Über die orthogonalen Funktionen. VIII (Eine notwendige Bedingung für die Konvergenz)

Von KÁROLY TANDORI in Szeged

Es sei $\{a_n\}$ eine gegebene, positive Zahlenfolge mit konvergentem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$. Jeder Indexfolge $\{n_i\}$ $(0=n_1<n_2<\cdots<n_i<\cdots)$ ordnen wir die Folge

$$A_k^2(\{n_i\})=a_{n_k+1}^2+\cdots+a_{n_{k+1}}^2 \qquad (k=1,2,\ldots)$$

zu. Mit I bezeichnen wir die Klasse derjenigen Indexfolgen $\{n_i\}$, für die die Folge $\{A_k(\{n_i\})\}$ monoton nichtwachsend ist.

Wir werden den folgenden Satz beweisen:

Satz I. *Ist die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{1}$$

für jedes im Intervall $[a, b]$ *orthonormierte Funktionensystem* $\{\varphi_n(x)\}$ *fast überall konvergent, so gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2(\{n_i\}) \log^2 k<\infty \tag{2}$$

für jede Indexfolge $\{n_i\} \in I$.[1])

Ist die Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ nichtwachsend, so gehört die Folge $\{n_i=i\}$ zu I, und so bekommt man dann, daß die Menchoff—Rademachersche Bedingung

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \log^2 k<\infty$$

[1]) Aus dem Beweis des Satzes ergibt sich, daß (2) sogar für diejenigen Indexfolgen $\{n_i\}$ gilt, für die die Folge $\{A_k(\{n_i\})\}$ „quasimonoton" im folgenden Sinne ist: es gibt eine Indexfolge $\{k_l\}$ und zwei positive Konstanten $C_1<C_2$ derart, daß die Folge $\{A_{k_l}(\{n_i\})\}$ monoton nichtwachsend ist und $C_1 A_{k_l}(\{n_i\}) \leqq A_k(\{n_i\}) \leqq C_2 A_{k_l}(\{n_i\})$ für $k_l<k<k_{l+1}$ $(l=1,2,\ldots)$ besteht.

notwendig ist. Also ist der obige Satz eine Verallgemeinerung eines von meinen früheren Sätzen.[2])

B e w e i s. Ist die Bedingung (2) nicht erfüllt, so gibt es eine Indexfolge $\{n_i\}$ aus I, für die also die Folge $A_k = A_k(\{n_i\})$ monoton nichtwachsend ist und

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \log^2 k = \infty$$

gilt. Nach meinem erwähnten Satz gibt es eine Indexfolge $\{N_m\}$ $(0 = N_1 < < N_2 < \cdots < N_m < \cdots)$, ein in $[a, b]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen[3]) $\{\Phi_k(x)\}$ und eine Folge einfacher Mengen[4]) $E_m (\subseteqq [a, b])$ derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Zu jedem $x \in E_m$ gibt es einen von x abhängigen Index $\nu_m (< N_{m+1} - N_m)$ derart, daß die Funktionenwerte $\Phi_{N_m}(x), \ldots, \Phi_{N_m+\nu_m}(x)$ gleiche Vorzeichen haben und die Ungleichung

$$(3) \qquad |A_{N_m} \Phi_{N_m}(x) + \cdots + A_{N_m+\nu_m} \Phi_{N_m+\nu_m}(x)| \geqq c$$

besteht, wo c eine von m und x unabhängige positive Konstante ist; die Mengen E_m sind stochastisch unabhängig und es gilt

$$(4) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{mes}(E_m) = \infty \text{ }^{5})$$

$(\operatorname{mes}(H)$ bezeichnet das Lebesguesche Maß der Menge $H)$.

[2]) K. TANDORI, Über die orthogonalen Funktionen. I, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 57—130.

[3]) D. h. für jede Funktion $\Phi_k(x)$ kann man das Intervall $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle derart zerlegen, daß die Funktion $\Phi_k(x)$ in jedem Teilintervall konstant ist.

[4]) D. h., E_m ist die Summe endlich vieler Intervalle.

