Ein spezieller Diskriminantensatz über Polynome

Von LADISLAUS RÉDEI in Szeged

Über einem Körper K mit von 2 und 3 verschiedener Charakteristik legen wir uns ein Polynom vierten Grades in der Normalform

$$F(x)=x^4+px^2+qx+r \qquad (p, q, r \in K) \tag{1}$$

vor. Üblicherweise werde

$$G(y)=y^3-2py^2+(p^2-4r)y+q^2 \tag{2}$$

die kubische Resolvente von $F(x)$ genannt.

Anderseits betrachten wir über einem Erweiterungskörper von K ein Polynom

$$\begin{aligned} H(x,y) &= (ax^2+bx+c)y^2+(dx^2+ex+f)y+(gx^2+hx+k)= \\ &=(ay^2+dy+g)x^2+(by^2+ey+h)x+(cy^2+fy+k)= \\ &=ax^2y^2+dx^2y+bxy^2+gx^2+exy+cy^2+hx+fy+k. \end{aligned} \tag{3}$$

Es werde

$$A=\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{pmatrix} \tag{4}$$

die Koeffizientenmatrix von $H(x,y)$ genannt. (Also ist das (i,j) Element von A der Koeffizient von $x^{3-i}y^{3-j}$ in $H(x,y)$ für $i=1,2,3$ und $j=1,2,3$.) Die nach y bzw. x gebildete Diskriminante von $H(x,y)$ werden als

$$H_y(x,y)=(dx^2+ex+f)^2-4(ax^2+bx+c)(gx^2+hx+k) \tag{5}$$

bzw.

$$H_x(x,y)=(by^2+ey+h)^2-4(ay^2+dy+g)(cy^2+fy+k) \tag{6}$$

bezeichnen.

Wir wollen diejenigen $H(x,y)$ bestimmen, für die

$$H_y(x,y)=F(x), \quad H_x(x,y)=G(y) \tag{7}$$

besteht. Man sieht, daß mit $H(x,y)$ zusammen auch $-H(x,y)$ passend ist, weshalb wir zwischen $H(x,y)$ und $-H(x,y)$ nicht zu unterscheiden brauchen.

Satz. *Unter den sämtlichen gewünschten Polynomen $H(x, y)$ gibt es (bis auf das Vorzeichen) genau eins vom dritten Grade, die übrigen sind vom vierten Grade. Ihre Koeffizientenmatrizes sind*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & q \\ -\frac{1}{4} & \frac{p}{2} & r - \frac{p^2}{4} \end{pmatrix} \tag{8}$$

bzw.

$$A = a \begin{pmatrix} 1 & -4\alpha^2 - 2p & -4q\alpha + (p^2 - 4r) \\ -2\alpha & -2q & -4q\alpha^2 + 2(p^2 - 4r)\alpha + 2pq \\ \alpha^2 & -2p\alpha^2 - 2q\alpha - 4r & (p^2 - 4r)\alpha^2 + 2pq\alpha + q^2 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

wobei a und α in einem Erweiterungskörper von K *liegen und der Bedingung*

$$16a^2 F(\alpha) = 1 \tag{10}$$

unterworfen sind.

Bemerkung. Das der Matrix (8) entsprechende Polynom

$$H(x, y) = x^2 y - \frac{1}{4} y^2 + qx + \frac{p}{2} y - \frac{p^2 - 4r}{4} \tag{11}$$

nennen wir die *singuläre Lösung* unseres Problems. Dieses $H(x, y)$ liegt im Polynomring K$[x, y]$. Es kann sein, daß keine weitere Lösung $H(x, y)$ in K$[x, y]$ liegt. Das ist z. B. der Fall, wenn K der rationale Zahlkörper und $F(x) = x^4 + 1$ ist, da jetzt (10) als $16a^2(\alpha^4 + 1) = 1$ lautet, aber diese Gleichung ist im rationalen Zahlkörper bekanntlich unlösbar. Wir bemerken auch, daß unser Satz dem Wesen nach in die Theorie der algebraischen Funktionen gehört und eine Anwendung auf die Hasseschen Charaktersummen (über endlichen Körpern zuläßt), worauf wir ein andermal zurückkommen wollen.

