Sur un problème de M. Paul Erdős

Par A. SCHINZEL à Varsovie (Pologne) et G. SZEKERES à Adelaide (Australie)

P. ERDŐS a démontré[1]) que pour toute suite des nombres naturels $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ tels que

(1) $$a_1 < a_2 < \cdots < a_r \leqq n \quad \text{et} \quad [a_i, a_j] > n \qquad (1 \leqq i < j \leqq r)$$

on a l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{a_i} < 2.$$

R. S. LEHMAN a démontré[2]) que la condition (1) entraîne l'inégalité plus forte

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{a_i} < \frac{7}{6} + \frac{1}{6n}.$$

Pour $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$ la condition (1) est remplie et

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{a_i} = \frac{31}{30}.$$

Or, P. ERDŐS a posé le problème si pour toute suite satisfaisant à la condition (1) on a l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{a_i} \leqq \frac{31}{30}$$

et a exprimé l'hypothèse que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un n_0 tel que pour $n > n_0$ la condition (1) entraîne l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{a_i} < 1 + \varepsilon.$$

Outre la suite $\{2, 3, 5\}$ nous ne connaissons qu'une seule suite pour laquelle on ait (1) et l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{a_i} > 1,$$

[1]) Publication orale.

[2]) *Amer. Math. Monthly*, **58** (1951), p. 345, problème 4365.

c'est la suite $\{3, 4, 5, 7, 11\}$ où

$$\sum \frac{1}{a_i} = 1{,}017099\ldots$$

En connection avec ces problèmes, nous démontrerons les trois théorèmes suivants:

Théorème 1. *Pour toute suite de nombres naturels* $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ *satisfaisant à la condition* (1) *on a*

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{a_i} \leqq \frac{31}{30}$$

où l'égalité est atteinte seulement pour $a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_3 = 5 = n$.

Théorème 2. *Quel que soit* $\varepsilon > 0$ *il existe un* n_0 *tel que, pour* $n > n_0$, *la condition* (1) *entraîne l'inégalité*

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{a_i} < c + \varepsilon$$

où

$$c = \sum_{j=1}^{58} c_j \log \frac{j+1}{j} = 1{,}017262\ldots$$

et les valeurs de c_j *sont données par les égalités* (6).

Théorème 3. *Quel que soit* $\varepsilon > 0$, *il existe un* n_0 *tel que pour* $n > n_0$ *et pour une certaine suite satisfaisant à la condition* (1) *on ait*

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{a_i} > 1 - \varepsilon.$$

Nous aurons besoin de deux lemmes.

Lemme 1. *Soient* $c_1, c_2, \ldots$ *des nombres* $\geqq 0$, *tels que pour chaque* q *naturel on ait*

$$S_q = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \sum_{\frac{q}{j} \geqq p > \frac{q}{j+1}} \frac{1}{p} \geqq 1. \tag{2}$$

Alors, pour chaque suite $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *vérifiant la condition* (1), *on a l'inégalité*

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{a_i} \leqq S_n.$$

Démonstration. En effet, soit l un nombre naturel quelconque et désignons par x_m le nombre des termes de la suite $a_1, a_2, \ldots, a_r$ qui sont contenus dans l'intervalle $\left(\frac{l}{m+1} n, \frac{l}{m} n\right]$. Chacun de ces nombres a précisément $\left[\frac{m}{k}\right]$ multiples $\leqq \frac{l}{k} n$, donc précisément $\left[\frac{m}{k}\right]-\left[\frac{m}{k+1}\right]$ multiples compris dans l'intervalle $\left(\frac{l}{k+1} n, \frac{l}{k} n\right]$. Or, d'après (1), si $k \geqq l$, les multiples des termes distincts de la suite $a_1, a_2, \ldots, a_r$ sont distincts et on a au moins $\sum_{m=k}^{\infty}\left(\left[\frac{m}{k}\right]-\left[\frac{m}{k+1}\right]\right) x_m$ nombres entiers dans l'intervalle $\left(\frac{l}{k+1} n, \frac{l}{k} n\right]$. Vu que cet intervalle contient précisément $\left[\frac{ln}{k}\right]-\left[\frac{ln}{k+1}\right]$ nombres entiers, on a pour $k=l,\ l+1,\ l+2, \ldots$ l'inégalité

$$\sum_{m=k}^{\infty}\left(\left[\frac{m}{k}\right]-\left[\frac{m}{k+1}\right]\right) x_m \leqq\left[\frac{ln}{k}\right]-\left[\frac{ln}{k+1}\right]. \tag{3}$$

