Über das Rédeische schiefe Produkt vom Typ $G \odot \Gamma$

Von ZVONIMIR JANKO in Lištica (Jugoslavien)

Es sei $G \odot \Gamma$ das schiefe Produkt (vgl. [**1**] § 13) zweier Gruppen G, Γ mit den Elementen (a, α) $(a \in G, \alpha \in \Gamma)$ erklärt durch

(1) $$(a, \alpha)(b, \beta) = (a^\beta b^\alpha, \alpha^b \beta^a) \cdot \qquad (a^\beta, b^\alpha \in G; \alpha^b, \beta^a \in \Gamma).$$

F. Rühs hat (in [**2**]) die Gruppe $G \odot \Gamma$ untersucht und gezeigt, daß diese Gruppe zum direkten Produkt $G \times \Gamma$ isomorph ist, jedoch ist sein Beweis unvollständig [1]), obwohl seine Behauptung richtig ist, wie es sich aus Folgendem erhellt.

Wir beweisen zunächst:

Satz 1. *Jede Gruppe $G \odot \Gamma$ ist zu einer solchen Gruppe $G \odot \Gamma$ isomorph, die (e, ε) zum Einselement hat, wo e, ε die Einselemente von G bzw. Γ sind.*

Beweis. Wenn (u, λ) das Einselement aus $G \odot \Gamma$ ist, dann ist nach (1)

$$(a, \alpha)(u, \lambda) = (a^\lambda u^\alpha, \alpha^u \lambda^a) = (u, \lambda)(a, \alpha) = (u^\alpha a^\lambda, \lambda^a \alpha^u) = (a, \alpha).$$

Daraus folgt

(2) $$a^\lambda u^\alpha = u^\alpha a^\lambda = a,$$

(3) $$\alpha^u \lambda^a = \lambda^a \alpha^u = \alpha$$

für alle $a \in G, \alpha \in \Gamma$.

Wir wenden (2) mit $a = u$ und (3) mit $\alpha = \lambda$ an. So folgt

(4) $$u^\alpha = r, \qquad \lambda^a = \varrho$$

für alle $\alpha \in \Gamma$ bzw. $a \in G$, wobei r und ϱ feste Elemente aus G bzw. Γ sind.

(2), (3) und (4) zeigen auch, daß r, ϱ Zentrumselemente aus G bzw. Γ sind, da a^λ, α^u alle Elemente von G bzw. Γ durchlaufen.

1) Die Unvollständigkeit des Beweises in der erwähnten Arbeit besteht darin, daß an zwei Stellen gewisse „Transformationen“ von (1) verwendet werden, die aber unzulässig sind, da sie das Auftreten von vier Funktionen bewirken, wogegen in (1) nur zwei Funktionen figurieren.

Aus $(u, \lambda)(u, \lambda) = (r^2, \varrho^2) = (u, \lambda)$ folgen die Beziehungen

(5) $$u = r^2, \qquad \lambda = \varrho^2.$$

Wir betrachten die Permutation Π und ihre Inverse Π^{-1}, definiert durch

$$\Pi(a, \alpha) = (u^{-1}a, \lambda^{-1}\alpha), \qquad \Pi^{-1}(a, \alpha) = (ua, \lambda\alpha).$$

Man definiere nach RÉDEI ([1] § 2) in der Menge der Paare (a, α) eine neue Multiplikation durch

$$(a, \alpha) \times (b, \beta) = \Pi(\Pi^{-1}(a, \alpha)\,\Pi^{-1}(b, \beta)) =$$
$$= (u^{-1}(ua)^{\lambda\beta}(ub)^{\lambda\alpha}, \lambda^{-1}(\lambda\alpha)^{ub}(\lambda\beta)^{ua}),$$

wodurch eine zu $G \odot \Gamma$ isomorphe Gruppe entsteht. Es folgt nach (5) unter Beachtung, daß r, ϱ Zentrumselemente sind:

(6) $$(a, \alpha) \times (b, \beta) = (r^{-1}(ua)^{\lambda\beta} r^{-1}(ub)^{\lambda\alpha}, \ \varrho^{-1}(\lambda\alpha)^{ub} \varrho^{-1}(\lambda\beta)^{ua}).$$

Dies ist wieder von der Form (1) mit $r^{-1}(ua)^{\lambda\alpha}$, $\varrho^{-1}(\lambda\alpha)^{ua}$ statt a^{α}, α^{a}. Die neue Gruppe ist also wieder vom Typ $G \odot \Gamma$, aber mit dem Einselement (e, ε), denn es ist

$$\Pi(u, \lambda) = (e, \varepsilon),$$ w. z. b. w.

Satz 2. *In der Gruppe $G \odot \Gamma$ mit der Einheit (e, ε) darf man sich auf den Fall*

$$e^{\alpha} = e, \qquad \varepsilon^{a} = \varepsilon$$

beschränken.

Beweis. Aus $(a, \alpha)(e, \varepsilon) = (a^{\varepsilon}e^{\alpha}, \alpha^{e}\varepsilon^{a}) = (e, \varepsilon)(a, \alpha) = (e^{\alpha}a^{\varepsilon}, \varepsilon^{a}\alpha^{e}) = (a, \alpha)$ folgt

(7) $$a^{\varepsilon}e^{\alpha} = e^{\alpha}a^{\varepsilon} = a, \qquad \alpha^{e}\varepsilon^{a} = \varepsilon^{a}\alpha^{e} = \alpha$$

für alle $a \in G$ und alle $\alpha \in \Gamma$. Also muß $e^{\alpha} = s$ für alle $\alpha \in \Gamma$, sowie $\varepsilon^{a} = \sigma$ für alle $a \in G$ bestehen, wobei s und σ feste Elemente aus G bzw. Γ sind. Insbesondere gilt

$$(e, \varepsilon)(e, \varepsilon) = (s^2, \sigma^2) = (e, \varepsilon),$$

also

(8) $$s^2 = e, \qquad \sigma^2 = \varepsilon.$$

Aus (7) folgt weiter

$$a^{\varepsilon}s = sa^{\varepsilon} = a, \qquad \alpha^{e}\sigma = \sigma\alpha^{e} = \alpha,$$

und diese Beziehungen zeigen, daß s und σ Zentrumselemente von G bzw. Γ sind, denn $a^{\varepsilon}, \alpha^{e}$ alle Elemente von G bzw. Γ durchlaufen.

Wenn wir jetzt statt a^{α}, α^{a} die neuen Funktionen $a^{\alpha}s$, $\alpha^{a}\sigma$ nehmen, dann gilt

$$e^{\alpha}s = s^2 = e, \qquad \varepsilon^{a}\sigma = \sigma^2 = \varepsilon, \tag{9}$$

und weiter

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (a^{\beta}sb^{\alpha}s, \alpha^{b}\sigma\beta^{a}\sigma) = (a^{\beta}b^{\alpha}s^2, \alpha^{b}\beta^{a}\sigma^2) = (a^{\beta}b^{\alpha}, \alpha^{b}\beta^{a}), \tag{10}$$

da s, σ Zentrumselemente sind. Wegen (9) und (10) haben wir Satz 2 bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] L. Rédei, Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, *Journal f. d. reine u. angew. Math.*, **188** (1950), 201—227.

[2] F. Rühs, Über ein spezielles Rédeisches schiefes Produkt in der Gruppentheorie, *Acta Sci. Math.*, **16** (1955), 160—164.

(Eingegangen am 27. August 1959)