Bibliographie

Th. Schneider, Einführung in die transzendenten Zahlen (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 81), VII + 150 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1957.

Wie der Verfasser betont, ist das Ziel des Werkes eine solche Einführung ins Gebiet der transzendenten Zahlen zu geben, welche die wichtigsten Teile der Theorie im Lichte einiger *allgemeinerer* Beweismethoden behandelt. Während Transzendenzergebnisse seit Liouville bis zu den 30-er Jahren d. Jh. meistens auf Grund recht spezieller Gedanken bewiesen worden sind, verdankt man in neuerer Zeit manchen Autoren — vor allem A. O. Gelfond; K. Mahler, Th. Schneider und C. L. Siegel — auch umfassendere Prinzipien, welche für die weitere Entwicklung große Bedeutung haben. — Es ist also wohl anzuerkennen, daß die betreffenden Methoden auch an solchen Stellen benutzt werden, wo sie nicht die kürzestmögliche, aber eine verallgemeinerungsfähige Diskussion liefern, wie z. B. beim Lindemannschen Satz.

Der Stoff gliedert sich in fünf (voneinander mehr oder weniger unabhängige) Kapitel. — Das erste beschäftigt sich mit dem klassischen Liouvilleschen Satz und seinen Erweiterungen, mit Einschluß vielfältiger Anwendungen zur Konstruktion von transzendenten Zahlen. Die Rothsche (bestmögliche) Verschärfung des Thue-Siegelschen Approximationssatzes, welche ganz neuerdings, 1955 publiziert worden ist und eine der tiefliegendsten Resultate der Theorie darstellt, ist hierin in vollem Umfange bewiesen und mit geeigneten Beispielen illustriert. — Kap. II enthält eine moderne Zusammenfassung unserer Kenntnisse über die Transzendenz der Werte von periodischen Funktionen und deren Umkehrfunktionen: nachdem es (mittels Interpolationsreihen) gezeigt wird, daß α und e^{α} für $\alpha \neq 0$ nicht gleichzeitig algebraisch sein können, eine natürliche Erweiterung der Methode führt zu einem allgemeinen Satz in bezug auf die algebraische Abhängigkeit von meromorphen Funktionen, welcher durch Spezialisierung u. a. sowohl die Lösung des 7-ten Hilbertschen Problems, d. h. das Theorem von Gelfond und Schneider (1934) über die Transzendenz von α^{β} (α, β algebraisch, $\alpha \neq 0, 1$ und β irrational), als auch Ergebnisse von Siegel und Schneider über den nicht-algebraischen Charakter elliptischer Funktionen und Integrale liefert. Die noch weitergehenden Resultate des Verfassers (1941) über Abelsche Funktionen und Integrale sind gleichfalls angedeutet, aber nicht ausführlich behandelt. — Kap. III gibt die Klasseneinteilung der Zahlen nach Mahler; die Beleuchtung der Zusammenhänge mit der analogen Koksmaschen Klassifikation ermöglicht dann, auch die entsprechenden maßtheoretischen Fragen teilweise zu beantworten. — Kap. IV schließt sich eng daran, indem — anstatt der (bei der Klassifikation benutzten) Mahlerschen Funktion — konkrete Transzendenzmaße für e (Mahler), α^{β} (Gelfond) usw. hergeleitet werden. Dabei wird besonderer Wert auf die einschlägige Gelfondsche Methode gelegt. — Kap. V bespricht eingehend (obzwar nicht in der vollsten Allgemeinheit) die von Siegel herrührende Methode zur Feststellung der algebraischen Unabhängigkeit von transzendenten Zahlen; als Anwendung ergeben sich eine Verschärfung des Satzes von Lindemann über die Werte der Exponentialfunktion und ein merkwürdiges Ergebnis von Siegel über die Werte von Besselschen Funktionen und ihren Ableitungen. — Aufzählung mancher offener Probleme, ein Anhang mit einigen (im Text benutzten) Hilfssätzen aus der Theorie der diophantischen Gleichungs- und Ungleichungssysteme, ferner ein ausführliches Literaturverzeichnis sind noch hinzugefügt.

