Über die orthogonalen Polynomsysteme

Von LÁSZLÓ LEINDLER in Szeged

§ 1. Einleitung

Nach dem bekannten Satz von MENCHOFF und RADEMACHER ist die Bedingung $\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n < \infty$ hinreichend dafür, daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ für jedes orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall konvergiert[1]). MENCHOFF [1]—[2] hat diesem *Konvergenzsatz* auch einen *Divergenzsatz* gegenüberstellt:

Zu jeder positiven Zahlenfolge $W(n)$, welche die Bedingung $W(n) = o(\log n)$ erfüllt, kann man eine Zahlenfolge $\{a_n\}$ und ein im Intervall (a, b) gleichmäßig beschränktes, orthonormiertes Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ finden, derart, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 W^2(n)$$

konvergiert, und

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

in (a, b) überall divergiert.

Mit zusätzlichen Überlegungen hat MENCHOFF [3] diesen Divergenzsatz weiter so verschärft, daß man die Funktionen $\varphi_n(x)$ auch als Polynome wählen kann.

Neuerdings hat Herr K. TANDORI eine Reihe von weiteren Divergenzsätzen bewiesen, wobei immer die Existenz eines orthonormierten Funktionensystems mit gewissen Divergenzeigenschaften behauptet wird. Nun besteht die Frage, ob auch die Tandorischen Ergebnisse derart verschärft werden können, daß man für die orthonormierten Funktionensysteme mit den betreffenden Divergenzeigenschaften auch Polynomsysteme wählen kann.

---

[1]) In dieser Arbeit benützen wir den Logarithmus mit der Basis 2. Wir betrachten nur *reellwertige* Funktionen, undzwar auf einem *endlichen* Intervall.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit diesem Problem. Unter Benützung der Grundideen von MENCHOFF, die er im Beweis seines verschärften Satzes angewendet hat, werden wir zuerst einen allgemeinen Approximationssatz beweisen (Satz 1), der uns gestattet, von orthogonalen Funktionensystemen allgemeinen Typs zu orthogonalen Polynomsystemen unter Erhaltung gewisser Eigenschaften zu übergehen.

Satz 1. *Es sei* $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=1,2,\dots)$ *ein im Grundintervall* (a,b) *orthonormiertes Funktionensystem. Dann kann zu jeder positiven Zahlenfolge* $\{\varepsilon_i\}$ $(i=1,2,\dots)$ *und zu jeder Indexfolge* $\{N_i\}$ $(0=N_0<N_1<\dots<N_i<\dots)$ *ein in* (a,b) *orthonormiertes Polynomsystem* $\{P_n(x)\}$ $(n=1,2,\dots)$ *und eine Folge von meßbaren Mengen* $G_i(\subseteqq(a,b))$ $(i=1,2,\dots)$ *derart angegeben werden, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind: für* $x\in CG_i$[2] *und für jedes* n *mit* $N_{i-1}<n\leqq N_i$ *gilt*

$$|\varphi_n(x)-(-1)^{j_i(x)}P_n(x)|\leqq\varepsilon_i \qquad (j_i(x)=0 \textit{ oder } 1), \tag{1.1}$$

$$\mu(G_i)\leqq\varepsilon_i. \tag{1.2}$$

Man kann die $P_n(x)$ *sogar so wählen, daß*

$$|P_n(x)|\leqq 2(\sup_{a<x<b}|\varphi_n(x)|+1)\,^{3)} \tag{1.3}$$

gilt. Ist also insbesondere das Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ *im Grundintervall* (a,b) *gleichmäßig beschränkt, so kann das Polynomsystem* $\{P_n(x)\}$ *ebenfalls gleichmäßig beschränkt gewählt werden.*

Es ist vielleicht von gewissem Interesse zu bemerken, daß eine derartige Approximation nur für ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=1,2,\dots)$ möglich ist; es gilt nämlich der folgende

Satz 1*. *Es sei* $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=1,2,\dots)$ *ein im Intervall* (a,b) *definiertes System von quadratisch integrierbaren Funktionen. Wir nehmen an, daß es zu jeder positiven Zahlenfolge* $\{\varepsilon_i\}$ $(i=1,2,\dots)$ *und Indexfolge* $\{N_i\}$ $(0=N_0<<N_1<\dots<N_i<\dots)$ *ein solches in* (a,b) *orthonormiertes Polynomsystem* $\{P_n(x)\}$ *und eine solche Folge von meßbaren Mengen* $E_i(\subseteqq(a,b))$ $(i=1,2,\dots)$ *gibt, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind: für* $x\in CE_i$ *und jedes* n *mit* $N_{i-1}<n\leqq N_i$ *gilt*

$$|\varphi_n(x)-(-1)^{j_i(x)}P_n(x)|\leqq\varepsilon_i \qquad (j_i(x)=0 \textit{ oder } 1), \tag{1.4}$$

$$\mu(E_i)\leqq\varepsilon_i, \tag{1.5}$$

---

[2]) CH bezeichnet immer die Komplementärmenge der Menge H in bezug auf das jeweils betrachtete Grundintervall (a,b). Mit $\mu(H)$ wird das Lebesguesche Maß der Menge H bezeichnet.

[3]) Natürlich ist diese Bedingung nur in dem Falle von Bedeutung, daß $\sup_{a<x<b}|\varphi_n(x)|$ endlich ist.

und für $x \in (a, b)$ *und für jedes* n *gilt*

$$|P_n(x)| \leqq K_n |\varphi_n(x)| + 1, \tag{1.6}$$

wobei K_n *eine nur vom Index* n *abhängige positive Zahl ist. Dann ist* $\{\varphi_n(x)\}$ *ein im Intervall* (a, b) *orthonormiertes Funktionensystem.*

Aus Satz 1 ergibt sich der folgende

Satz 2. *Es seien vorgegeben: eine reelle Zahlenfolge* $\{s_n\}$, *ein im Intervall* (a, b) *orthonormiertes Funktionensystem* $\{\varphi_n(x)\}$, *eine Folge von meßbaren Mengen* $G_m(\subseteqq(a, b))$, *eine Indexfolge* $\{N_m\}$ $(0 = N_0 < N_1 < \cdots < N_m < \cdots)$ *und eine positive Zahl* ε. *Wir nehmen an, daß* $\mu(\overline{\lim_{n \to \infty}} G_m) = b - a$ *ist, und daß es für jedes* $x \in G_m$ *einen Index* $n_m(x)$ $(< N_{m+1} - N_m)$ *derart gibt, daß die Ungleichung*

$$|s_{N_m+1}\varphi_{N_m+1}(x) + \cdots + s_{N_m+n_m(x)}\varphi_{N_m+n_m(x)}(x)| \geqq D(m) \tag{1.7}$$

besteht, wo $\{D(m)\}$ *eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge ist.*

Dann kann ein in (a, b) *orthonormiertes Polynomsystem* $\{P_n(x)\}$ *angegeben werden, derart, daß die Ungleichung*

$$|s_{N_m+1}P_{N_m+1}(x) + \cdots + s_{N_m+n_m(x)}P_{N_m+n_m(x)}(x)| \geqq (1-\varepsilon)D(m) \tag{1.8}$$

für fast alle $x \in (a, b)$ *bei unendlich vielen Werten von* m *erfüllt wird. Ist das Funktionensystem* $\{\varphi_n(x)\}$ *in* (a, b) *gleichmäßig beschränkt, so kann auch das System* $\{P_n(x)\}$ *gleichmäßig beschränkt gewählt werden.*

Unter Benützung der Sätze 1 und 2 können wir die Divergenzsätze von K. TANDORI im schon erwähnten Sinne verschärfen. Es handelt hier um die folgenden Divergenzsätze.[4])

Satz A. (TANDORI [1]) *Es sei* $\{a_n\}$ *eine positive, monoton nichtwachsende Zahlenfolge, für die die Bedingung*

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n = \infty$$

erfüllt ist. Dann existiert ein System $\{\varphi_n(x)\}$ *derart, daß die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* \varphi_n(x)$$

für jede Koeffizientenfolge $\{a_n^*\}$ *mit* $a_n^* \geqq \eta a_n$ $(n = 0, 1, \ldots; \eta > 0)$ *fast überall divergiert, das System* $\{\varphi_n(x)\}$ *kann sogar beschränkt gewählt werden.*

---

[4]) Wobei $\{\varphi_n(x)\}$ immer ein in (a, b) orthonormiertes Funktionensystem bedeutet; das System $\{\varphi_n(x)\}$ heißt beschränkt, wenn $|\varphi_n(x)| \leqq K$ für alle $x \in (a, b)$ und $n = 1, 2, \ldots$ gilt.

