichung $d^a\leqq 2\pi$ bewiesen.

Eine analoge Betrachtung führt uns zum Ergebnis, daß auch d^i existiert und gleich

$$-\sum_i \alpha_i+\sum_j \beta_j-\sum_k 2\operatorname{tg}\frac{\gamma_k}{2}+\sum_l \delta_l$$

ist, woraus dann die Ungleichung

$$d^i\leqq-\sum_i \alpha_i+\sum_j \beta_j-\sum_k \gamma_k+\sum_l \delta_l=-2\pi$$

folgt. Damit haben wir Lemma 1 bewiesen.

4. Äußere Parallelbereiche von Kreisbereichen

Zunächst sei H ein *regulärer* Kreisbereich vom Typus (n,ν). Sein orientierter Rand C möge aus den im positiven Sinne orientierten Kreispolygonen $C_1,\ldots,C_n$ und aus den im negativen Sinne orientierten Kreispolygonen ${}_1C,\ldots,{}_mC$ $(m\geqq\nu)$ bestehen (siehe Figur 2). Für genügend kleine positive Werte von t sind dann die äußeren bzw. inneren Parallelkurven $C_1^a(t),\ldots,C_n^a(t)$; ${}_1C^i(t),\ldots,{}_mC^i(t)$ ebenfalls Kreispolygone und paarweise punktfremd (siehe § 3). Zusammen bilden sie den Rand $C(t)$ von H_t. Auf Grund der Beziehung

$$\frac{1}{h}\{L[C(h)]-L[C]\}=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{h}\{L[C_p^a(h)]-L[C_p]\}+\sum_{q=1}^{m}\frac{1}{h}\{L[{}_qC^i(h)]-L[{}_qC]\}$$

folgt dann mit Anwendung von Lemma 1, daß der Grenzwert

$$d=\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\{L[C(h)]-L[C]\}$$

existiert, endlich ist, und der Ungleichung

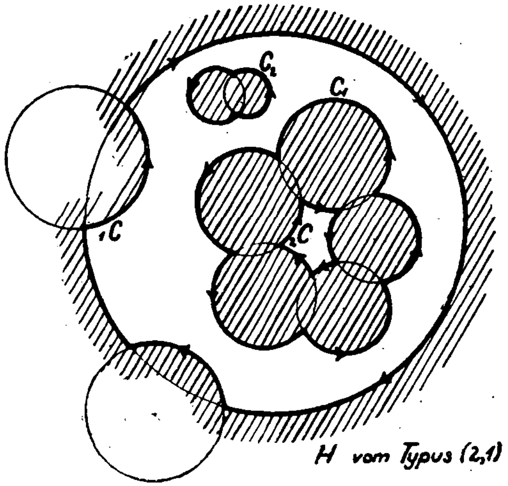
$$d\leqq 2\pi(n-m),$$

also wegen $m\geqq\nu$ um so mehr der Ungleichung

$$d\leqq 2\pi(n-\nu) \tag{6}$$

genügt.

Jetzt betrachten wir einen beliebigen Kreisbereich H_0 vom Typus (n, ν). Wie schon bemerkt (in § 2), ist H_t für jeden Wert von t aus dem Intervall $0 \leqq t < \varrho^*$, mit der Ausnahme von höchstens endlich vielen „singulären" Werten,



Figur 2.

ein regulärer Kreisbereich. Bezeichnet man den Rand von H_t mit $C(t)$, wendet man das soeben erhaltene Ergebnis (6) auf H_t statt auf H an, und beachtet die Beziehung (1), so erhält man das Ergebnis, daß die Funktion

$$l(t) = L[C(t)] \qquad (0 \leqq t < \varrho^*)$$

an jeder nichtsingulären Stelle t eine endliche rechtsseitige Ableitung

$$d(t) = \lim_{h \to +0} \frac{l(t+h) - l(t)}{h}$$

besitzt, und daß für diese die Ungleichung

$$d(t) \leqq 2\pi(n_t - \nu_t),$$

also wegen $n_t \leqq n$, $\nu_t = \nu$ um so mehr die Ungleichung

(7) $$d(t) \leqq 2\pi(n - \nu)$$

gilt. Andererseits ist $l(t)$ offenbar eine im ganzen Intervall $0 \leqq t < \varrho^*$ stetige Funktion von t.[7] Die Funktion

$$f(t) = l(t) - 2\pi(n - \nu)t$$

[7]) Aus unserer Definition der Kreisbereiche folgt ja, daß bei stetiger Änderung des Parameters t im Intervall $0 \leqq t < \varrho^*$ (mit der eventuellen Ausnahme der Falles $t \to \varrho^*$) kein Randstück von H_t in ein von einem einzigen Punkt verschiedenes entartetes Gebilde zusammenschrumpfen kann.