Die Arbeit wird — nebst den vor einigen Jahren (1949 bzw. 1952) erschienenen Büchern von Siegel und Gelfond — gewiß jedem Mathematiker von Nutzen sein, der sich eine klare Vorstellung vom heutigen Stande der Transzendenztheorie machen bzw. Impulse aus diesem schönen Forschungsgebiet entnehmen will.

Miklós Mikolás (Budapest)

Tom M. Apostol, Mathematical Analysis. A Modern Approach to Advanced Calculus, XII+553 pages, Reading (Mass., USA), Addison—Wesley Publishing Company, 1957.

The book starts with a list of fundamental properties of the real number system, but does not give any construction of this system, by Dedekind sections or any other method, from the rational number system. There follow the elements of point set theory in finite dimensional euclidean spaces. The limit concept and continuity are explained in a very detailed manner. Three chapters (5—7) are devoted to the definition and general properties of differentiation, of functions of one or several variables. Great care is taken to an exact dealing with differentials: the function $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, is said to have a differential at $\mathbf{x}$ if there exists a function $g(\mathbf{x}; \mathbf{t})$, linear in $\mathbf{t}$, such that, for any $\varepsilon>0$,

$$|f(\mathbf{x}+\mathbf{t})-f(\mathbf{x})-g(\mathbf{x};\mathbf{t})|<\varepsilon|\mathbf{t}|$$

if $0<|\mathbf{t}|<\delta=\delta(\mathbf{x}, \varepsilon)$; the "differential" g is then also denoted by df, and $\mathbf{t}$ by $d\mathbf{x}$. Chapter 8 deals with functions of bounded variation, rectifiable curves, and connected sets; the elementary but fair introduction of connectedness has to be emphasized. It follows an extended treatment of the Riemann—Stieltjes integral (Ch. 9), including complex integration and a discussion of the winding number. Multiple integrals and line integrals are treated in Ch. 10, including a fine proof of Green's theorem for plane regions bounded by arbitrary rectifiable Jordan curves. Unfortunately, the proof of the formula for the change of variable in a multiple integral contains an error (p. 271, bottom; the non-singularity of the Jacobian does not imply that at least one of the diagonal elements $D_k g_k(\mathbf{t})$ is $\neq 0$); the proof of theorem 10—48 is erroneous. Ch. 11, on Vector analysis, includes a careful treatment of surfaces and surface integrals. There follow chapters on infinite series and infinite products (Ch. 12), and on sequences of functions (Ch. 13). They contain many interesting details, among them a quite simple proof of Arzelà's theorem on bounded convergence for Riemann integrals [in the proof, however, the sets $A(n), B(n)$ should be defined in terms of $M_i(h_n)$ instead of $m_i(h_n)$]. Improper Riemann—Stieltjes integrals (Ch. 14), Fourier series and integrals (Ch. 15), and analytic functions in the complex domain (Ch. 16) are the topics treated in the last part of the book; among many other interesting details one finds here Fourier and Laplace transforms, inversion formulas, etc.

There is a minimum of emphasis on applications and physical motivation in the book. The opinion of the author, as expressed in the preface, is that it is a fairly easy matter for a lecturer to give a leisurely heuristic discussion that motivates a difficult concept, but in many instances the very same discussion may appear somewhat ridiculous when set down in print.

Summing up, this is a worthy modern text-book of Advanced Calculus, which may be recommended to students and lecturers.

Béla Sz.-Nagy (Szeged)

B. L. van der Waerden, Mathematische Statistik (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 87), IX+360 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1957.