Satz B. (TANDORI [1]) *Es sei* $\{l_n\}$ *eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, welche die Bedingung*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log^2 n}{l_n^2} = \infty$$

erfüllt. Dann existiert ein System $\{\varphi_n(x)\}$ *derart, daß*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{l_N} \left| \sum_{n=0}^{N} \varphi_n(x) \right| = \infty$$

fast überall gilt. Das System $\{\varphi_n(x)\}$ *kann auch beschränkt gewählt werden.*

Satz C. (TANDORI [1]) *Es sei* $\{\lambda_n\}$ *eine positive Zahlenfolge mit*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = \infty. \tag{1.9}$$

Dann existiert ein System $\{\varphi_n(x)\}$ *mit*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\lambda_N} |\varphi_N(x)| = \infty, \tag{1.10}$$

fast überall in (a, b).

Satz D. (TANDORI [2]) *Es sei* $\{w(n)\}$ *eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, die die Bedingung* $w(n) = o(\log n)$ *erfüllt. Dann kann eine Koeffizientenfolge* $\{a_n\} \in l^2$ [5]) *und ein System* $\{\varphi_n(x)\}$ *derart angegeben werden, daß die orthogonale Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{1.11}$$

in (a, b) *fast überall* $(C, 1)$*-summierbar ist und jedoch*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{w(N)} \left| \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n(x) \right| = \infty$$

fast überall besteht. Das System $\{\varphi_n(x)\}$ *kann auch beschränkt gewählt werden.*

Satz E. (TANDORI [1]) *Es sei* $\{w(n)\}$ *eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, welche die Bedingung* $w(n) = o(\log \log n)$ *erfüllt. Dann gibt es eine Koeffizientenfolge* $\{a_n\} \in l^2$ *und ein System* $\{\varphi_n(x)\}$ *derart, daß für jedes* $\alpha > 0$

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{w(N)} \left| \frac{1}{A_N^{(\alpha)}} \sum_{\nu=0}^{N} A_{N-\nu}^{(\alpha)} a_\nu \varphi_\nu(x) \right| = \infty \qquad \left(A_m^{(\alpha)} = \binom{m+\alpha}{m} \right)$$

fast überall besteht. Das System $\{\varphi_n(x)\}$ *kann auch beschränkt gewählt werden.*

---

[5]) Mit l^2 wird die Klasse der Koeffizientenfolgen $\{a_n\}$ bezeichnet, für die $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$ ist.

Satz F. (TANDORI [1]) *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge mit* (1.9). *Dann gibt es ein System $\{\varphi_n(x)\}$, für welches bei jedem $\alpha(>0)$*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{\lambda_N}\left|\frac{1}{A_N^{(\alpha)}}\sum_{\nu=0}^{N}A_{N-\nu}^{(\alpha)}\varphi_\nu(x)\right|=\infty$$

fast überall gilt.

Satz G. (TANDORI [2]) *Es sei $\{a_n^*\}\in l^2$ eine positive Zahlenfolge, für die die Bedingungen*

$$\sqrt{n}\,a_n^*\geqq\sqrt{n+1}\,a_{n+1}^*\quad(n=1,2,\ldots),\quad\sum_{n=2}^{\infty}(a_n^*)^2(\log\log n)^2=\infty$$

erfüllt sind. Dann existiert ein System $\{\varphi_n(x)\}$ derart, daß die Reihe (1.11) *für jede Koeffizientenfolge $\{a_n\}\in l^2$ mit $a_n\geqq\eta a_n^*$ $(n=1,2,\ldots;\ \eta>0)$ fast überall nicht $(C,1)$-summierbar ist.*

Satz H. (TANDORI [2]) *Es sei $\{w(n)\}$ eine positive Zahlenfolge mit $\sqrt{n}=o(w(n))$. Dann kann eine positive Koeffizientenfolge $\{a_n\}\in l^2$ und ein System $\{\varphi_n(x)\}$ derart angegeben werden, daß*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{w(n)}<\infty$$

gilt und die Reihe (1.11) *fast überall nicht $(C,1)$-summierbar ist.*

Satz I. (TANDORI [4]) *Es gibt ein System $\{\varphi_n(x)\}$, eine Koeffizientenfolge $\{a_n\}\in l^2$ und eine Indexfolge $\{n_k\}$ derart, daß die Reihe* (1.11) *in (a,b) fast überall zu einer quadratisch integrierbaren Funktion $f(x)$ $(C,1)$-summierbar ist, aber die Folge der Mittel*

$$\frac{S_{n_1}(x)+\cdots+S_{n_N}(x)}{N}$$

in (a,b) fast überall divergiert, wobei $S_k(x)$ die k-te Partialsumme der Reihe (1.11) *bezeichnet. Das System $\{\varphi_n(x)\}$ kann in (a,b) beschränkt gewählt werden.*

Satz J. (TANDORI [3]) *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendlich strebende Zahlenfolge, für welche die Bedingung* (1.9) *erfüllt wird. Dann kann man ein System $\{\varphi_n(x)\}$ derart angeben, daß fast überall in (a,b) gilt:*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{\lambda_N}\int_a^b\left|\sum_{n=1}^{N}\varphi_n(x)\varphi_n(t)\right|dt>\delta(>0)\tag{1.12}$$

und

$$(1.13) \qquad \int_a^b \left| \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt = O(\lambda_N).$$

Satz K. (TANDORI [3]) *Es sei α ein gegebener positiver Parameterwert und $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendliche strebende Zahlenfolge, für welche die Bedingung* (1.9) *erfüllt ist. Dann existiert ein von α abhängiges System $\{\varphi_n^{(\alpha)}(x)\}$ derart, daß im Intervall (a, b) fast überall*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\lambda_N} \int_a^b \left| \frac{1}{A_N^{(\alpha)}} \sum_{n=0}^{N} A_{N-n}^{(\alpha)} \varphi_n^{(\alpha)}(x)\varphi_n^{(\alpha)}(t) \right| dt > \varrho (> 0)$$

und

$$\int_a^b \left| \frac{1}{A_N^{(\alpha)}} \sum_{n=0}^{N} A_{N-n}^{(\alpha)} \varphi_n^{(\alpha)}(x)\varphi_n^{(\alpha)}(t) \right| dt = O(\lambda_N)$$

gilt.

Satz L. (TANDORI [5]) *Sei $\{\lambda(n)\}$ eine positive, monoton gegen Unendlich konvergierende Zahlenfolge mit $\lambda(n) = O(\log^2 n)$. Dann existiert ein System $\{\varphi_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ mit den folgenden Eigenschaften: es gilt für fast alle $x \in (a, b)$*

$$\int_a^b \left| \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\varphi_k(t) \right| dt = O(\lambda(n)) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

und für jede positive Zahlenfolge $\{w(n)\}$ mit $w(n) = o(\lambda(n))$ gibt es eine Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ mit konvergentem

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 w(n)$$

und fast überall divergentem

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x).$$

Auf Grund der Sätze 1—2 werde ich beweisen:

Satz 3. *Jeder der Sätze A—L läßt sich so verschärfen, daß das betreffende Orthonormalsystem $\{\varphi_n(x)\}$ aus Polynomen besteht.*

*

Ich möchte dem Herrn Dozent KÁROLY TANDORI meinen aufrichtigen Dank aussprechen, daß er mich in dieses Thema eingeführt und bei der

Fertigstellung dieser Arbeit mit wertvollen Ratschlägen unterstützt hat. Herrn Professor BÉLA SZ.-NAGY bin ich für seine wertvollen Ratschläge ebenfalls dankbar.

§ 2. Zwei Hilfssätze von Menchoff

Zum Beweis des Satzes 1 benötigen wir die folgenden zwei bekannten Hilfssätze (siehe MENCHOFF [3], 29—30, bzw. 32—33).

Hilfssatz I. *Es seien* $\pi_r(x)$ $(1 \leqq r \leqq N)$ *stetige Funktionen und* $\Phi_s(x)$ $(1 \leqq s \leqq N')$ *Treppenfunktionen*[6]) *im Intervall* $[0, 1]$. *Dann kann zu jedem positivem* ε *eine meßbare Menge* $E(\subseteqq(0,1))$ *und ein Funktionensystem* $\{F_s(x)\}$ $(1 \leqq s \leqq N')$ *derart angegeben werden, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. $\mu(E) < \varepsilon$,
2. *jede Funktion* $F_s(x)$ *ist in* $[0, 1]$ *stetig,*
3. *für* $x \in CE$ *gilt* $F_s(x) = (-1)^{j(x)} \Phi_s(x)$, *wobei* $j(x)$ *gleich* 0 *oder* 1 *ist* $(1 \leqq s \leqq N')$,
4. $\max\limits_{0 \leqq x \leqq 1} |F_s(x)| \leqq \max\limits_{0 \leqq x \leqq 1} |\Phi_s(x)|$ $(1 \leqq s \leqq N')$,
5. $\left|\int\limits_0^1 \pi_r(x) F_s(x)\,dx\right| < \varepsilon$ $(1 \leqq r \leqq N,\ 1 \leqq s \leqq N')$.