D'autre part

$$\sum_{a_i \in\left(\frac{ln}{m+1}, \frac{ln}{m}\right]} \frac{1}{a_i} \leqq \frac{m+1}{ln} x_m,$$

donc

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{a_i} \leqq \frac{1}{ln} \sum_{m=l}^{\infty}(m+1) x_m . \tag{4}$$

Observons maintenant que pour tous m et k naturels on a

$$\left[\frac{m}{k}\right]-\left[\frac{m}{k+1}\right]=\sum_{\frac{m}{k} \geqq p>\frac{m}{k+1}} 1=\sum_{k+1>\frac{m}{p} \geqq k} 1=\sum_{\left[\frac{m}{p}\right]=k} 1 \tag{5}$$

où les sommes doivent être étendues aux valeurs indiquées de p.

Une suite de nombres $\alpha_k \geqq 0$ étant donnée, désignons par $\sum_k{}' \alpha_k$ la somme

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j \sum_{k=lj}^{l(j+1)-1}(k+1) \alpha_k \quad(\leqq \infty).$$

En vertu des formules (5) et (2) nous obtenons

$$\sum_k{}'\left(\left[\frac{m}{k}\right]-\left[\frac{m}{k+1}\right]\right)=\sum_\kappa{}' \sum_{\left[\frac{m}{p}\right]=k} 1=\sum_{j=1}^{\infty} c_j \sum_{l(j+1)>\left[\frac{m}{p}\right] \geqq lj}\left(\left[\frac{m}{p}\right]+1\right) \geqq$$

$$\geqq \sum_{j=1}^{\infty} c_j \sum_{\left[\frac{m}{pl}\right]=j} \frac{m+1}{p}=(m+1) \sum_{j=1}^{\infty} c_j \sum_{\frac{\left[\frac{m}{l}\right]}{j} \geqq p>\frac{\left[\frac{m}{l}\right]}{j+1}} \frac{1}{p}=(m+1) S_{\left[\frac{m}{l}\right]} \geqq m+1 .$$

Il en résulte que

$$\sum_k' \sum_{m=l}^{\infty}\left(\left[\frac{m}{k}\right]-\left[\frac{m}{k+1}\right]\right)x_m=\sum_{m=l}^{\infty}x_m\sum_k'\left(\left[\frac{m}{k}\right]-\left[\frac{m}{k+1}\right]\right)\geqq\sum_{m=l}^{\infty}(m+1)x_m.$$

Donc, en vertu de (4), (3) et (5)

$$\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{a_i}\leqq\frac{1}{ln}\sum_k'\sum_{m=l}^{\infty}\left(\left[\frac{m}{k}\right]-\left[\frac{m}{k+1}\right]\right)x_m\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{ln}\sum_k'\left(\left[\frac{ln}{k}\right]-\left[\frac{ln}{k+1}\right]\right)=\frac{1}{ln}\sum_k'\sum_{\left[\frac{ln}{p}\right]=k}1=$$

$$=\frac{1}{ln}\sum_{j=1}^{\infty}c_j\sum_{l(j+1)>\left[\frac{ln}{p}\right]\geqq lj}\left(\left[\frac{ln}{p}\right]+1\right)=\frac{1}{ln}\sum c_j\sum_{\frac{n}{j}\geqq p>\frac{n}{j+1}}\left[\frac{ln}{p}\right]+$$

$$+\frac{1}{ln}\sum_{j=1}^{\infty}c_j\sum_{\frac{n}{j}\geqq p>\frac{n}{j+1}}1\leqq S_n+\frac{1}{ln}\sum_{j=1}^{\infty}c_j\left(\left[\frac{n}{j}\right]-\left[\frac{n}{j+1}\right]\right).$$