Einführendes Werk in die mathematische Statistik. Erstrebt weder im Aufbau der Theorie der mathematischen Statistik, noch in der Aufzählung der Methoden eine Vollständigkeit, die modernen grundlegenden Probleme sind jedoch im allgemeinen erwähnt. Neben einer mathematischen Präzisität ist das Buch leicht verständlich, die praktischen Beziehungen werden überall hervorgehoben, die Beispiele sind der Praxis entnommen. Sowohl im Aufbau, wie auch in der Ausarbeitung des Buches äußert sich das Interesse eines hervorragenden Mathematikers und ausgezeichneten Didaktikers für bestimmte praktische Probleme der mathematischen Statistik.

Kapitel 1 gibt die wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundbegriffe, nach dem Kolmogoroffschen Aufbau. Kapitel 2 legt das Verhältnis von Wahrscheinlichkeiten und Häufigkeiten klar. Kapitel 3 macht mit einigen mathematischen Hilfsmitteln bekannt. Kapitel 4 beschäftigt sich mit der empirischen Bestimmung von Verteilungsfunktionen und ihrer Parameter. In Kapitel 5 wird der Begriff der charakteristischen Funktion eingeführt, und die Anwendung in der Berechnung von Momenten und Ableitung von Grenzwertsätzen gegeben. Kapitel 6 befaßt sich mit der Fehlertheorie und mit dem Student-Test. Die folgenden drei Kapitel (7—8—9) schildern — von der Methode der kleinsten Quadrate ausgehend — die Probleme der statistischen Abschätzung. Ein selbstständiges Kapitel (10) behandelt die Fragen der Bio-Auswertung, auf welchem Gebiet Verf. bemerkenswerte eigene Tätigkeit ausgeübt hat. Die nachfolgenden beiden Kapitel (11—12) enthalten die Grundlagen der Prüfung von Hypothesen; das erstere beschäftigt sich neben allgemeinen Fragen mit dem χ^2-und dem F-Test und mit der Varianzanalyse, das zweite spricht über verteilungsfreie Tests (Smirnoff-Test, Wilcoxon-Test und dessen durch Verf. verbesserte Modifikation, X-Test). In Kapitel 13 werden der Korrelationskoeffizient und die Rangkorrelation behandelt. Kapitel 14 enthält 13 Tabellen zu den im Buch beschriebenen Standard-Tests. Die einzelnen Kapitel beginnen mit je einer kurzen Anweisung zur Bearbeitung des betreffenden Kapitels. Das Buch schließt mit einem Register der Beispiele, nach Fachgebieten geordnet, einer Nebeneinanderstellung englischer und deutscher Fachausdrücke und einem Namen- und Sachverzeichnis.

Das Buch enthält 50 ausgearbeitete Anwendungen auf Probleme aus der Physik, Chemie, Astronomie, Meteorologie, Biologie, Physiologie, Medizin, Demographie, Wirtschaftsstatistik und Industrie. Durch diese lehrreichen, praktischen Beispiele kann der Leser eine gute Praxis in den Anwendungen der Theorie gewinnen.

Das Buch ist, insbesondere wegen der anschaulichen und gründlichen Ausarbeitung zahlreicher theoretischer und praktischer Probleme, ein Gewinn der Literatur der mathematischen Statistik.

I. Vincze (Budapest)

H. Hadwiger, Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 93), XIII + 312 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1957.

Die Begründung des Inhalts- und Oberflächenbegriffes, sowie das isoperimetrische Problem beschäftigte eine Reihe hervorragender Mathematiker. In den letzten Dezenien trat in diesem klassischen Gegenstand eine schnelle Entwicklung ein, die mit dem Namen des Verfassers am engsten verbunden ist. Deshalb ist es besonders erfreulich, daß er nun auch ein Buch über den Problemkreis geschrieben hat.

Das Buch setzt keine „höheren" Kentnisse voraus. Doch erfordert sein Studium eine gewisse Gewandheit im abstrakten Denken und in feinen Überlegungen.