Hilfssatz II. *Seien* $\pi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq R)$ *und* $Q_m(x)$ $(R < m \leqq R')$ *nicht identisch verschwindende Polynome. Man setze*

$$\mu = \max_{n,m} \{ \max_{0 \leqq x \leqq 1} |\pi_n(x)|,\ \max_{0 \leqq x \leqq 1} |Q_m(x)| \},$$

$$G = \min_{n,m} \left\{ \int\limits_0^1 \pi_n^2(x)\,dx,\ \int\limits_0^1 Q_m^2(x)\,dx \right\},$$

$$\sigma = \max_{\substack{n,m,l \\ m \neq l}} \left\{ \left| \int\limits_0^1 \pi_n(x) Q_m(x)\,dx \right|,\ \left| \int\limits_0^1 Q_l(x) Q_m(x)\,dx \right| \right\},$$

$$\gamma = \max \left\{ 4R', \mu, \frac{1}{G}, 1 \right\} \quad \textit{und} \quad \lambda = \gamma^{6(R'-R+1)}.$$

Ist das System $\{\pi_n(x)\}$ $(1 \leqq n \leqq R)$ *in* $(0, 1)$ *orthogonal und gilt*

$$\sigma < \frac{1}{\lambda},$$

[6]) D. h. für jede $\Phi_n(x)$ kann das Intervall (a, b) in endlich viele Teilintervalle zerlegt werden, so daß die Funktion $\Phi_n(x)$ in jedem Teilintervall konstant ist.

so kann man es derart zu einem orthogonalen Polynomsystem $\{\pi_p(x)\}$ $(1 \leqq p \leqq R')$ *ergänzen, daß die hinzugefügten Polynome* $\pi_m(x)$ $(R < m \leqq R')$ *der Bedingung*

$$|Q_m(x) - \pi_m(x)| \leqq \lambda\sigma \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

genügen.

§ 3. Weitere Hilfssätze

Zuerst werden wir Satz 1 im speziellen Fall beweisen, daß das Orthonormalsystem $\{\varphi_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ aus einzeln beschränkten Funktionen besteht. Dann können wir sogar mehr zeigen. Es gilt nämlich der folgende:

Hilfssatz III. *Seien* $\psi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *im Intervall* (a, b) *definierte, einzeln beschränkte Funktionen und sei* $\{N_i\}$ $(0 = N_0 < N_1 < \cdots < N_i < \cdots)$ *eine gegebene Indexfolge. Wir nehmen an, daß für jedes* i $(i = 1, 2, \ldots)$ *die Funktionen* $\psi_n(x)$ $(N_{i-1} < n \leqq N_i)$ *je ein Orthonormalsystem in* (a, b) *bilden. Dann kann zu jeder positiven Zahlenfolge* $\{\varepsilon_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *ein solches in* (a, b) *orthonormiertes Polynomsystem* $\{P_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *und eine solche Folge von meßbaren Mengen* $E_i (\subseteqq (a, b))$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *angegeben werden, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

$$(3.1) \qquad |\psi_n(x) - (-1)^{j_i(x)} P_n(x)| < \varepsilon_i \text{ für } x \in CE_i \text{ und für } N_{i-1} < n \leqq N_i \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

wobei $j_i(x) = 0$ *oder* 1 *ist,*

$$(3.2) \qquad \mu(E_i) \leqq \varepsilon_i$$

und

$$(3.3) \qquad |P_n(x)| \leqq 2\left(\sup_{a<x<b} |\psi_n(x)| + 1\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Es ist klar, daß sich aus dem Hilfssatz III der Satz 1 für orthonormierte Systeme von einzeln beschränkten Funktionen ergibt.

Beweis von Hilfssatz III. Offensichtlich genügt es, den Hilfssatz III für das Intervall $(0, 1)$ zu beweisen; weiter kann $\varepsilon_i \leqq \frac{1}{2}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ angenommen werden. Wir werden die folgenden Bezeichnungen einführen:

$$M_0 = 0, \quad M_i = \sup_{0<x<1} \{\max(|\psi_{N_{i-1}+1}(x)|, \ldots, |\psi_{N_i}(x)|, M_{i-1}) + 1\} \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

und

$$(3.4) \qquad A_i = (8 N_i M_i)^{6(N_i - N_{i-1}+1)} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Wir approximieren die Funktion $\psi_n(x)$ durch Treppenfunktionen. Auf Grund des Egoroffschen Satzes ist leicht zu sehen, daß man solche Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ und meßbare Mengen E_i' finden kann, für welche folgende die Beziehungen gelten:

$$|\psi_n(x)-\Phi_n(x)|<\frac{\varepsilon_i}{A_i^3} \quad \text{für} \quad x\in CE_i' \quad \text{und für} \quad N_{i-1}<n\leqq N_i, \tag{3.5}$$

$$\max_{0<x<1}|\Phi_n(x)|\leqq \sup_{0<x<1}|\psi_n(x)| \quad \text{für} \quad N_{i-1}<n\leqq N_i \tag{3.6}$$

und

$$\mu(E_i')\leqq\frac{\varepsilon_i}{A_i^3}. \tag{3.7}$$

Für die Funktionen $\pi(x)\equiv 1$ und $\Phi_n(x)$ $(1\leqq n\leqq N_1)$ wenden wir den Hilfssatz I mit $\varepsilon=\frac{\varepsilon_1}{A_1^3}$ an. So ergibt sich die Existenz eines Funktionensystems $\{F_n(x)\}$ $(n=1, 2, \ldots, N_1)$ und einer meßbaren Menge $E_1^*(\subseteqq(0,1))$, für welche die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $\mu(E_1^*)<\frac{\varepsilon_1}{A_1^3}$,
2. die Funktionen $F_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots, N_1)$ sind in $[0, 1]$ stetig,
3. für $x\in CE_1^*$ gilt $F_n(x)=(-1)^{j_1(x)}\Phi_n(x)$, wobei $j_1(x)$ gleich 0 oder 1 ist,
4. $\max\limits_{0\leqq x\leqq 1}|F_n(x)|\leqq\max\limits_{0<x<1}|\Phi_n(x)|$,
5. $\left|\int\limits_0^1 F_n(x)dx\right|<\frac{\varepsilon_1}{A_1^3}$.

Auf Grund von 2, und unter Verwendung des Approximationssatzes von WEIERSTRASS erhält man ein Polynomsystem $\{Q_n(x)\}$ $(n=1, 2, \ldots, N_1)$ derart, daß

$$\max_{0\leqq x\leqq 1}|F_n(x)-Q_n(x)|<\frac{\varepsilon_1}{A_1^3} \qquad (n=1, 2, \ldots, N_1) \tag{3.8}$$

gilt.

Es sei $E_1=E_1^*\cup E_1'$, dann folgt nach 1, (3.4) und (3.7) die Beziehung (3.2) für $i=1$. Wir setzen

$$\sigma_1=\max_{\substack{1\leqq n, m\leqq N_1\\ n\neq m}}\left\{\left|\int\limits_0^1 Q_n(x)dx\right|, \left|\int\limits_0^1 Q_n(x)Q_m(x)dx\right|\right\},$$

$$\mu_1=\max_{0\leqq x\leqq 1}\{\max_{1\leqq n\leqq N_1}(1, |Q_n(x)|)\},$$

$$G_1=\min_{1\leqq n\leqq N_1}\left\{1, \int\limits_0^1 Q_n^2(x)dx\right\},$$

$$\gamma_1=\max\left\{4N_1, \mu_1, \frac{1}{G_1}, 1\right\} \quad \text{und} \quad \lambda_1=\gamma_1^{6(N_1+1)}.$$