Cette formule ayant lieu pour tout l on a

$$\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{a_i}\leqq S_n,\qquad\text{c. q. f. d.}$$

Lemme 2. *Les nombres*

$$c_1=1,\quad c_2=\frac{1}{2},\quad c_3=c_4=\frac{1}{6},\quad c_6=\frac{2}{15},$$

$$c_{10}=\frac{31}{420},\quad c_{15}=c_{16}=\frac{2021}{45045},\quad c_{22}=\frac{3565609}{116396280},$$

$$(6)\qquad c_{28}=\frac{37069832}{1673196525},\quad c_{35}=\frac{7864304243}{668534967100},$$

$$c_{36}=\frac{52102743271}{300840735190},\quad c_{58}=\frac{859309339517579297}{152082739560220208740},$$

$$c_j=0\ \textit{(pour tous les autres j)}$$

satisfont pour tout q naturel à l'inégalité

$$S_q\geqq 1$$

et pour tout $q\neq 5, 13, 19, 20, 31, 32, 61, 62$ *à l'inégalité*

$$S_q<\frac{31}{30}.$$

La règle de formation des nombres $c_1, c_2, \dots$ est la suivante:

Supposons que chaque c_j $(j<q)$ est déjà déterminé, alors c_q est le plus petit nombre non-négatif tel que $S_q \geqq 1$. On voit que

$$\text{(7)} \quad \lim S_q = \lim \sum_{j=1}^{58} c_j \sum_{\frac{q}{j} \geqq p > \frac{q}{j+1}} \frac{1}{p} = \sum_{j=1}^{58} \lim_{q \to \infty} \sum_{\frac{q}{j} \geqq p > \frac{q}{j+1}} \frac{1}{p} = \sum_{j=1}^{58} c_j \log \frac{j+1}{j} = c$$

et on vérifie aisément que $c = 1{,}0172\ldots < \frac{31}{30}$. Donc l'inégalité

$$\text{(8)} \qquad 1 \leqq S_q < \frac{31}{30}$$

est certainement vraie pour q suffisamment grand.

Pour $q \leqq 365$ le lémme peut être vérifié directement.

Pour $q > 365$ on peut démontrer l'inégalité (8) de la façon suivante:

Comme

$$\log \frac{\left[\frac{q}{j}\right]+1}{\left[\frac{q}{j+1}\right]+1} \leqq \sum_{\frac{q}{j} \geqq p > \frac{q}{j+1}} \frac{1}{p} \leqq \log \frac{\left[\frac{q}{j}\right]}{\left[\frac{q}{j+1}\right]},$$

on a

$$S_q \geqq \sum_{j=1}^{58} c_j \log \frac{\left[\frac{q}{j}\right]+1}{\left[\frac{q}{j+1}\right]+1} = \sum_{j=1}^{58} c_j \log \frac{j+1}{j} + \sum_{j=1}^{58} c_j \log \frac{j\left[\frac{q}{j}\right]+j}{(j+1)\left[\frac{q}{j+1}\right]+j+1} =$$

$$= c + \log(q+1) + \sum_{j=2}^{59} (c_j - c_{j-1}) \log\left(j\left[\frac{q}{j}\right]+j\right) = c + \sum_{j=2}^{59} (c_j - c_{j-1}) \log \frac{j\left[\frac{q}{j}\right]+j}{q+1}$$

et

$$S_q \leqq \sum_{j=1}^{58} c_j \log \frac{\left[\frac{q}{j}\right]}{\left[\frac{q}{j+1}\right]} = \sum_{j=1}^{58} c_j \log \frac{j+1}{j} + \sum_{j=1}^{58} c_j \log \frac{j\left[\frac{q}{j}\right]}{(j+1)\left[\frac{q}{j+1}\right]} =$$

$$= c + \log q + \sum_{j=2}^{59} (c_j - c_{j-1}) \log j\left[\frac{q}{j}\right] = c + \sum_{j=2}^{59} (c_j - c_{j-1}) \log \frac{j\left[\frac{q}{j}\right]}{q},$$

c'est-à-dire :

$$c - S_q \leqq \sum_{j=2}^{59} (c_{j-1} - c_j) \log \frac{j\left[\frac{q}{j}\right] + j}{q+1},$$

$$S_q - c \leqq \sum_{j=2}^{59} (c_{j-1} - c_j) \log \frac{q}{j\left[\frac{q}{j}\right]}.$$