Den Betrachtungen des ganzes Buches wird der k-dimensionale euklidische Raum zugrunde gelegt. Die älteren analytischen Methoden werden fast vollkommen vermieden und durch direkte mengengeometrische Betrachtungen ersetzt. Die Kraft dieser Methode zeigt sich in der allgemeinen, bedingungsfreien Lösung des isoperimetrischen Problems.

Der Verfasser ist bestrebt von einem Minimum von Voraussetzungen zu möglichst allgemeinen Resultaten zu gelangen. Dieses Bestreben wird im axiomatischen Aufbau der Inhaltstheorie auf meisterhafte Weise realisiert; der elementare Inhalt (Polyederinhalt), der Jordansche Inhalt, das Lebesguesche Maß, sowie der Tarskische Inhalt reihen sich alle in ein allgemeines, durch einige wenige Postulate definiertes Inhaltssystem ein. Besonders hervorzuheben ist die sehr schöne Begründung des elementaren Inhaltsbegriffes, dem die weitgehend ausgebaute Zerlegungstheorie unterliegt.

Das folgende skizzenhafte Inhaltsverzeichnis liefert eine Übersicht von der Reiche des behandelten Stoffes. Erstes Kapitel: Elementargeometrie der Polyeder (Begriff des Polyeders, Elemente der Polyedergeometrie, Zerlegungsgleichheit). Zweites Kapitel: Der elementare Inhalt (Begründung des Polyederinhalts, Polyederinhalt und Zerlegungsgleichheit, Inhalt und Oberfläche der Polyeder). Drittes Kapitel: Jordanscher Inhalt und Lebesguesches Maß (Punktmengen, Inhalts- und Maßsysteme, der Jordansche Inhalt, das Lebesguesche Maß, zum allgemeinen Inhalts- und Maßproblem). Viertes Kapitel: Ausgewählte Studien zur Mengengeometrie (Lineare Ausmessung von Punktmengen, Minkowskische Mengenoperationen, Mengenkonvergenz und Auswahlsatz, Mengengeometrie und Inhalt, Symmetrisierung, Drehmittelung und Kugelung). Fünftes Kapitel: Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie (Minkowskische Oberfläche, die isoperimetrische Ungleichung). Sechstes Kapitel: Konvexe Körper und allgemeine Integralgeometrie (Konvexe Körper und ihre fundamentalen Maßzahlen, integralgeometrische Ansätze, Integralformeln, allgemeine Integralsätze, konkave Eikörperfunktionale, die isoperimetrische Ungleichung).

Die am Ende jedes Kapitel zusammengestellten Anmerkungen enthalten eine Fülle von interessanten Tatsachen, historischen Hinweisen und Ausblicken auf weitere Forschungsgebiete. Das Buch ist mit sorgfältig zusammengestellten Literatur-, Namen- und Sachverzeichnis versehen.

Das Werk wird sicherlich in breiten Kreisen mit großer Freude empfangen und zum Ausgangspunkt mancher weiterer Untersuchungen werden.

J. Molnár (Budapest)

L. Fuchs, Abelian Groups, 367 pages, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1958.

The late Tibor Szele concluded his review of Kaplansky's monograph on Infinite Abelian Groups with the words: „This excellent book will certainly initiate a new development of the theory of abelian groups." Now, only four years later, L. Fuchs' book on Abelian Groups has appeared. The many new results contained in it, the new proofs of known results, and the large number of new problems arising out of the advances show convincingly that this new development is in fact well under way; looking through the book and through its bibliography one sees that this is due in no small measure to the many and varied contributions made by the Hungarian school of group theorists.