Wegen 4, (3. 4), (3. 6) und (3. 8) ist

$$\mu_1 \leqq 2M_1. \tag{3.9}$$

Auf Grund von (3. 4), (3. 5), (3. 6) und (3. 7) erhält man im Falle $N_{i-1} < n \leqq N_i$:

$$\int_0^1 \Phi_n^2(x)\,dx = \int_0^1 (\Phi_n(x) - \psi_n(x) + \psi_n(x))^2\,dx \leqq \int_0^1 \psi_n^2(x)\,dx +$$

$$+ \left| \int_0^1 (2\psi_n(x)(\Phi_n(x) - \psi_n(x)) + (\Phi_n(x) - \psi_n(x))^2)\,dx \right| \leqq$$

$$\leqq 1 + \left| \int_{CE_i'} (2\psi_n(x)(\Phi_n(x) - \psi_n(x)) + (\Phi_n(x) - \psi_n(x))^2)\,dx \right| + \tag{3.10}$$

$$+ \left| \int_{E_i'} (2\psi_n(x)(\Phi_n(x) - \psi_n(x)) + (\Phi_n(x) - \psi_n(x))^2)\,dx \right| \leqq$$

$$\leqq 1 + 2M_i \frac{\varepsilon_i}{A_i^3} + 8M_i^2 \frac{\varepsilon_i}{A_i^3} \leqq 1 + \frac{\varepsilon_i}{2A_i^2},$$

und auf ähnliche Weise:

$$\int_0^1 \Phi_n^2(x)\,dx \geqq 1 - \frac{\varepsilon_i}{2A_i^2}. \tag{3.11}$$

Aus 1, 3, 4, (3. 4), (3. 6), (3. 8) und (3. 11) ergibt sich

$$\int_0^1 Q_n^2(x)\,dx \geqq \int_0^1 F_n^2(x)\,dx - 2M_1 \frac{\varepsilon_1}{A_1^3} \geqq \int_{CE_1^*} F_n^2(x)\,dx - 2M_1 \frac{\varepsilon_1}{A_1^3} =$$

$$= \int_0^1 \Phi_n^2(x)\,dx - \int_{E_1^*} \Phi_n^2(x)\,dx - 2M_1 \frac{\varepsilon_1}{A_1^3} \geqq$$

$$\geqq 1 - \frac{\varepsilon_1}{2A_1^2} - M_1^2 \frac{\varepsilon_1}{A_1^3} - 2M_1 \frac{\varepsilon_1}{A_1^3} \geqq 1 - \frac{\varepsilon_1}{A_1^2} \geqq \frac{1}{2} \qquad (1 \leqq n \leqq N_1).$$

Daraus folgt

$$G_1 \geqq \frac{1}{2}. \tag{3.12}$$

Auf Grund von (3. 4), (3. 9) und (3. 12) ist

$$\lambda_1 \leqq A_1. \tag{3.13}$$

Wegen 5 und (3. 8) gilt

$$\left|\int_0^1 Q_n(x)dx\right| \leqq \left|\int_0^1 F_n(x)dx\right| + \left|\int_0^1 (Q_n(x)-F_n(x))dx\right| \leqq 2\frac{\varepsilon_1}{A_1^3} \tag{3.14}$$

$(1 \leqq n \leqq N_1)$ und nach 1, 3, 4, (3. 4), (3. 5), (3. 6), (3. 7), (3. 8)

$$\left|\int_0^1 Q_n(x)Q_m(x)dx\right| \leqq \left|\int_0^1 F_n(x)F_m(x)dx\right| + 2M_1\frac{\varepsilon_1}{A_1^3} + \frac{\varepsilon_1^2}{A_1^6} \leqq$$

$$\leqq \left|\int_{CE_1^*} \Phi_n(x)\Phi_m(x)dx\right| + \left|\int_{E_1^*} F_n(x)F_m(x)dx\right| + 3M_1\frac{\varepsilon_1}{A_1^3} \leqq \tag{3.15}$$

$$\leqq \left|\int_0^1 \Phi_n(x)\Phi_m(x)dx\right| + \left|\int_{E_1^*} \Phi_n(x)\Phi_m(x)dx\right| + M_1^2\frac{\varepsilon_1}{A_1^3} + 3M_1\frac{\varepsilon_1}{A_1^3} \leqq$$

$$\leqq \left|\int_0^1 (\Phi_n(x)\Phi_m(x) - \psi_n(x)\Phi_m(x) + \psi_n(x)\Phi_m(x) - \psi_n(x)\psi_m(x))dx\right| + 5M_1^2\frac{\varepsilon_1}{A_1^3} \leqq$$

$$\leqq \left|\int_{CE_i'} (\Phi_m(x)(\Phi_n(x)-\psi_n(x)) + \psi_n(x)(\Phi_m(x)-\psi_m(x)))dx\right| +$$

$$+ \left|\int_{E_i'} (\Phi_m(x)(\Phi_n(x)-\psi_n(x)) + \psi_n(x)(\Phi_m(x)-\psi_m(x)))dx\right| +$$

$$+ 5M_1^2\frac{\varepsilon_1}{A_1^3} \leqq 2M_1\frac{\varepsilon_1}{A_1^3} + 4M_1^2\frac{\varepsilon_1}{A_1^3} + 5M_1^2\frac{\varepsilon_1}{A_1^3} \leqq \frac{\varepsilon_1}{A_1^2}$$

$(1 \leqq n, m \leqq N_1;\ n \neq m)$. Wegen (3. 14) und (3. 15) ist $\sigma_1 \leqq \frac{\varepsilon_1}{A_1^2}$. Auf Grund von (3. 13) ist also $\sigma_1\lambda_1 \leqq \frac{\varepsilon_1}{A_1} < 1$.

Für die Polynome $\pi(x)$, $Q_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots, N_1)$, kann also der Hilfssatz II angewendet werden. Also gibt es ein in $(0, 1)$ orthogonales Polynomsystem $\{\pi_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots, N_1)$ derart, daß

$$|Q_n(x) - \pi_n(x)| \leqq \sigma_1\lambda_1 \leqq \frac{\varepsilon_1}{A_1} \qquad (1 \leqq n \leqq N_1;\ 0 \leqq x \leqq 1) \tag{3.16}$$

gilt. Auf Grund von 1, 3, 4, (3. 4), (3. 6), (3. 8), (3. 10), (3. 11) und (3. 16) erhält man

$$\int_0^1 \pi_n^2(x)\,dx \geqq \int_0^1 Q_n^2(x)\,dx - 4M_1\frac{\varepsilon_1}{A_1} \geqq \int_0^1 F_n^2(x)\,dx - 2M_1\frac{\varepsilon_1}{A_1^3} - 4M_1\frac{\varepsilon_1}{A_1} \geqq$$

$$\geqq \int_{CE_1^*} \Phi_n^2(x)\,dx - 6M_1\frac{\varepsilon_1}{A_1} = \int_0^1 \Phi_n^2(x)\,dx - \int_{E_1^*} \Phi_n^2(x)\,dx - 6M_1\frac{\varepsilon_1}{A_1} \geqq \tag{3.17}$$

$$\geqq 1 - \frac{\varepsilon_1}{2A_1^2} - 7M_1\frac{\varepsilon_1}{A_1} \geqq 1 - \frac{\varepsilon_1}{4M_1} \geqq \frac{1}{2}$$

und

$$\int_0^1 \pi_n^2(x)\,dx \leqq \int_0^1 Q_n^2(x)\,dx + 4M_1\frac{\varepsilon_1}{A_1} + \frac{\varepsilon_1^2}{A_1^2} \leqq \int_0^1 F_n^2(x)\,dx + 2M_1\frac{\varepsilon_1}{A_1^3} + 5M_1\frac{\varepsilon_1}{A_1} =$$

$$= \int_{CE_1^*} \Phi_n^2(x)\,dx + \int_{E_1^*} F_n^2(x)\,dx + 7M_1\frac{\varepsilon_1}{A_1} \leqq \tag{3.18}$$

$$\leqq 1 + \frac{\varepsilon_1}{2A_1^2} + M_1^2\frac{\varepsilon_1}{A_1^3} + 7M_1\frac{\varepsilon_1}{A_1} \leqq 1 + \frac{\varepsilon_1}{4M_1}.$$

Aus 4, (3. 4), (3. 6), (3. 8) und (3. 16) folgt ferner

$$|\pi_n(x)| \leqq |Q_n(x)| + |\pi_n(x) - Q_n(x)| \leqq |F_n(x)| + |Q_n(x) - F_n(x)| + \frac{\varepsilon_1}{A_1} \leqq$$

$$\leqq \max_{0<x<1} |\Phi_n(x)| + \frac{\varepsilon_1}{A_1^3} + \frac{\varepsilon_1}{A_1} \leqq \max_{0<x<1} |\Phi_n(x)| + 1 \leqq M_1. \tag{3.19}$$

Wir setzen

$$P_n(x) = \nu_n \pi_n(x) \text{ mit } \nu_n = \left(\int_0^1 \pi_n^2(x)\,dx\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (1 \leqq n \leqq N_1). \tag{3.20}$$

Die Polynome $P_n(x)$ bilden in $(0, 1)$ ein orthonormiertes System. Nach (3. 6), (3. 17) und (3. 19) ist

$$|P_n(x)| \leqq 2|\pi_n(x)| \leqq 2(\max_{0<x<1} |\Phi_n(x)| + 1) \leqq 2(\sup_{0<x<1} |\psi_n(x)| + 1) \quad (1 \leqq n \leqq N_1),$$

also gilt (3. 3) für $1 \leqq n \leqq N_1$. Wegen (3. 17), (3. 18), (3. 19) und (3. 20) ist

$$|\pi_n(x) - P_n(x)| = |\pi_n(x)|\,|1 - \nu_n| \leqq$$

$$\leqq 2M_1 \max\left\{\left(1 + \frac{\varepsilon_1}{4M_1}\right)^{\frac{1}{2}} - 1,\ 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{4M_1}\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \leqq 2M_1\frac{\varepsilon_1}{4M_1} = \frac{\varepsilon_1}{2}. \tag{3.21}$$