[5]) Ist die Folge $\{A_k\}$ nur quasimonoton, so kann man den Beweis folgenderweise durchführen. Dann gibt es eine Indexfolge $\{k_l\}$ und zwei positive Konstanten $C_1 < C_2$ $(C_2 > 1)$ derart, daß die Folge $\{A_{k_l}\}$ monoton nichtwachsend ist und $C_1 A_{k_l} \leqq A_k \leqq C_2 A_{k_l}$ für $k_l < k < k_{l+1}$ $(l = 1, 2, \ldots)$ besteht. Wir betrachten die Folge $\{\bar{A}_k\}$ $(\bar{A}_k = C_2 A_{k_l}$ für $k_l \leqq \leqq k < k_{l+1}$; $l = 1, 2, \ldots)$. Dann ist $\bar{A}_k \geqq A_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ und so gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k^2 \log^2 k = \infty$. Da die Folge $\{\bar{A}_k\}$ monoton nichtwachsend ist, kann man nach meinem erwähnten Satz eine Indexfolge $\{N_m\}$ $(0 = N_1 < N_2 < \cdots < N_m < \cdots)$, ein in $[a, b]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\{\Phi_k(x)\}$ und eine Folge einfacher Mengen $E_m (\subseteqq [a, b])$ derart angeben, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind: Zu jedem $x \in E_m$ gibt es einen von x abhängigen Index $\nu_m (< N_{m+1} - N_m)$ derart, daß die Funktionenwerte $\Phi_{N_m}(x), \ldots, \Phi_{N_m+\nu_m}(x)$ gleiche Vorzeichen haben und die Ungleichung

$$(3') \qquad |\bar{A}_{N_m} \Phi_{N_m}(x) + \cdots + \bar{A}_{N_m+\nu_m} \Phi_{N_m+\nu_m}(x)| \geqq \frac{C_2}{C_1} c$$

mit einer von x und m unabhängigen Konstante c besteht, die Mengen E_m stochastisch unabhängig sind und es gilt (4). Aus (3') folgt (3) auf Grund der Definition von $\bar{A}_k$.

Mit Hilfe von $\{\Phi_k(x)\}$ werden wir ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ definieren, für welches die Reihe (1) fast überall divergiert. Damit wird der Satz bewiesen werden.

Wir wählen zuerst eine Folge $\{b_n\}$, die die folgenden Eigenschaften hat: a) die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)\varphi_n(x)$$

konvergiert fast überall; b) für

$$B_k^2=b_{n_k+1}^2+\cdots+b_{n_{k+1}}^2 \qquad (k=1,2,\ldots)$$

besteht die Ungleichung

$$B_k\geqq A_k \qquad (k=1,2,\ldots); \tag{5}$$

c) die Zahlen $\frac{b_n^2}{B_k^2}$ $(n_k<n\leqq n_{k+1};\ k=1,2,\ldots)$ sind rational.[6])

Jetzt werden wir ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ und eine Folge von einfachen Mengen $F_m(\subseteqq[a,b])$ definieren, für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind: a) zu jedem $x\in F_m$ gibt es einen von x abhängigen Index $\nu_m(<N_{m+1}-N_m)$ derart, daß die Ungleichung

$$|b_{n_{N_m}+1}\varphi_{n_{N_m}+1}(x)+\cdots+b_{n_{N_m+\nu_m}}\varphi_{n_{N_m+\nu_m}}(x)|\geqq c \tag{6}$$

besteht; b) die Mengen F_m sind stochastisch unabhängig und es gilt

$$\operatorname{mes}(F_m)=\operatorname{mes}(E_m). \tag{7}$$

Wir schreiben die endlich vielen rationalen Zahlen $\frac{b_n^2}{B_k^2}$ $(n_k<n\leqq n_{k+1};$ $k=1,2,\ldots,N_2-1)$ als Brüche von natürlichen Zahlen mit gemeinsamem Nenner auf:

$$\frac{b_n^2}{B_k^2}=\frac{p_n^{(1)}}{q_1}.$$

Wir teilen das Intervall $[a,b]$ in q_1 Teilintervalle gleicher Länge $I_r=[u_r,v_r]$ $(1\leqq r\leqq q_1)$ ein. Es sei für $n_k<n\leqq n_{k+1}$ $(k=1,2,\ldots,N_2-1)$

$$\varphi_n(x)=\frac{B_k}{b_n}\sum_{r=p_{n_k+1}^{(1)}+\cdots+p_{n-1}^{(1)}+1}^{p_{n_k+1}^{(1)}+\cdots+p_n^{(1)}}\Phi_k(I_r;\,x)$$