This background certainly gives the book its distinctive flavour, very naturally and rightly so. It also means that there is a minimum of overlap with Kaplansky's book. Obviously any book on abelian groups will present the main body of fundamental structure theory; a little over half of the present book is devoted to this, and even here the manner of presentation is very different from KAPLANSKY's. After this, in the choice of additional topics, the books have very little in common. KAPLANSKY's professed „enthusiasm for modules" leads him to aim at full generality in dealing with groups with operators almost all the way. FUCHS prefers the simplicity of language and of formulae achieved by restricting himself to just groups, pointing out where appropriate the applicability to modules, but jettisoning those parts of the theory of modules that require their own specific means of attack. Thus representation theory does not occur as a topic in its own right, nor are topological groups mentioned — the chapter on group homomorphisms stops just short of the point where a topology on the group leads to essentially new methods and results, but turns instead to the study of endomorphism rings and automorphism groups in certain cases. On the other hand we find in this book the first connected account of a number of topics that up to now could be studied only in the original papers. Prominent amongst them is the Minkowski—Hajós Theorem on group coverings presented here with the simplifications due to RÉDEI and SZELE, and the generalizations to coverings with an infinity of components due to the author. Another chapter is devoted to a full account of the present state of knowledge on the additive group of rings, discussing the two central problems to find all non-isomorphic rings with a given additive group, and to characterize rings with given special properties by means of the structure of their additive group. These and some further chapters on special topics, containing in particular R. BAER's theory of projective groups, that is groups with the same subgroup lattice, are prepared for by the treatment of homomorphism groups and endomorphism rings mentioned earlier, a discussion of group extensions where both SCHREIER's and EILENBERG—MACLANE's approach are given and related to each other, and a brief introduction to tensor products. This must suffice to indicate the scope and character of that part of the book dealing with optional subjects, for a word must certainly be said about the first eight chapters containing the 'musts' of abelian group theory. This part has an air of consolidation about it, notwithstanding the numerous unsolved problems stated also here. The concepts of divisible group, pure subgroup, and basic subgroup are now well and truly established as the principal tools of the theory; accordingly they get the fullest possible treatment, each in a separate chapter. The results are then applied to give in turn the structure theorems for p-groups, torsion free groups and mixed groups. Again there are several novel features and new results of which we give an indication by two examples. GACSÁLYI's and KERTÉSZ' theorems on systems of linear equations over abelian groups are used to provide a very natural proof for the fact that a divisible subgroup is a direct factor. The usual proof, using ZORN's Lemma, is however also given and provides additional information on the theorem. This is not the only instance; several times the author gives space to alternative arguments where this helps to illuminate different facets of the situation. The beautiful chapter which develops KULIKOV's theory of basic subgroups leads on to the author's results on lower and upper basic subgroups, SZELE's theorem that every basic subgroup is an endomorphic image of the group, and applications of these facts and concepts.

The book is eminently readable from beginning to end, the presentation is clear and never hurried, full explanations and motivations are always given. Limitations to the validity of theorems are indicated by examples and counter examples, often in the text, more often in the exercises. The short summaries at the beginning of each chapter serve admirably as a guide to the essentials and help reader to follow the main trend of thought through the wealth of material provided. Thus the manner of presentation makes the book very well suited for the more mature student; at the same time it clearly is a mine of information also for the expert. The extraordinarily large number of exercises at the end of each chapter are aimed at both types of reader: many of them are designed to familiarise the student with the use of the concepts and methods discussed in the text and, incidentally, to give supplementary information; but the majority of the examples, especially in the later chapters, seem to be mainly a means of providing a large quantity of additional material. The book under review is not the first to adopt this way out of the dilemma how to combine readability with some measure of completeness. Nevertheless the reviewer may perhaps be permitted to use this opportunity to express some doubt as to the efficacy of this method. It seems very unlikely that any reader could work through so large a number of substantial examples; their purpose might therefore be better served by a concise but connected statement of the additional material, which is more readily absorbed on reading through it than a sequence of more or less disconnected examples, and would take little, if any, more space.