Daraus und aus 3., (3. 4), (3. 5), (3. 8), (3. 16) und (3. 21) folgt für $x \in (0, 1)$, $x \notin E_1^* \cup E_1'$:

$$|\psi_n(x)-(-1)^{j_1(x)}P_n(x)| \leqq |\psi_n(x)-\Phi_n(x)|+|\Phi_n(x)-(-1)^{j_1(x)}F_n(x)|+$$
$$+|(-1)^{j_1(x)}F_n(x)-(-1)^{j_1(x)}Q_n(x)|+|(-1)^{j_1(x)}Q_n(x)-(-1)^{j_1(x)}\pi_n(x)|+$$
$$+|(-1)^{j_1(x)}\pi_n(x)-(-1)^{j_1(x)}P_n(x)| \leqq \frac{\varepsilon_1}{A_1^3}+\frac{\varepsilon_1}{A_1^3}+\frac{\varepsilon_1}{A_1}+\frac{\varepsilon_1}{2} \leqq \varepsilon_1,$$

also ist (3. 1) erfüllt für $1 \leqq n \leqq N_1$.

Nun sei k eine beliebige natürliche Zahl, >1. Wir nehmen an, daß die Polynome $P_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq N_{k-1})$ und die meßbaren Mengen $E_i(\subseteqq(0,1))$ $(1 \leqq i \leqq k-1)$ schon derart definiert sind, daß (3. 1), (3. 3) und (3. 17) für $1 \leqq n \leqq N_{k-1}$, und (3. 2) für $1 \leqq i \leqq k-1$ erfüllt sind. Für die Funktionen $\pi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq N_{k-1})$ und $\Phi_n(x)$ $(N_{k-1} < n \leqq N_k)$ wenden wir den Hilfssatz I mit $\varepsilon = \frac{\varepsilon_k}{A_k^3}$ an. Laut diesem gibt es ein Funktionensystem $\{F_n(x)\}$ $(n = N_{k-1}+1, \ldots, N_k)$ und eine meßbare Menge $E_k^*(\subseteqq(0,1))$ derart, daß die folgenden Bedingungen gelten:

$\overline{1}$. $\mu(E_k^*) < \frac{\varepsilon_k}{A_k^3}$,

$\overline{2}$. die Funktionen $F_n(x)$ sind in $[0, 1]$ stetig,

$\overline{3}$. für $x \in CE_k^*$ gilt $F_n(x) = (-1)^{j_k(x)}\Phi_n(x)$ mit $j_k(x) = 0$ oder 1,

$\overline{4}$. $\max\limits_{0 \leqq x \leqq 1} |F_n(x)| \leqq \max\limits_{0 < x < 1} |\Phi_n(x)|$,

$\overline{5}$. $\left|\int\limits_0^1 \pi_m(x) F_n(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon_1}{A_1^3}$ $(1 \leqq m \leqq N_{k-1},\ N_{k-1} < n \leqq N_k)$.

Aus $\overline{2}$ und unter Verwendung des Approximationssatzes von WEIERSTRASS ergibt sich ein Polynomsystem $\{Q_n(x)\}$ $(N_{k-1} < n \leqq N_k)$ derart, daß

$$\max_{0 \leqq x \leqq 1} |F_n(x) - Q_n(x)| < \frac{\varepsilon_k}{A_k^3} \qquad (N_{k-1} < n \leqq N_k) \tag{3.22}$$

gilt.

Es sei $E_k = E_k^* \cup E_k'$, dann gilt nach $\overline{1}$, (3. 4), (3. 7) die Beziehung (3. 2) für $i = k$. Wir setzen

$$\sigma_k = \max_{l,\, n,\, m\, (n \neq m)} \left\{\left|\int\limits_0^1 \pi_l(x)\, Q_n(x)\,dx\right|, \left|\int\limits_0^1 Q_n(x)\, Q_m(x)\,dx\right|\right\},$$

$$G_k = \min_{l,\, n} \left\{\int\limits_0^1 \pi_l^2(x)\,dx, \int\limits_0^1 Q_n^2(x)\,dx\right\},$$

$$\mu_k = \max_{0 \leqq x \leqq 1} \{\max_{l,\, n} (|\pi_l(x)|, |Q_n(x)|)\},$$

wobei l die Zahlen von 1 bis N_{k-1}, und n, m die Zahlen von $N_{k-1}+1$ bis N_k durchlaufen, ferner sei

$$\gamma_k = \max\left\{4N_k, \mu_k, \frac{1}{G_k}, 1\right\} \quad \text{und} \quad \lambda_k = \gamma_k^{6(N_k - N_{k-1}+1)}.$$

Auf Grund von $\overline{4}$., (3.4), (3.6), (3.19) und (3.22) ist

$$\mu_k \leqq 2M_k. \tag{3.23}$$

Nach $\overline{3}$, $\overline{4}$, (3.4), (3.6), (3.11) und (3.22) ergibt sich mit einer einfachen Rechnung

$$\int_0^1 Q_n^2(x)\,dx \geqq \frac{1}{2} \qquad (N_{k-1} < n \leqq N_k).$$

Daraus folgt wegen (3.17) die Beziehung

$$G_k \geqq \frac{1}{2}. \tag{3.24}$$

Auf Grund von (3.4), (3.23) und (3.24) ist

$$\lambda_k \leqq A_k. \tag{3.25}$$

Weiter erhält man wegen $\overline{1}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{5}$, (3.4), (3.5), (3.6), (3.7), (3.19) und (3.22) $\sigma_k \leqq \frac{\varepsilon_k}{A_k^2}$ und nach (3.25) $\sigma_k \lambda_k \leqq \frac{\varepsilon_k}{A_k} < 1$.

Für die Polynome $\pi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq N_{k-1})$, $Q_m(x)$ $(N_{k-1} < m \leqq N_k)$ kann also Hilfssatz II angewendet werden. Also gibt es Polynome $\pi_n(x)$ $(N_{k-1} < n \leqq N_k)$ derart, daß

$$|Q_n(x) - \pi_n(x)| \leqq \sigma_k \lambda_k \leqq \frac{\varepsilon_k}{A_k} \qquad (N_{k-1} < n \leqq N_k;\ 0 \leqq x \leqq 1) \tag{3.26}$$

gilt und das ganze System $\{\pi_n(x)\}$ $(1 \leqq n \leqq N_k)$ in $(0, 1)$ orthogonal ist. Auf Grund von $\overline{1}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, (3.4), (3.6), (3.10), (3.11), (3.22) und (3.26) erhält man

$$1 - \frac{\varepsilon_k}{4M_k} \leqq \int_0^1 \pi_n^2(x)\,dx \leqq 1 + \frac{\varepsilon_k}{4M_k} \qquad (N_{k-1} < n \leqq N_k). \tag{3.27}$$

Ferner ist auf Grund von $\overline{4}$, (3.4), (3.6), (3.22) und (3.26)

$$\begin{aligned} |\pi_n(x)| &\leqq |Q_n(x)| + |\pi_n(x) - Q_n(x)| \leqq |F_n(x)| + |Q_n(x) - F_n(x)| + \frac{\varepsilon_k}{A_k} \leqq \\ &\leqq \max_{0<x<1} |\Phi_n(x)| + \frac{\varepsilon_k}{A_k^3} + \frac{\varepsilon_k}{A_k} \leqq \max_{0<x<1} |\Phi_n(x)| + 1 \leqq \sup_{0<x<1} |\psi_n(x)| + 1 \leqq M_k \end{aligned} \tag{3.28}$$

$(N_{k-1} < n \leqq N_k)$. Wir definieren die Polynome $P_n(x)$ $(N_{k-1} < n \leqq N_k)$ durch die Formel (3.20). Dann bilden die Polynome $P_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq N_k)$ ein orthonormiertes System in (0, 1). Nach (3.17) und (3.28) wird (3.3) auch für $N_{k-1} < n \leqq N_k$ erfüllt. Zur Analogie von (3.21) ist, auf Grund von (3.20), (3.27) und (3.28),

$$|\pi_n(x) - P_n(x)| \leqq \frac{\varepsilon_k}{2}. \tag{3.29}$$

Daraus folgt wegen $\overline{3}$, (3.4), (3.5), (3.22), (3.26) und (3.29) für $x \in CE_k$, wie vorher, daß (3.1) auch für $N_{k-1} < n \leqq N_k$ erfüllt wird.

Auf diese Art ergibt sich mit vollständiger Induktion ein orthonormiertes Polynomsystem $\{P_n(x)\}$ und eine Mengenfolge $\{E_i\}$, für welche die Bedingungen des Hilfssatzes III erfüllt sind.