6) Diese Bedingungen sind erfüllt z. B., wenn b_n $(n=1,2,\ldots)$ rationale Zahlen mit $0\leqq b_n-a_n\leqq\frac{1}{n^2}$ $(n=1,2,\ldots)$ sind.

und

$$F_1=\bigcup_{r=1}^{q_1} E_1(I_r).^{7})$$

Die Funktionen $\varphi_n(x)$ $(n=1,2,\dots,n_{N_2})$ sind Treppenfunktionen. Sie sind normiert:

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)dx=\frac{B_k^2}{b_n^2}\sum_{r=p_{n_k+1}^{(1)}+\dots+p_{n-1}^{(1)}+1}^{p_{n_k+1}^{(1)}+\dots+p_n^{(1)}}\int_{u_r}^{v_r}\Phi_k^2(I_r;x)dx=$$

$$=\frac{B_k^2}{b_n^2}p_n^{(1)}\frac{1}{q_1}\int_a^b\Phi_k^2(x)dx=1.$$

Für $n\neq m$ $(n_k<n\leqq n_{k+1},\ n_l<m\leqq n_{l+1},\ 1\leqq k,l<N_2)$ gilt

$$\int_a^b\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx=\sum_r\int_{u_r}^{v_r}\Phi_k(I_r;x)\Phi_l(I_r;x)dx,$$

wo man über alle solche r zu summieren hat, für die im Intervall I_r weder $\varphi_n(x)$ noch $\varphi_m(x)$ identisch verschwindet. Jedes Glied der rechtsstehenden Summe ist 0, also sind die Funktionen $\varphi_n(x)$ $(1\leqq n\leqq n_{N_2})$ zueinander orthogonal. Da die Mengen $E_1(I_r)$ paarweise disjunkt sind, so hat man

$$\operatorname{mes}(F_1)=\sum_{r=1}^{q_1}\operatorname{mes}(E_1(I_r))=\frac{\operatorname{mes}(E_1)}{b-a}\sum_{r=1}^{q_1}\operatorname{mes}(I_r)=\operatorname{mes}(E_1),$$

also besteht (7) für $m=1$. Ist $x\in F_1$, so gibt es ein $r\,(1\leqq r\leqq q_1)$ so, daß $x\in E_1(I_r)$ gilt. Dann ist $y=\frac{b-a}{v_r}(x-u_r)+a\in E_1$ und so ergibt sich auf Grund von (3) und (5), daß es einen von y abhängigen Index $\nu_1(<N_2)$ derart gibt, daß die Funktionenwerte $\Phi_1(y),\dots,\Phi_{\nu_1}(y)$ gleiche Vorzeichen haben und die Ungleichung

$$|B_1\Phi_1(y)+\dots+B_{\nu_1}\Phi_{\nu_1}(y)|\geqq c$$

[7]) Es sei $f(x)$ eine in $[a,b]$ definierte Funktion und E eine meßbare Teilmenge von $[a,b]$. Für ein endliches Intervall $I=[u,v]$ wird

$$f(I;x)=\begin{cases} f\left((b-a)\dfrac{x-u}{v-u}+a\right) & \text{für } u<x<v,\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

gesetzt; ferner ist $E(I)$ das Bild von E durch die Transformation $y=v\frac{x-a}{b-a}+u$. Offenbar ist $\operatorname{mes}(E(I))=\frac{\operatorname{mes}(I)}{b-a}\operatorname{mes}(E)$.

besteht. Also gilt

$$|B_1 \Phi_1(I_r; x) + \cdots + B_{\nu_1} \Phi_{\nu_1}(I_r; x)| \geqq c.$$

Nach der Definition von $\varphi_n(x)$ ist aber

$$b_1 \varphi_1(x) + \cdots + b_{\nu_1} \varphi_{\nu_1}(x) = B_1 \Phi_1(I_r; x) + \cdots + B_{\nu_1} \Phi_{\nu_1}(I_r; x),$$

also ist (6) für $m = 1$ erfüllt.