Um den Satz zu beweisen setzen wir (5) und (6) in (7_1) bzw. (7_2) ein. Nach Koeffizientenvergleich drücken sich dann die Bedingungen (7) so aus:

(12) $\quad d^2 - 4ag = 1, \qquad b^2 - 4ac = 0,$

(13) $\quad 2de - 4ah - 4bg = 0, \qquad 2be - 4af - 4cd = 1,$

(14) $\quad 2df - 2bh = p, \qquad e^2 - 4ak - 2bh - 4cg = 0,$

(15) $\quad 2ef - 4bk - 4ch = q, \qquad 2eh - 4fg - 4dk = p^2 - 4r,$

(16) $\quad f^2 - 4ck = r, \qquad h^2 - 4gk = q^2.$

Und zwar entstehen (12), (13), (15), (16) so, daß man in (7) der Reihe nach die Koeffizienten von x^i bzw. y^i $(i = 4, 3, 1, 0)$ miteinander vergleicht. Bezüglich $i = 2$ würden auf ähnlichem Wege zunächst die Gleichungen

$$e^2 + 2df - 4ak - 4bh - 4cg = p, \quad e^2 + 2bh - 4ak - 4df - 4cg = -2p$$

entstehen, aber man sieht, daß diese zwei Gleichungen mit dem System (14) gleichbedeutend sind.

Es genügt zu beweisen, daß die sämtlichen Lösungen des Gleichungssystems (12) bis (16) nach Einsetzen in (4) eben zu (8) und (9) führen.

Erstens bestimmen wir die Lösungen mit $a=0$. In diesem Fall geht (12) in $d^2=1$, d. h. $d=\pm 1$ über. Da aber $H(x\, y)$ und $-H(x, y)$ gleichberechtigt sind, so darf man hierfür $d=1$ nehmen. Tut man das, so bekommt man aus (12_1), (12_2), (13_1), (13_2), (14_1), (14_2), (15_1), (15_2) der Reihe nach

$$d=1,\quad b=0,\quad e=0,\quad c=-\frac{1}{4},\quad f=\frac{p}{2},\quad g=0,\quad h=q,\quad k=r-\frac{p^2}{4}.$$

Diese Werte (mit $a=0$ zusammen) erfüllen auch (16_1) und (16_2). Das einsetzen in (4) führt eben zu (8). Somit ist die Hälfte des Satzes bewiesen.

Zweitens bestimmen wir die Lösungen mit $a\neq 0$. Bequemlichkeitshalber setzen wir

$$\varrho=\frac{1}{4a}. \tag{17}$$

Aus (12_1), (12_2), (13_1), (13_2), (14_2) entstehen dann der Reihe nach

$$g=(d^2-1)\varrho, \tag{18}$$

$$c=b^2\varrho, \tag{19}$$

$$h=-4b(d^2-1)\varrho^2+2de\varrho, \tag{20}$$

$$f=-4b^2d\varrho^2+2be\varrho-\varrho, \tag{21}$$

$$k=4b^2(d^2-1)\varrho^3-4bde\varrho^2+e^2\varrho. \tag{22}$$

Nach Einsetzen in (14_1), (15_1), (16_1) gehen diese in

$$p=-8b^2\varrho^2-2d\varrho, \tag{23}$$

$$q=-2e\varrho, \tag{24}$$

$$r=16b^4\varrho^4+8b^2d\varrho^3-4be\varrho^2+\varrho^2 \tag{25}$$

über. Wenn nun (17) bis (25) in (15_2), (16_2) eingesetzt werden, so gehen die letzteren in Erfüllung. Das bisherige bedeutet, daß das Gleichungssystem (12) bis (16) (im vorliegenden Fall $a\neq 0$) mit dem System (17) bis (25) äquivalent ist.

Wir setzen noch

$$\alpha=-2b\varrho. \tag{26}$$

Dann geht (23) in

$$2d\varrho=-2\alpha^2-p \tag{27}$$

über. Ferner läßt sich (25) wegen (26), (27) als

(28) $$\alpha^4 + p\alpha^2 + q\alpha + r = \varrho^2$$

schreiben. Hiernach und nach (17) berechnen sich $b, c, \ldots, k$ aus (18) bis (22) und aus (24), (26), (27) zu

$$\begin{aligned}
b &= -2a\alpha,\\
c &= a\alpha^2,\\
d &= -4a\alpha^2 - 2pa,\\
e &= -2qa,\\
f &= -2pa\alpha^2 - 2qa\alpha - 4ra,\\
g &= -4qa\alpha + (p^2 - 4r)a,\\
h &= -4qa\alpha^2 + 2(p^2 - 4r)a\alpha + 2pqa,\\
k &= (p^2 - 4r)a\alpha^2 + 2pqa\alpha + q^2a.
\end{aligned}$$

Werden diese in (4) eingesetzt (und der Skalarfaktor a herausgehoben), so entsteht eben (9). Schließlich geht (28) wegen (17) in (10) über. Somit ist der Satz bewiesen.

(Eingegangen am 25. August 1959)