Damit haben wir Hilfssatz III vollständig bewiesen.

Zum Beweis des Satzes 1 benötigen wir auch den folgenden.

Hilfssatz IV. *Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ ein im Grundintervall (a, b) orthonormiertes Funktionensystem. Dann kann zu jeder positiven Zahlenfolge $\{\varepsilon_i\}$ und zu jeder Indexfolge $\{N_i\}$ $(0 = N_0 < N_1 < \cdots < N_i < \cdots)$ ein solches in (a, b) normiertes System von beschränkten Funktionen $\{\psi_n(x)\}$ und eine solche Folge von meßbaren Mengen $H_i (\subseteqq (a, b))$ angegeben werden, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

$$\int_a^b \psi_n(x)\psi_m(x)\,dx = 0 \qquad (N_{i-1} < n < m \leqq N_i;\ i = 1, 2, \ldots), \tag{3.30}$$

$$|\varphi_n(x) - \psi_n(x)| < \varepsilon_i \quad \textit{für} \quad x \in CH_i, \quad N_{i-1} < n \leqq N_i \tag{3.31}$$

und

$$\mu(H_i) < \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{3.32}$$

Beweis von Hilfssatz IV. Da die Funktionen $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ quadratisch integrierbar sind, so existiert zu jedem $\varepsilon_i \left(< \frac{1}{2}\right)$ eine positive Zahl δ_i (sogar mit $\delta_i \leqq \varepsilon_i$) derart, daß für jede meßbare Menge H mit $\mu(H) \leqq \delta_i$ die Ungleichungen

$$\int_H \varphi_n^2(x)\,dx < \varepsilon_i \qquad (N_{i-1} < n \leqq N_i;\ i = 1, 2, \ldots)$$

bestehen und für jedes n

$$\lim_{N \to \infty} \mu(E_N^{(n)}) = 0 \tag{3.33}$$

gilt, wobei $E_N^{(n)}$ die Menge derjenigen Punkte x bedeutet, für die $|\varphi_n(x)| \geqq N$

ist. Nach (3.33) existiert zu jedem n ein Index N_n, für welchen

$$\mu(E_{N_n}^{(n)}) \leqq \frac{\delta_i}{2(N_i - N_{i-1})} \qquad (N_{i-1} < n \leqq N_i)$$

ist.

Wir setzen

$$E_i = \bigcup_{n=N_{i-1}+1}^{N_i} E_{N_n}^{(n)} \qquad (i=1,2,\ldots);$$

dann ist $\mu(E_i) \leqq \frac{\delta_i}{2}$. Wir überdecken die Menge E_i mit einer offenen Menge H_i vom Maß

$$\mu(H_i) = \delta_i \tag{3.34}$$

und führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$M_i = \sup_{x \in CH_i} \left(\max_{N_{i-1} < n \leqq N_i} |\varphi_n(x)| + 1 \right), \quad K_i = \gamma_{N_i - N_{i-1}+1} \qquad (i=1,2,\ldots), \tag{3.35}$$

wobei die Zahlenfolge $\{\gamma_n\}$ durch die rekursiven Gleichungen

$$\gamma_1 = 1, \quad \gamma_n = 1 + \sum_{l=1}^{n-1} \gamma_l^2 \qquad (n=2,3,\ldots) \tag{3.36}$$

definiert sind; ferner sei

$$\varepsilon_i' = \frac{\varepsilon_i}{M_i \cdot K_i} \qquad (i=1,2,\ldots). \tag{3.37}$$

Mit derselben Schlußweise, wie oben, erhalten wir, daß es eine positive Zahl δ_i' derart gibt, daß für jede meßbare Menge H' mit $\mu(H') \leqq \delta_i'$ die Ungleichungen

$$\int_{H'} \varphi_n^2(x)\,dx < \varepsilon_i' \qquad (N_{i-1} < n \leqq N_i;\ i=1,2,\ldots) \tag{3.38}$$

bestehen, und daß es zu jedem n auch einen Index $N_n' \geqq N_n$ gibt, für welchen

$$\mu(E_{N_n'}^{(n)}) \leqq \frac{\delta_i'}{2(N_i - N_{i-1})} \qquad (N_{i-1} < n \leqq N_i)$$

gilt. Wir setzen

$$E_i' = \bigcup_{n=N_{i-1}+1}^{N_i} E_{N_n'}^{(n)} \qquad (i=1,2,\ldots).^{*)}$$

Da $\mu(E_i') \leqq \frac{\delta_i'}{2}$ ist, können wir die Menge E_i' mit einer offenen Menge H_i

*) Wegen $N_n' \geqq N_n$ ist $E_{N_n'}^{(n)} \subseteq E_{N_n}^{(n)}$, also auch $E_i' \subseteq E_i$.

derart überdecken, daß

$$H_i' \subseteqq H_i \quad \text{und} \quad \mu(H_i') = \delta_i'$$

gelten.

Hiernach teilen wir die Menge H_i' in $N_i - N_{i-1}$ paarweise disjunkte meßbare Mengen $I_l^{(i)}$ $(l = 1, 2, \ldots, N_i - N_{i-1})$, die alle vom gleichen Maß sind, d. h. mit

$$\mu(I_l^{(i)}) = \frac{\delta_i'}{N_i - N_{i-1}} \qquad (l = 1, 2, \ldots, N_i - N_{i-1}). \tag{3.39}$$

Dann definieren wir ein System von Funktionen $\psi'_{N_{i-1}+l}(x)$ $(l = 1, 2, \ldots, N_i - N_{i-1};\ i = 1, 2, \ldots)$ folgenderweise:

$$\psi'_{N_{i-1}+l}(x) = \begin{cases} \varphi_{N_{i-1}+l}(x) & \text{für } x \in CH_i', \\ c_s^{(i,l)} & \text{für } x \in I_s^{(i)} \\ & \quad (s = 1, 2, \ldots, l-1), \\ c_l^{(i,l)} = \left(\varepsilon_i' \dfrac{N_i - N_{i-1}}{\delta_i'}\right)^{\frac{1}{2}} & \text{für } x \in I_l^{(i)}, \\ 0 & \text{für die übrigen Punkte} \\ & \quad x \text{ von } H_i', \end{cases} \tag{3.40}$$

wobei $c_s^{(i,l)}$ Konstanten sind, die so gewählt werden sollen, daß die Funktionen $\psi'_{N_{i-1}+l}(x)$ $(l = 1, 2, \ldots, N_i - N_{i-1})$ ein orthogonales System bilden, d. h. die Bedingungen

$$0 = \int_a^b \psi'_{N_{i-1}+k}(x)\,\psi'_{N_{i-1}+l}(x)\,dx = \int\limits_{C\left(\bigcup\limits_{s=1}^{k} I_s^{(i)}\right)} \psi'_{N_{i-1}+k}(x)\,\psi'_{N_{i-1}+l}(x)\,dx + \tag{B_{kl}}$$
$$+ \frac{\delta_i'}{N_i - N_{i-1}} \sum_{s=1}^{k} c_s^{(i,k)} c_s^{(i,l)}$$

$(1 \leqq k < l \leqq N_i - N_{i-1})$ erfüllt werden. Die Werte von $c_1^{(i,l)}$ $(l \geqq 2)$ ergeben sich eindeutig aus den Bedingungen (B_{1l}), da die Integrale an der rechten Seite offenbar nicht von den Konstanten $c_s^{(i,l)}$ $(l \geqq s \geqq 2)$ abhängen. Ferner bekommen auf Grund von (3.38), (3.39) und (3.40)

$$|c_1^{(i,l)}| \leqq c_1^{(i,1)} \qquad (l = 2, \ldots, N_i - N_{i-1};\ i = 1, 2, \ldots). \tag{3.41}$$

Dann können wir die Werte der Konstanten $c_2^{(i,l)}$ $(l \geqq 3)$ aus den Bedingungen (B_{2l}) bestimmen, da hier die Integrale rechts offenbar nur von denjenigen Konstanten $c_1^{(i,l)}$ abhängt, die schon bestimmt wurden. Auf Grund von (3.36), (3.38), (3.39), (3.40) und (3.41) ergibt sich

$$|c_2^{(i,l)}| \leqq \gamma_2 c_1^{(i,1)} \quad (l=3,4,\ldots,N_i-N_{i-1};\ i=1,2,\ldots).$$

So fortfahrend bestimmen wir mittels der Bedingungen (B_{3l}) die Werte der Konstanten $c_3^{(i,l)}$ usw. Durch Rekursion können wir also alle die Konstanten $c_k^{(i,l)}$ bestimmen und sie genügen Ungleichungen von der Form

$$(3.42) \qquad |c_k^{(i,l)}| \leqq \gamma_k c_1^{(i,1)} \quad (1 \leqq k \leqq l \leqq N_i-N_{i-1};\ i=1,2,\ldots).$$