Es sei $\mu (>1)$ beliebige natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq n_{N_\mu})$ und die einfachen Mengen F_m $(1 \leqq m < \mu)$ schon derart definiert sind, daß die Funktionen $\varphi_n(x)$ in $[a, b]$ ein orthonormiertes System bilden, (6), (7) für $m = 1, 2, \ldots, \mu - 1$ bestehen und die Mengen $F_1, \ldots, F_{\mu-1}$ stochastisch unabhängig sind.

Dann kann das Intervall $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle J_r $(1 \leqq r \leqq s)$ derart zerlegt werden, daß in jedem J_r die Funktionen $\varphi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq n_{N_\mu})$ konstant sind und jede Menge F_m $(1 \leqq m < \mu)$ die Summe gewisser J_r ist. Wir schreiben die endlich vielen rationalen Zahlen $\frac{b_n^2}{B_k^2}$ $(n_k < n \leqq n_{k+1};\ k = N_\mu, N_\mu + 1, \ldots, N_{\mu+1} - 1)$ als Brüche von natürlichen Zahlen mit gemeinsamem Nenner auf:

$$\frac{b_n^2}{B_k^2} = \frac{p_n^{(\mu)}}{q_\mu}$$

Wir teilen jedes J_r in q_μ Teilintervalle gleicher Länge $J_{r,\varrho} = [u_{r,\varrho}, v_{r,\varrho}]$ $(1 \leqq r \leqq s;\ 1 \leqq \varrho \leqq q_\mu)$ ein und wir setzen für $n_k < n \leqq n_{k+1}$ $(k = N_\mu, N_\mu + 1, \ldots, N_{\mu+1} - 1)$:

$$\varphi_n(x) = \frac{B_k}{b_n} \sum_{r=1}^{s} \sum_{\varrho = p_{n_k+1}^{(\mu)} + \cdots + p_{n-1}^{(\mu)} + 1}^{p_{n_k+1}^{(\mu)} + \cdots + p_n^{(\mu)}} \Phi_k(J_{r,\varrho}; x)$$

und

$$F_\mu = \bigcup_{r=1}^{s} \bigcup_{\varrho=1}^{q_\mu} E_\mu(J_{r,\varrho}).$$

Es ist leicht einzusehen, daß die Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq n_{N_{\mu+1}})$ in $[a, b]$ ein orthonormiertes System bilden. Da die Mengen $E_\mu(J_{r,\varrho})$ paarweise disjunkt sind, so hat man:

$$\operatorname{mes}(F_\mu) = \sum_{r=1}^{s} \sum_{\varrho=1}^{q_\mu} \operatorname{mes}(E_\mu(J_{r,\varrho})) = \frac{\operatorname{mes}(E_\mu)}{b-a} \sum_{r=1}^{s} \sum_{\varrho=1}^{q_\mu} \operatorname{mes}(J_{r,\varrho}) = \operatorname{mes}(E_\mu),$$

also besteht (7) für $m = \mu$. Ist $x \in F_\mu$, so gibt es solche r und ϱ $(1 \leqq r \leqq s,$ $1 \leqq \varrho \leqq q_\mu)$, daß $x \in E_\mu(J_{r,\varrho})$ gilt. Dann ist

$$y = \frac{b-a}{v_{r,\varrho}}(x - u_{r,\varrho}) + a \in E_\mu$$

und so ergibt sich auf Grund von (3) und (5), daß einen von y abhängigen Index $\nu_\mu(<N_\mu-N_{\mu-1})$ derart gibt, daß die Funktionenwerte $\Phi_{N_\mu}(y),\ldots$ $\ldots,\Phi_{N_\mu+\nu_\mu}(y)$ gleiche Vorzeichen haben und die Ungleichung

$$|B_{N_\mu}\Phi_{N_\mu}(y)+\cdots+B_{N_\mu+\nu_\mu}\Phi_{N_\mu+\nu_\mu}(y)|\geqq c$$

besteht. Also ist

$$|B_{N_\mu}\Phi_{N_\mu}(J_{r,\varrho};x)+\cdots+B_{N_\mu+\nu_\mu}\Phi_{N_\mu+\nu_\mu}(J_{r,\varrho};x)|\geqq c.$$