Vu les inégalités

$$c_5 - c_6 = -c_6 < 0, \qquad 6\left[\frac{q}{6}\right] + 6 \geqq 3\left[\frac{q}{3}\right] + 3 > 3\left[\frac{q}{3}\right] \geqq 6\left[\frac{q}{6}\right],$$

$$c_9 - c_{10} = -c_{10} < 0, \qquad 10\left[\frac{q}{10}\right] + 10 \geqq 5\left[\frac{q}{5}\right] + 5 > 5\left[\frac{q}{5}\right] \geqq 10\left[\frac{q}{10}\right],$$

$$c_{14} - c_{15} = -c_{15} < 0, \qquad 15\left[\frac{q}{15}\right] + 15 \geqq 5\left[\frac{q}{5}\right] + 5 > 5\left[\frac{q}{5}\right] \geqq 15\left[\frac{q}{15}\right],$$

$$c_{21} - c_{22} = -c_{22} < 0, \qquad 22\left[\frac{q}{22}\right] + 22 \geqq 11\left[\frac{q}{11}\right] + 11 > 11\left[\frac{q}{11}\right] \geqq 22\left[\frac{q}{22}\right],$$

$$c_{27} - c_{28} = -c_{28} < 0, \qquad 28\left[\frac{q}{28}\right] + 28 \geqq 7\left[\frac{q}{7}\right] + 7 > 7\left[\frac{q}{7}\right] \geqq 28\left[\frac{q}{28}\right],$$

$$c_{34} - c_{35} = -c_{35} < 0, \qquad 35\left[\frac{q}{35}\right] + 35 \geqq 7\left[\frac{q}{7}\right] + 7 > 7\left[\frac{q}{7}\right] \geqq 35\left[\frac{q}{35}\right],$$

$$c_{35} - c_{36} = -\frac{1}{180} < 0, \qquad 36\left[\frac{q}{36}\right] + 36 \geqq 3\left[\frac{q}{3}\right] + 3 > 3\left[\frac{q}{3}\right] \geqq 36\left[\frac{q}{36}\right],$$

$$c_{57} - c_{58} = -c_{58} < 0, \qquad 58\left[\frac{q}{58}\right] + 58 \geqq 29\left[\frac{q}{29}\right] + 29 > 29\left[\frac{q}{29}\right] \geqq 58\left[\frac{q}{58}\right],$$

on obtient

$$c - S_q \leqq (c_1 - c_2) \log \frac{2\left[\frac{q}{2}\right] + 2}{q+1} + \left(c_2 - c_3 - c_6 - \frac{1}{180}\right) \log \frac{3\left[\frac{q}{3}\right] + 3}{q+1} +$$

$$+ (c_4 - c_{10} - c_{15}) \log \frac{5\left[\frac{q}{5}\right] + 5}{q+1} + (c_6 - c_{28} - c_{35}) \log \frac{7\left[\frac{q}{7}\right] + 7}{q+1} +$$

$$+ (c_{10} - c_{22}) \log \frac{11\left[\frac{q}{11}\right] + 11}{q+1} + c_{16} \log \frac{17\left[\frac{q}{17}\right] + 17}{q+1} + c_{22} \log \frac{23\left[\frac{q}{23}\right] + 23}{q+1} +$$

$$+ (c_{28} - c_{58}) \log \frac{29\left[\frac{q}{29}\right] + 29}{q+1} + c_{26} \log \frac{37\left[\frac{q}{37}\right] + 37}{q+1} + c_{58} \log \frac{59\left[\frac{q}{59}\right] + 59}{q+1}$$