Nach der Definition von $\psi_n'(x)$ und wegen (3.35), (3.37), (3.38), (3.39) und (3.42) ergibt sich nach einfacher Rechnung

$$(3.43) \qquad 1-\varepsilon_i' \leqq \int_a^b \psi_n'^2(x)\,dx \leqq 1+\frac{\varepsilon_i}{M_i} \quad \text{für} \quad N_{i-1}<n\leqq N_i.$$

Wir betrachten nun die normierten Funktionen

$$(3.44) \qquad \psi_n(x)=\varrho_n\psi_n'(x) \quad \text{mit} \quad \varrho_n=\left(\int_a^b \psi_n'^2(x)\,dx\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Nach (3.35), (3.40), (3.43) und (3.44) gilt für $x\in CH_i$

$$(3.45) \qquad |\varphi_n(x)-\psi_n(x)|=|\varphi_n(x)-\varrho_n\varphi_n(x)|\leqq|\varphi_n(x)||1-\varrho_n|\leqq\varepsilon_i$$
$$(N_{i-1}<n\leqq N_i;\ i=1,2,\ldots).$$

Danach ist es wegen (3.34) und (3.45) klar, daß die so erhaltenen Funktionen $\psi_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ und Mengen H_i $(i=1,2,\ldots)$ die in der Behauptung des Hilfssatzes IV vorkommenden Bedingungen erfüllen.

Damit haben wir den Hilfssatz IV vollständig bewiesen.

§ 4. Beweis von Satz 1

Sei $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ ein im Intervall (a,b) orthonormiertes Funktionensystem, $\{N_i\}$ $(0=N_0<N_1<\cdots<N_i<\cdots)$ eine beliebige Indexfolge und $\{\varepsilon_i\}$ $(i=1,2,\ldots)$ eine positive Zahlenfolge.

Wir werden auf das Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ und die Folgen $\{N_i\}$, $\left\{\frac{\varepsilon_i}{2}\right\}$ den Hilfssatz IV an. Also existiert ein normiertes System $\{\psi_n(x)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ von beschränkten Funktionen und eine Mengenfolge $\{H_i\}$ $(i=1,2,\ldots)$, die (3.30), (3.31) und (3.32) erfüllen.

Danach wenden wir auf das Funktionensystem $\{\psi_n(x)\}$, die Indexfolge $\{N_i\}$ und die Zahlenfolge $\left\{\frac{\varepsilon_i}{2}\right\}$ den Hilfssatz III an. So erhält man ein orthonormiertes Polynomsystem $\{P_n(x)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ und eine Mengenfolge $\{E_i\}$ $(i=1,2,\ldots)$, die (3. 1), (3. 2) und (3. 3) erfüllen.

Es sei $G_i = E_i \cup H_i$ $(i=1,2,\ldots)$.

Wir beweisen, daß dieses Polynomsystem $\{P_n(x)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ und diese Mengenfolge $\{G_i\}$ $(i=1,2,\ldots)$ die in der Behauptung des Satzes 1 vorkommenden Bedingungen erfüllen. Für $x \in CG_i$

$$|\varphi_n(x)-(-1)^{j_i(x)}P_n(x)| \leqq |\varphi_n(x)-\psi_n(x)| + |\psi_n(x)-(-1)^{j_i(x)}P_n(x)| \leqq \varepsilon_i \quad (N_{i-1}<n\leqq N_i;\ i=1,2,\ldots) \tag{4. 1}$$

und

$$\mu(G_i) \leqq \mu(E_i)+\mu(H_i) \leqq \varepsilon_i \qquad (i=1,2,\ldots) \tag{4. 2}$$

bestehen.

Da die Folgen $\{N_i\}$ und $\{\varepsilon_i\}$ beliebig waren, folgt aus (3. 3), (4. 1) und (4. 2), daß (1. 1), (1. 2) und (1. 3) erfüllt sind.

Damit haben wir den Satz 1 vollständig bewiesen.

§ 5. Beweis von Satz 1*

Wir nehmen an, der Satz sei falsch. Dann gibt es zwei Indizes q, r, für die

$$\left|\int_a^b \varphi_q(x)\varphi_r(x)\,dx - \delta_{qr}\right| = c_{qr} > 0$$

ist. Wir wählen die Indexfolge $\{N_i\}$ $(i=1,2,\ldots)$ so, daß $N_{k-1} < q, r \leqq N_k$ gilt. Wir setzen

$$A^2 = \max\left\{\int_a^b \varphi_q^2(x)\,dx,\ \int_a^b \varphi_r^2(x)\,dx\right\},\quad K=\max\{K_q, K_r\}$$

und

$$S_k = \frac{\min(c_{qr}, 1)}{2^4(A+1)(K+1)(b-a+1)}. \tag{5. 1}$$

Dann kann ein δ derart angegeben werden, daß für jede Menge E, für die $\mu(E)<\delta$ ist, die Beziehung

$$\max\left\{\int_E \varphi_q^2(x)\,dx,\ \int_E \varphi_r^2(x)\,dx\right\} < S_k^2 \tag{5. 2}$$

besteht. Nun sei $\{\varepsilon_i\}$ $(i=1,2,\ldots;\ i\neq k)$ eine beliebige Zahlenfolge und sei

$$\varepsilon_k = \min(\delta, S_k). \tag{5. 3}$$

Betrachten wir das in diesem Falle existierende Polynomsystem $\{P_n(x)\}$

$(n=1,2,\ldots)$. Dann sind auf Grund von (1.4), (1.5), (1.6), (5.1), (5.2) und (5.3)

$$c_{qr}=\left|\int_a^b\left(\varphi_q(x)\varphi_r(x)-(-1)^{j_k(x)}\varphi_q(x)P_r(x)+(-1)^{j_k(x)}\varphi_q(x)P_r(x)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-P_q(x)P_r(x)\right)dx\right|\leqq\left|\int_a^b\varphi_q(x)\left(\varphi_r(x)-(-1)^{j_k(x)}P_r(x)\right)dx\right|+$$

$$+\left|\int_a^b P_r(x)\left((-1)^{j_k(x)}\varphi_q(x)-P_q(x)\right)dx\right|\leqq\left|\int_{CE_k}\varphi_q(x)\left(\varphi_r(x)-(-1)^{j_k(x)}P_r(x)\right)dx\right|+$$

$$+\left|\int_{E_k}\varphi_q(x)\left(\varphi_r(x)-(-1)^{j_k(x)}P_r(x)\right)dx\right|+$$

$$+\left|\int_{CE_k}P_r(x)\left((-1)^{j_k(x)}\varphi_q(x)-P_q(x)\right)dx\right|+\left|\int_{E_k}P_r(x)\left((-1)^{j_k(x)}\varphi_q(x)-P_q(x)\right)dx\right|\leqq$$

$$\leqq\left[\int_{CE_k}\varphi_q^2(x)\,dx\cdot\int_{CE_k}\varepsilon_k^2\,dx\right]^{1/2}+\left[\int_{E_k}\varphi_q^2(x)\,dx\right]^{1/2}\cdot\left\{\left[(K_r+1)^2\int_{E_k}\varphi_r^2(x)\,dx\right]^{1/2}+\varepsilon_k^{1/2}\right\}+$$

$$+\left[\int_{CE_k}P_r^2(x)\,dx\cdot\int_{CE_k}\varepsilon_k^2\,dx\right]^{1/2}+\left\{\left[K_r^2\int_{E_k}\varphi_r^2(x)\,dx\right]^{1/2}+\varepsilon_k^{1/2}\right\}\cdot\left\{\left[(K_q+1)^2\int_{E_k}\varphi_q^2(x)\,dx\right]^{1/2}+\varepsilon_k^{1/2}\right\}\leqq$$

$$\leqq\varepsilon_k\sqrt{b-a}\cdot A+S_k[(K_r+1)S_k+\varepsilon_k^{1/2}]+\varepsilon_k\sqrt{b-a}+$$

$$+(K_r\cdot S_k+\varepsilon_k^{1/2})[(K_q+1)S_k+\varepsilon_k^{1/2}]\leqq\frac{1}{2}c_{qr}.$$

Aus diesem Widerspruch folgt die Richtigkeit von Satz 1*.