Nach der Definition von $\varphi_n(x)$ ist aber

$$b_{n_{N_\mu}+1}\varphi_{n_{N_\mu}+1}(x)+\cdots+b_{n_{N_\mu+\nu_\mu}}\varphi_{n_{N_\mu+\nu_\mu}}(x)=$$
$$=B_{N_\mu}\Phi_{N_\mu}(J_{r,\varrho};x)+\cdots+B_{N_\mu+\nu_\mu}\Phi_{N_\mu+\nu_\mu}(J_{r,\varrho};x),$$

also besteht (6) für $m=\mu$. Offensichtlich sind die Mengen $F_1,\ldots,F_\mu$ stochastisch unabhängig.

Mit vollständiger Induktion ergibt sich also ein Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ und eine Mengenfolge $\{F_m\}$ derart, daß die erwähnten Bedingungen erfüllt werden.

Ist $x\in\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}F_m$, so besteht (6) für unendlich viele m, folglich ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\varphi_n(x) \tag{8}$$

im Punkt x divergent. Auf Grund von (4), (7) und der stochastischen Unabhängigkeit der Folge $\{F_m\}$ ergibt sich mit Benützung des zweiten Borel—Cantellischen Lemmas (s. meine frühere Arbeit a. a. O.[2]), daß

$$\operatorname{mes}(\overline{\lim_{m\to\infty}}F_m)=b-a$$

ist. Also divergiert die Reihe (8) fast überall. Auf Grund von c) ergibt sich endlich, daß die mit diesen $\varphi_n(x)$ gebildete Reihe (1) fast überall divergiert.

Damit haben wir Satz I bewiesen.

Mit derselben Methode kann auch eine notwendige Bedingung für die $(C,1)$-Summierbarkeit angegeben werden. Wir bezeichnen mit $\bar{I}$ die Klasse der Indexfolgen $\{n_i\}$, für die die Folge $\{A_k(\{2^{n_i}\})\}$ monoton nichtwachsend ist (oder mindestens „quasimonoton" ist, s. Fußnote[1]). Es gilt der folgende Satz:

Satz II. *Ist die Orthogonalreihe* (1) *für jedes orthonormierte Funktionensystem* $\{\varphi_n(x)\}$ *fast überall* $(C,1)$*-summierbar, so gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_k^2(\{2^{n_i}\})\log^2 k<\infty \tag{9}$$

für jede Indexfolge $\{n_i\}\in\bar{I}$.

Wir nehmen an, daß (9) nicht erfüllt wird. Ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \tag{10}$$

divergent, dann folgt, daß die Rademachersche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(x)$ fast überall nicht $(C, 1)$-summierbar ist.[8]) Ist aber (10) konvergent, so kann man mit der obigen Methode ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ konstruieren derart, daß die Folge der 2^m-ten Partialsummen der mit diesen $\varphi_n(x)$ gebildeten Reihe (1) fast überall divergiert. Nach einem Satz von A. N. KOLMOGOROFF[9]) ist dann die Reihe (1) fast überall nicht $(C, 1)$-summierbar.

Erfüllt die Folge $\{a_n\}$ die Bedingung $n a_n^2 \geqq (n+1) a_{n+1}^2$ $(n=1, 2, \ldots)$, so gehört die Folge $n_k = k$ $(k=1, 2, \ldots)$ zu $\bar{I}$. Für diese Indexfolge reduziert sich (9) auf die Bedingung von S. KACZMARZ und D. MENCHOFF:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 (\log\log n)^2 < \infty.$$

Also ist Satz II eine Verallgemeinerung eines von meinen früheren Sätzen.[10])

(Eingegangen am 18. September 1959)

8) A. ZYGMUND, On the convergence of lacunary trigonometric series, *Fundamenta Math.*, **16** (1930) 90—107.

9) A. N. KOLMOGOROFF, Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, *Fundamenta Math.*, 5 (1924), 96—97.

10 K. TANDORI, Über die orthogonalen Funktionen. II (Summation), *Acta Sci. Math.*, 18 (1957), 149—168.