et

$$S_q - c \leqq (c_1 - c_2)\log\frac{q}{2\left[\frac{q}{2}\right]} + \left(c_2 - c_3 - c_6 - \frac{1}{180}\right)\log\frac{q}{3\left[\frac{q}{3}\right]} +$$

$$+ (c_4 - c_{10} - c_{15})\log\frac{q}{5\left[\frac{q}{5}\right]} + (c_6 - c_{28} - c_{35})\log\frac{q}{7\left[\frac{q}{7}\right]} +$$

$$+ (c_{10} - c_{22})\log\frac{q}{11\left[\frac{q}{11}\right]} + c_{16}\log\frac{q}{17\left[\frac{q}{17}\right]} + c_{22}\log\frac{q}{23\left[\frac{q}{23}\right]} +$$

$$+ (c_{28} - c_{58})\log\frac{q}{29\left[\frac{q}{29}\right]} + c_{36}\log\frac{q}{37\left[\frac{q}{37}\right]} + c_{58}\log\frac{q}{59\left[\frac{q}{59}\right]}.$$

Or, comme les nombres $c_1 - c_2$, $c_2 - c_3 - c_6 - \frac{1}{180}$, $c_4 - c_{10} - c_{15}$, $c_6 - c_{28} - c_{35}$, $c_{10} - c_{22}$, c_{16}, c_{22}, $c_{28} - c_{58}$, c_{36} et c_{58} sont positifs et comme pour tout $j \leqq 59$ et $q > 365$ on a les inégalités

$$\left.\begin{array}{l} \log\dfrac{j\left[\frac{q}{j}\right]+j}{q+1} \leqq \log\dfrac{q+j}{q+1} \leqq \dfrac{j-1}{q+1} \\ \log\dfrac{q}{j\left[\frac{q}{j}\right]} \leqq \log\dfrac{q}{q-j+1} \leqq \dfrac{j-1}{q-j+1} \end{array}\right\} \leqq \frac{j-1}{308},$$

on trouve

$$|S_q - c| \leqq \frac{1}{308}\Big\{c_1 - c_2 + 2\left(c_2 - c_3 - c_6 - \frac{1}{180}\right) + 4(c_4 - c_{10} - c_{15}) +$$

$$+ 6(c_6 - c_{28} - c_{35}) + 10(c_{10} - c_{22}) + 16c_{16} + 22c_{22} + 28(c_{28} - c_{58}) +$$

$$+ 36c_{36} + 58c_{58}\Big\} < 0{,}0160$$

d'où

$$S_q \geqq c - 0{,}0160 \geqq 1{,}0172 - 0{,}0160 > 1,$$

$$S_q \leqq c + 0{,}0160 \leqq 1{,}0173 + 0{,}0160 < \frac{31}{30}, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Démonstration du théorème 1. Des lemmes 1 et 2 nous obtenons tout de suite que pour tout nombre naturel $n \neq 5$, 13, 19, 20, 31, 32, 61, 62 et pour toute suite satisfaisant à la condition (1) on a

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{a_i} < \frac{31}{30}.$$

Pour $n = 5$, 13, 19, 20, 31, 32, 61, 62 le théorème peut être vérifié directement.

Démonstration du théorème 2. Ce théorème résulte immédiatement des lemmes 1 et 2 et de la formule (7).

Démonstration du théorème 3. n étant donné, soit T_n l'ensemble des nombres entiers c $(0 < c \leqq n)$ jouissant de la propriété suivante:

Si p est le plus petit diviseur premier de c, alors $c \geqq \frac{n}{p}$.

Soit A_n l'ensemble de tous les $a \in T_n$ qui ne sont divisibles par aucun $c \in T_n$, $c \neq a$.

Pour $a_1 \in A_n$, $a_2 \in A_n$, $a_1 < a_2$, on a alors $[a_1, a_2] > n$. En effet, soit $a_1 = dq_1$, $a_2 = dq_2$, $(q_1, q_2) = 1$, $1 < q_1 < q_2$. Alors $[a_1, a_2] = dq_1q_2 = a_1q_2 > a_1q_1 \geqq n$.