Full references to the original sources are given everywhere, and there is a very comprehensive bibliography. The printing of the book is excellent, there are few misprints. The reviewer noticed an occasional minor omission, usually easily put right by the reader, except for one instance in the first introductory chapter where presumably the convention to use the word 'group' in the meaning of 'abelian group' has led to a misstatement in the definition of the socle which is usually defined as the union of the minimal normal subgroups.

Obviously these small criticisms in no way detract from the excellence of the book and the author's great achievement in providing a book of such scope, yet suitable for so large and diverse an audience.

Hanna Neumann (Sale, Cheshire, England)

Ludwig Bieberbach, Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen im reellen Gebiet (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band LXXXIII), VIII+281 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1956.

Diese „Einführung“ macht den Leser nicht nur mit den Grundtatsachen der Theorie der Differentialgleichungen bekannt, sondern führt in einigen Problemen bis zu ganz modernen Resultaten. Demnach ist das Buch als Nachschlagewerk auch für die Kenner sehr wertvoll. Die Beweisführungen sind übersichtlich, gut gewählte Beispiele erleichtern das Verstehen der Probleme und der Lösungsverfahren. Der Leser, der sich mit den behandelten Problemen besser bekannt machen will, findet mehrere Hinweise auf die neuere Fachliteratur.

Der erste Paragraph behandelt auf sehr ausführliche Weise die Existenz- und Unizitätssätze, auf die sich die ganze im Buch dargelegte Theorie stützt. Der zweite, kurze Paragraph behandelt numerische Verfahren und elementare Integrationsmethoden.

Wie der Verfasser schon im Vorwort betont, ist die Hauptaufgabe der Theorie die Untersuchung der Natur der Lösungen. Diese Untersuchung bildet den Gegenstand der sehr ausführlich dargelegten dritten und vierten Paragraphen. Der dritte Paragraph behandelt stationäre und nahezu stationäre Differentialgleichungen. (Stationär = konservativ oder autonom. Eine Differentialgleichung nennt man nahezu stationär, wenn sie aus einer stationären Differentialgleichung durch Anbringung von Störungsglieder hervorgeht.) Der Gegenstand dieses Paragraphen, deren Grundlagen die Untersuchungen von Liapunoff und Poincaré bilden, ist auch heute in lebhafter Entwicklung begriffen. Der Verfasser bietet eine Einsicht auch in die Ergebnisse der neueren Untersuchungen. Paragraph 4 beschäftigt sich mit Randwertaufgaben: z. B. dem Duffingschen Schwingungsproblem, den Sturm-Liouvilleschen Randwertaufgaben, und am Ende des Paragraphen sind einige neuere Ergebnisse über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung erwähnt. Paragraph 5 behandelt die Grundlagen der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Das Buch wird gewiß einen ähnlich großen Erfolg haben, wie die anderen Monographien des Verfassers, insbesondere sein 1923 in derselben Sammlung erschienenes, etwas mehr elementar gehaltenes Lehrbuch über die Theorie der Differentialgleichungen, das die Vorlesungen aus dem Gesamtgebiet der gewöhnlichen und der partiellen Differentialgleichungen enthielt.

L. Pintér (Szeged)

Ralph P. Boas and R. Creighton Buck, Polynomial expansion of analytic functions (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft 19), VIII + 77 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1958.

This monograph deals with representations of analytic functions $f(z)$ in the form

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(z) \tag{1}$$

where $\{p_n(z)\}$ is a prescribed sequence of polynomials. It is required that the set $\{p_n(z)\}$ be *basic*, i. e. every polynomial $p(z)$ have a unique representation as a finite sum $p(z)=\sum_{n=0}^{N} c_n p_n(z)$. Then especially $z^k=\sum_n \pi_{k,n} p_n(z)$, thus if $f(z)$ is regular at $z=0$ we obtain formally

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k=\sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(z) \tag{2}$$

where

$$c_n=\sum_{k=0}^{\infty}\pi_{k,n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}. \tag{3}$$

The expansion (2) when c_n is given by (3) is the so called *basic series* of J. M. Whittaker.