ist dann in diesem Intervall ebenfalls stetig und besitzt mit der Ausnahme der endlich vielen singulären Stellen überall eine rechtsseitige Ableitung $f'_+(t) \leqq 0$. Hieraus aber folgt, daß $f(t)$ im ganzen Intervall nichtwachsend ist.[8])

Nun sieht man aber leicht ein, daß

$$L[C(t)] = \lim_{h \to +0} \frac{A[H_{t+h} - H_t]}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{A[H_t - H_{t-h}]}{h}$$

gilt (die erste Gleichung für $t \geqq 0$, die zweite für $t > 0$), folglich ist

$$f(t) = \frac{d}{dt}\{A[H_t - H_0] - \pi(n-\nu)t^2\} \qquad (0 \leqq t < \varrho^*);$$

es handelt sich hier um den Inhalt von durch endlich viele Kreisbogen berandeten beschränkten Bereichen. Somit haben wir folgendes bewiesen:

Lemma 2. *Für jeden Kreisbereich H_0 vom Typus (n, ν) ist*

$$A[H_t - H_0] - \pi(n-\nu)t^2$$

eine im Intervall $0 \leqq t < \varrho^*(H_0)$ stetige, konkave Funktion von t.

5. Bereiche von allgemeinerer Struktur

Wir können jetzt zum Beweis unseres Hauptergebnisses übergehen:

Satz 1. *Es sei G_0 eine beliebige abgeschlossene ebene Punktmenge vom Typus (n, ν). Dann ist*

$$A[G_t - G_0] - \pi(n-\nu)t^2$$

eine stetige, konkave Funktion von t im Intervall $0 \leqq t < \varrho^*(G_0)$; $A[G_t - G_0]$ bedeutet hierbei das Lebesguesche Maß der beschränkten, Borelschen Punktmenge $G_t - G_0$.

Beweis. Die abgeschlossene Menge G_0 möge aus den beschränkten Komponenten $G^1, \ldots, G^n$ und im Falle $\nu = 1$ noch aus der unbeschränkten Komponente G^∞ bestehen, letztere enthält definitionsgemäß eine uneigentliche

8) Wegen der Stetigkeit auch an den singulären Stellen genügt es zu beweisen, daß für jedes abgeschlossene Intervall $[a, b]$, welches keine singuläre Stelle enthält, $f(a) \geqq f(b)$ ist. Wie im Beweis des gewöhnlichen Mittelwertsatzes, betrachte man die Funktion

$$g(t) = f(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a);$$

τ sei eine Minimumstelle für $g(t)$ in $[a, b]$. Wegen $g(a) = g(b)$ kann man $\tau \neq b$ wählen. Dann ist offenbar $g'_+(\tau) \geqq 0$, also

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqq f'_+(\tau) \leqq 0,$$

woraus die Behauptung folgt.

Kreisscheibe K^∞. Der minimale Abstand zwischen diesen Komponenten sei δ ($\delta>0$). Man wähle eine beliebige Zahl η mit $0<\eta<\delta/3$, und konstruiere für jede Komponente je einen zusammenhängenden Kreisbereich $H^{1,\eta},\ldots,H^{n,\eta}$ bzw. $H^{\infty,\eta}$ derart, daß die Inklusionen

(8) $$G^1\subseteqq H^{1,\eta}\subseteqq G^1_\eta,\ldots,G^n\subseteqq H^{n,\eta}\subseteqq G^n_\eta,\ G^\infty\subseteqq H^{\infty,n}\subseteqq G^\infty_\eta$$

gelten; G^1_η bedeutet dabei die äußere Parallelmenge von G^1 im Abstand η, usw. Für die kompakten Komponenten, etwa für G^1, verfährt man so, daß man um jeden Punkt von G^1 als Mittelpunkt die offene Kreisscheibe vom Radius η nimmt; laut dem Heine-Borelschen Satze kann man von diesen Kreisscheiben endlich viele auswählen, die schon die Menge G^1 bedecken; die abgeschlossene Hülle der Vereinigungsmenge der ausgewählten offenen Kreisscheiben ist dann ein Kreisbereich $H^{1,\eta}$ mit den gewünschten Eigenschaften. Im Falle von G^∞ verfährt man auf analoge Weise zuerst für die kompakte Menge $G'=G^\infty-(K^\infty)^0$ (wobei $(K^\infty)^0$ das Innere der uneigentlichen Kreisscheibe K^∞ bedeutet) und dann nimmt man zu den G' bedeckenden endlich vielen Kreisscheiben K^∞ wieder hinzu.