Soit $a_1 < a_2 < \cdots \leqq n$ la suite des nombres appartenant à A_n et soit $\sum \frac{1}{a_i} = 1 - \varepsilon_n$; nous devons démontrer que $\lim \varepsilon_n = 0$.

Soit B_n l'ensemble de tous les nombres entiers $(0 < b \leqq n)$ qui ne sont divisibles par aucun $a \in A_n$. Il suffit évidemment de démontrer que $|B_n| = o(n)$.

On a $c \nmid b$ pour $c \in T_n$, $b \in B_n$, puisque chaque c est divisible par au moins un a. Donc les b sont caractérisés par la propriété suivante:

$d | b$ implique que, si p est le plus petit diviseur premier de d, alors $d < \frac{n}{p}$.

Soit $b = p_1 p_2 \cdots p_i$, $p_1 \geqq p_2 \geqq \cdots \geqq p_i$. Alors

$$\begin{array}{ll} p_1 < \dfrac{n}{p_1}, & p_1 < \sqrt{n}, \\ p_1 p_2 < \dfrac{n}{p_2}, & p_2 < \sqrt{\dfrac{n}{p_1}}, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ p_1 p_2 \cdots p_i < \dfrac{n}{p_i}, & p_i < \sqrt{\dfrac{n}{p_1 p_2 \cdots p_{i-1}}}. \end{array}$$

Désignons par B_n' l'ensemble de tous les nombres entiers b' $(0 < b' \leqq n)$ qui peuvent être représentés sous la forme

$$b' = k_1 k_2 \cdots k_i, \quad k_1 < \sqrt{n}, \quad k_j < \sqrt{\frac{n}{k_1 k_2 \cdots k_{j-1}}} \qquad (j = 2, \ldots, i)$$

(les k_j ne sont pas nécessairement premiers et allant en décroissant). En vertu du théorème de HARDY—RAMANUJAN on peut supposer que pour chaque $b' = k_1 \cdots k_i \in B'_n$

(9) $$i < 1{,}1 \log\log n.$$

En effet, le nombre des b' tels que $i \geqq 1{,}1 \log\log n$ est $o(n)$. Désignons pour l'abbréviation le nombre $\sqrt{\frac{n}{k_1 \cdots k_j}}$ par σ_j. Or, le nombre des b' pour les valeurs fixées de $i, k_1, \ldots, k_{i-1}$ est tout au plus $\sigma_{i-1} = \sqrt{\frac{n}{k_1 \cdots k_{i-1}}}$; pour les valeurs fixées de $i, k_1, \ldots, k_{i-2}$ il est tout au plus

$$\sum_{k_{i-1} < \sigma_{i-2}} \sigma_{i-1} = \sigma_{i-2} \sum_{k_{i-1} < \sigma_{i-2}} \frac{1}{\sqrt{k_{i-1}}} < \sigma_{i-2} \int_0^{\sigma_{i-2}} \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$= 2\sigma_{i-2} \sqrt{\sigma_{i-2}} = \frac{2n}{(k_1 \cdots k_{i-2})^{3/4}}.$$

Continuant ce raisonnement nous trouverons après i pas, que le nombre des b' pour i fixé est tout au plus $2^{\binom{i}{2}} n^{1-\frac{1}{2^i}} < \exp\left\{\frac{1{,}21}{2} \log 2 (\log\log n)^2\right\} \cdot \exp\{\log n \cdot (1 - 2^{-1{,}1 \log\log n})\}$. Il en résulte, en vertu de (9), que le nombre total des b' est tout au plus

$$1{,}1\, n \log\log n \cdot \exp\{(\log\log n)^2 - (\log n)^{1-1{,}1\log 2}\} < n e^{-(\log n)^\delta}$$

pour $n \geqq n_0$ et pour δ positif, convenablement choisi. Donc $|B_n| \leqq |B'_n| = o(n)$, ce qui achève la démonstration.

(Reçu le 17 janvier 1959)