In their book the authors suppose that $\{p_n(z)\}$ is a set of *generalized Appel polynomials*, i. e. generated by the expansion

$$A(w)\Psi[zg(w)]=\sum_{n=0}^{\infty} p_n(z)w^n$$

where $A(w)$, $g(w)$ and $\Psi(t)$ are analytic functions, $\Psi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\Psi_n t^n$ with $\Psi_n\neq 0$ $(n=0,1,2,\dots)$, $A(w)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n w^n$ with $a_0\neq 0$, and $g(w)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n w^n$ with $g_1\neq 0$. The polynomials $p_n(z)$ then have the explicit representation

$$p_n(z)=\sum_{j=0}^{n}\Psi_j z^j\sum a_{k_0}g_{k_1}g_{k_2}\dots g_{k_j} \tag{4}$$

where the inner summation is extended over all sets of integers k_h ($k_0\geqq 0$, $k_h\geqq 1$ for $h=1,2,\dots$) such that $\sum_{h=0}^{j}k_h=n$. If especially $\Psi(t)=e^t$ the polynomials $p_n(z)$ are called

Sheffer polynomials, if $g(w)=w$ *Brenke polynomials*, if both $\Psi(t)=e^t$ and $g(w)=w$ we obtain the ordinary *Appel polynomials* for which formula (4) reduces to the simple form

$$p_n(z)=\sum_{j=0}^{n} z^j \frac{a_{n-j}}{j!}.$$

Chapter I, which serves as an introduction, deals besides the formulation of the problem with the method of kernel expansion, which is the main tool of the theory as developed in Chapter II, and with some characteristic examples (e. g. LIDSTONE's series).

Chapter II deals with the representation of entire functions by series of generalized Appel polynomials. In this Chapter it is supposed that $\Psi(t)$ is an entire function, $\Psi(t)=$ $=\sum_{n=0}^{\infty}\Psi_n t^n$ with $\Psi_n>0$ $(n=0,1,\ldots)$ and $\frac{\Psi_{n+1}}{\Psi_n}$ tending monotonically to 0, further that $A(w)$ is regular and $g(w)$ regular and univalent for $|w|\leqq\varrho$. Certain classes of entire functions $f(z)$ are exhibited which admit of a convergent expansion (1) with coefficients given by some integral-formulae. In connection with the multipicity of the representation, the representations of zero are considered in detail. Besides convergent expansions there are considered also expansions which are divergent but Mittag-Leffler summable. The general theory is illustrated by applications to 20 more or less specialized classes of polynomial sets.

Chapter III deals with the representation of functions which are regular only in some neighborhood of the point $z=0$. Again besides general theorems a series of important special cases are discussed.

Chapter IV gives some applications of the results of Chapter II and III. It is shown that by means of convergent or summable representations of analytic functions in the form (1) one can obtain easily some uniqueness theorems. Another important field of application is that of differential equations of finite or infinite order

$$A(D)y=f(z) \tag{5}$$

where $D=\frac{d}{dz}$ and $A(w)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n w^n$. This class of differential equations contains also the difference equation

$$\sum_{j=0}^{m}a_j y(z+\omega_j)=f(z)$$

which is obtained from (5) by choosing $A(w)=\sum_{j=1}^{m}a_j e^{\omega_j w}$ and taking into account that $e^{wD}y(z)=y(z+\omega)$.

Some interesting unsolved problems are also mentioned. The bibliography contains 95 references.

While many of the results on particular sets of polynomials given in the book were known before, they were treated up to now as isolated problems. Though it contains also a large number of interesting new results, the main value of the book is that it gives a coherent theory, which throws new light also on well known results. Owing to this feature the book will certainly contribute essentially to the further development of the subject. It should be read by everybody who wants to get acquainted with results and methods of this interesting and by far not exhausted field of research.

C. Rényi (Budapest)