Der minimale Abstand zwischen den Kreisbereichen $H^{1,\eta},\ldots,H^{n,\eta}$ und (im Falle $\nu=1$) $H^{\infty,\eta}$ ist $\geqq\delta-2\eta>\delta/3$. Diese Kreisbereiche sind also die Komponenten eines Kreisbereichs H^η_0 von demselben Typus (n,ν) wie die ursprüngliche Menge G_0, und man hat infolge (8)

(9) $$G_0\subseteqq H^\eta_0\subseteqq G_\eta.$$

Diese Beziehung überträgt sich auf die äußeren Parallelbereiche im Abstand t, d. h. man hat (mit der Bezeichnung $H^\eta_t=(H^\eta_0)_t$)

$$G_t\subseteqq H^\eta_t\subseteqq G_{t+\eta}\qquad(t\geqq 0)$$

und mithin auch

$$G_t-G_0\subseteqq H^\eta_t-G_0\subseteqq G_{t+\eta}-G_0\qquad(t\geqq 0).$$

Diese Differenzmengen sind alle Borelsch und beschränkt, und für $\eta\downarrow 0$ strebt die Menge $G_{t+\eta}-G_0$ abnehmend gegen die Menge G_t-G_0 (siehe (1) und (2) in § 1). Folglich gelten für die Lebesgueschen Maße die folgenden Beziehungen:

(10) $$A[G_t-G_0]\leqq A[H^\eta_t-G_0]\leqq A[G_{t+\eta}-G_0]$$

und

(11) $$A[G_t-G_0]=\lim_{\eta\to 0}A[G_{t+\eta}-G_0];$$

aus (10) und (11) folgt auch

$$A[G_t-G_0]=\lim_{\eta\to 0}[H^\eta_t-G_0]\cdot$$

Nun ist nach Lemma 2

$$A[H_t^\eta - H_0^\eta] - \pi(n-\nu)t^2$$

für jedes feste $\eta > 0$ eine konkave Funktion von t im Intervall $0 \leqq t < \varrho^*(H_0^\eta)$; wegen der Beziehung $A[H_t^\eta - G_0] = A[H_t^\eta - H_0^\eta] + A[H_0^\eta - G_0]$ ist auch die Funktion

(12) $$A[H_t^\eta - G_0] - \pi(n-\nu)t^2$$

im Intervall $0 \leqq t < \varrho^*(H_0^\eta)$ konkav. Da infolge (9) $\varrho^*(H_0^\eta)$ für $\eta \to 0$ gegen $\varrho^*(G_0)$ strebt, so ist die Limesfunktion von (12), d. h.

(13) $$A[G_t - G_0] - \pi(n-\nu)t^2,$$

ebenfalls konkav im ganzen Intervalle $0 \leqq t < \varrho^*(G_0)$. Die Funktion (13) ist nach (11) überall stetig von rechts, und dann wegen ihrer Konkavität notwendigerweise stetig auch von links.

Damit haben wir den Satz vollständig bewiesen.

Satz 1 hat eine duale Form für innere Parallelmengen:

Satz 2. *Es sei G_0 eine offene ebene Punktmenge, deren Komplementärmenge G_0^* eine abgeschlossene Menge vom Typus (n^*, ν^*) ist. Dann ist*

$$A[G_0 - G_{-t}] - \pi(n^* - \nu^*)t^2$$

eine stetige, konkave Funktion von t im Intervall $0 \leqq t < \varrho(G_0)$.

Beweis. Man wende Satz 1 auf die abgeschlossene Menge G_0^* und deren äußeren Parallelmengen $(G_0^*)_t$ an, und man beachte die Beziehungen

$$(G_0^*)_t - G_0^* = (G_{-t})^* - G_0^* = G_0 - G_{-t},$$

deren erste aus der Definition der inneren Parallelmengen folgt und deren zweite eine Identität für Mengendifferenzen ist.

Nach den elementaren Differenzierbarkeitseigenschaften konkaver Funktionen folgen nun aus diesen Sätzen die beiden, ebenfalls dualen Sätze:

Satz 1. *Für eine beliebige abgeschlossene ebene Punktmenge G_0 vom Typus (n, ν) existieren die Grenzwerte*

$$L_+(t) = \lim_{h \to +0} \frac{1}{h} A[G_{t+h} - G_t], \qquad L_-(t) = \lim_{h \to +0} \frac{1}{h} A[G_t - G_{t-h}]$$

für $0 \leqq t < \varrho^*(G_0)$ bzw. $0 < t < \varrho^*(G_0)$; für alle $t > 0$ sind sie endlich, $L_+(t) \leqq L_-(t)$, und für alle $t > 0$ mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmewerten ist sogar $L_+(t) = L_-(t)$; $L_-(0)$ kann eventuell auch gleich $+\infty$ sein; und für $0 \leqq t_1 < t_2 < \varrho^*(G_0)$ gilt

$$L_+(t_1) - 2\pi(n-\nu)t_1 \geqq L_-(t_2) - 2\pi(n-\nu)t_2.$$

Insbesondere gilt

(14) $$L_+(0) \geqq L_\pm(t) - 2\pi(n-\nu)t$$

für $0 < t < \varrho^*(G_0)$.

Satz 2′. *Für eine beliebige offene ebene Punktmenge G_0, für die G_0 vom Typus (n^*, ν^*) ist, existieren die Grenzwerte*

$$L_-(-t) = \lim_{h\to+0} \frac{1}{h} A[G_{-t} - G_{-t-h}], \qquad L_+(-t) = \lim_{h\to+0} \frac{1}{h} A[G_{-t+h} - G_{-t}]$$

für $0 \leqq t < \varrho(G_0)$ *bzw.* $0 < t < \varrho(G_0)$; *für alle* $t > 0$ *sind sie endlich,* $L_-(-t) \leqq L_+(-t)$, *und für alle* $t > 0$ *mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmewerten ist sogar* $L_-(-t) = L_+(-t)$; $L_-(0)$ *kann eventuell auch gleich* $+\infty$ *sein; und für* $0 \leqq t_1 < t_2 < \varrho(G_0)$ *gilt*

$$L_-(-t_1) - 2\pi(n^* - \nu^*)t_1 \geqq L_+(-t_2) - 2\pi(n^* - \nu^*)t_2.$$

Insbesondere hat man

$$L_-(0) \geqq L_\pm(-t) - 2\pi(n^* - \nu^*)t \tag{15}$$

für $0 < t < \varrho(G_0)$.

Ist speziell G_0 ein beschränktes Kontinuum (Fall $n = 1$, $\nu = 0$), so gilt nach (14) $L_\pm(t) \leqq L_+(0) + 2\pi t$ für $0 < t < \infty$. Ist aber G_0 ein $m+1$-fach zusammenhängendes offenes Gebiet (Fall $n^* = m$, $\nu^* = 1$), so gilt nach (15) $L_\pm(-t) \leqq L_-(0) + 2\pi(m-1)t$ für $0 < t < \varrho(G_0)$. Somit haben wir die beiden Ungleichungen von Makai als spezielle Fälle der Sätze 1′, 2′, und zwar ohne a priori Annahme der Existenz von $L_\pm(t)$ bzw. $L_\pm(-t)$, bewiesen.

Als Korollare erhält man:

Satz 1″. *Für eine beliebige abgeschlossene ebene Punktmenge G_0 mit kompaktem Rand existieren die Grenzwerte*

$$L_+(t) = \lim_{h\to+0} \frac{1}{h} A[G_{t+h} - G_t], \qquad L_-(t) = \lim_{h\to+0} \frac{1}{h} A[G_t - G_{t-h}]$$

für jedes t mit $0 < t < \varrho^*(G_0)$, *beide sind endlich,* $L_+(t) \leqq L_-(t)$, *und mit der eventuellen Ausnahme von abzählbar vielen Werten von t ist sogar* $L_+(t) = L_-(t)$

Satz 2″. *Für eine beliebige offene ebene Punktmenge G_0 mit kompaktem Rand existieren die Grenzwerte*

$$L_-(-t) = \lim_{h\to+0} \frac{1}{h} A[G_{-t} - G_{-t-h}], \qquad L_+(-t) = \lim_{h\to+0} \frac{1}{h} A[G_{-t+h} - G_{-t}]$$

für jedes t mit $0 < t < \varrho(G_0)$, *beide sind endlich,* $L_-(-t) \leqq L_+(-t)$, *und mit der eventuellen Ausnahme von abzählbar vielen Werten von t ist sogar* $L_-(-t) = L_+(-t)$.

Wegen der Dualität dieser Behauptungen genügt es nur Satz 1″ zu beweisen. Voraussetzungsgemäß ist der Rand von G_0 in einer Kreisscheibe $K(M, r)$ enthalten; folglich ist der Rand von G_a $(a > 0)$ enthalten in der Kreisscheibe $K(M, r+a)$. Alle beschränkten Komponenten von G_a sind dann notwendigerweise ebenfalls in $K(M, r+a)$ enthalten, und da jede dieser Komponenten mindestens eine Kreisscheibe vom Radius a enthält und folglich vom Maß $\geqq \pi a^2$ ist, so ist die Anzahl n_a der beschränkten Komponenten von G_a notwendigerweise $\leqq \left(\frac{r+a}{a}\right)^2$. Wenn es eine unbeschränkte Komponente von G_a gibt, dann enthält diese die ganze uneigentliche Kreisscheibe $K^\infty(M, r+a)$. Folglich kann man Satz 1′ auf G_a anwenden; wegen der Beziehung $G_t = (G_a)_{t-a}$ $(t > a)$ folgt somit die Gültigkeit der Aussagen für $t > a$. Da aber a beliebig klein positiv gewählt werden kann, ist damit Satz 1″ bewiesen.

(Eingegangen am 1. Dezember 1958)