§ 6. Beweis von Satz 2

Wir wenden auf das Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ und die Indexfolge $\{N_i\}$ $(0=N_0<N_1<\cdots<N_i<\cdots)$ von Satz 2, mit der Zahlenfolge

$$\varepsilon_i=\frac{\varepsilon}{2^i(N_i-N_{i-1})\max\{s_{N_{i-1}+1},\ldots,s_{N_i}\}}\qquad(i=1,2,\ldots), \tag{6.1}$$

den Satz 1 an. Es sei $\{P_n(x)\}$ das so erhaltene in (a,b) orthonormierte Polynomsystem und es seien $\overline{G}_i(\subseteqq(a,b))$ $(i=1,2,\ldots)$ die so erhaltenen Mengen. Für $x\in G_i-\overline{G}_i$ besteht nach (1.1), (1.7) und (6.1) die Beziehung (1.8) für $i=m$. Es sei $Z=\overline{\lim_{i\to\infty}}\,\overline{G}_i$. Zum Beweis von Satz 2 zeigt man einfach, daß $\mu(Z)=0$ ist. Offensichtlich ist aber

$$Z\subseteqq\bigcup_{i=i_0}^{\infty}\overline{G}_i$$

für jedes i_0. So ist auf Grund von (1.2) und (6.1)

$$\mu(Z) \leqq \sum_{i=i_0}^{\infty} \mu(\overline{G}_i) \leqq \sum_{i=i_0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{i_0-1}}$$

für jedes i_0, daraus folgt $\mu(Z)=0$.

Damit haben wir den Satz 2 bewiesen.

§ 7. Beweis von Satz 3

Wir werden nur die behauptete Verschärfung der Sätze C, F und I vorführen, da die Sätze A, D, G und H auf Grund des Satzes 1 und die übrigen Sätze auf Grund des Satzes 2, mit Zuhilfenahme der ursprünglichen Beweisführungen des Herrn TANDORI analog behandelt werden können.

Verschärfung von Satz C. Ist für die positive Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ die Bedingung (1.9) erfüllt, so kann man eine positive, nichtabnehmende Zahlenfolge $\{\overline{\lambda}_n\}$ angeben, für die

(7.1) $$\lambda_n = o(\overline{\lambda}_n)$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\overline{\lambda}_n^2} = \infty$$

bestehen (TANDORI [1]). Nach einem Satz von TANDORI ([1], Satz V) gibt es ein in (a, b) orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\{\Phi_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und eine Folge von meßbaren Mengen $\{I_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ derart, daß

$$|\Phi_m(x)| = \overline{\lambda}_m \quad \text{für } x \in I_m \qquad (m=1, 2, \ldots)$$

gilt und jeder Punkt $x \in (a, b)$ in unendlich vielen I_m enthalten ist. Mit Anwendung von Satz 2 mit $s_n = 1$ $(n=1, 2, \ldots)$, $N_m = m$, $G_m = I_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ ergibt sich ein in (a, b) orthonormiertes Polynomsystem $\{P_n(x)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ derart, daß

$$|P_m(x)| \geqq (1-\varepsilon)\overline{\lambda}_m$$

für fast alle x für unendlich viele m besteht. Aus (7.1) folgt dann, daß (1.10) anstatt $\varphi_n(x)$ mit $P_n(x)$ fast überall in (a, b) gilt.

Damit haben wir die gewünschte Verschärfung von Satz C bewiesen.

Verschärfung von Satz F. Nach einem Satz von TANDORI ([1], Satz X), kann zu jeder positiven, monoton nichtabnehmenden Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$, die die Bedingung (1.9) erfüllt, eine positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendliche strebende Zahlenfolge $\{\bar{\lambda}_n\}$ angegeben werden, die die Bedingung

$$\lambda_n = o(\bar{\lambda}_n) \tag{7.2}$$

erfüllt. Weiter können ein im Intervall (a, b) orthonormiertes System von beschränkten Funktionen $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ und Indexfolgen $\{n_s\}$ und $\{m_i\}$ derart angegeben werden, daß für jede natürliche Zahl r und für jedes x in (a, b) die Ungleichung

$$\frac{A_{n_s}^{(r)}}{A_{2n_s}^{(r)}} |\varphi_{n_s}(x)| - \sum_{\substack{i=0\\ i\neq n_s}}^{2n_s} |\varphi_i(x)| \geqq \frac{c(r)}{2} \bar{\lambda}_{2m_{n_s}} \tag{7.3}$$

für unendlich viele Indizes n_s gilt, wobei $c(r)$ eine nur von r abhängige positive Zahl ist.

Es sei $\{N_i\}$ $(0=N_0<N_1<\cdots<N_i<\cdots)$ eine beliebige Indexfolge. Wir wählen die Folge $\{\varepsilon_i\}$ $(i=1, 2, \ldots)$ so, daß

$$\sum_{i=1}^{\infty} (N_i - N_{i-1})\varepsilon_i < \infty \tag{7.4}$$

besteht. Dann ergibt sich unter Anwendung des Satzes 1 ein orthonormiertes Polynomsystem $\{P_n(x)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ und eine Folge von meßbaren Mengen $E_i(\subseteqq(a, b))$ $(i=1, 2, \ldots)$ derart, daß für $x\in CE_i$ und $N_{i-1}<n\leqq N_i$

$$|\varphi_n(x) - (-1)^{j_i(x)} P_n(x)| \leqq \varepsilon_i \qquad (j_i(x)=0 \text{ oder } 1) \tag{7.5}$$

und

$$\mu(E_i) \leqq \varepsilon_i \tag{7.6}$$

gilt $(i=1, 2, \ldots)$.

Nach (7.4) ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \infty. \tag{7.7}$$

Aus (7.6) und (7.7) erhält man durch eine einfache Rechnung

$$\mu(\overline{\lim_{i\to\infty}} E_i) = 0. \tag{7.8}$$

Auf Grund von (7.8) existiert zu fast jedem $x\in(a, b)$ ein solches i_0, daß $x\notin E_i$ für $i>i_0$. Es sei

$$J_n(x) = j_i(x) \qquad (N_{i-1}<n\leqq N_i;\ i=1, 2, \ldots).$$

Wenn $x_0\in C(\overline{\lim_{i\to\infty}} E_i)$ und N eine beliebige natürliche Zahl ist, besteht wegen

(7.4) und (7.5) für jedes $\alpha > 0$ die Beziehung

$$\left| \frac{1}{A_N^{(\alpha)}} \sum_{\nu=0}^{N} A_{N-\nu}^{(\alpha)} (P_\nu(x_0) - (-1)^{J_\nu(x_0)} \varphi_\nu(x_0)) \right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{A_N^{(\alpha)}} \sum_{\nu=0}^{N} A_{N-\nu}^{(\alpha)} |P_\nu(x_0) - (-1)^{J_\nu(x_0)} \varphi_\nu(x_0)| \leqq \sum_{\nu=0}^{N} |P_\nu(x_0) - (-1)^{J_\nu(x_0)} \varphi_\nu(x_0)| \leqq$$

$$\leqq \sum_{\nu=0}^{\infty} |P_\nu(x_0) - (-1)^{J_\nu(x_0)} \varphi_\nu(x_0)| = \tag{7.9}$$

$$= \left(\sum_{\nu=0}^{N_{i_0}} + \sum_{\nu=N_{i_0}+1}^{\infty} \right) |P_\nu(x_0) - (-1)^{J_\nu(x_0)} \varphi_\nu(x_0)| \leqq C(x_0) + \sum_{i=1}^{\infty} (N_i - N_{i-1}) \varepsilon_i < C'(x_0).$$

Hierbei sind $C(x_0)$ und $C'(x_0)$ von N unabhängige positive Zahlen. Es sei

$$\pi_n^{(r)}(x) = \frac{1}{A_n^{(r)}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(r)} P_\nu(x) \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Nach (7.3) und (7.9) ist

$$|\pi_{2n_s}^{(r)}(x_0)| = \left| \frac{1}{A_{2n_s}^{(r)}} \sum_{\nu=0}^{2n_s} A_{2n_s-\nu}^{(r)} [(P_\nu(x_0) - (-1)^{J_\nu(x_0)} \varphi_\nu(x_0)) + (-1)^{J_\nu(x_0)} \varphi_\nu(x_0)] \right| \geqq$$

$$\geqq \left| \frac{1}{A_{2n_s}^{(r)}} \sum_{\nu=0}^{2n_s} A_{2n_s-\nu}^{(r)} (-1)^{J_\nu(x_0)} \varphi_\nu(x_0) \right| - \tag{7.10}$$

$$- \left| \frac{1}{A_{2n_s}^{(r)}} \sum_{\nu=0}^{2n_s} A_{2n_s-\nu}^{(r)} (P_\nu(x_0) - (-1)^{J_\nu(x_0)} \varphi_\nu(x_0)) \right| \geqq \frac{c(r)}{2} \bar{\lambda}_{2m_{n_s}} - C'(x_0).$$

Aus (7.2), (7.8) und (7.10) folgt, daß die Relation

$$\overline{\lim_{N \to \infty}} \frac{1}{\lambda_N} |\pi_N^{(r)}(x_0)| = \infty \tag{7.11}$$

fast überall im Intervall (a, b) gilt. Wenn (7.11) für $r = \alpha_0 > 0$ erfüllt wird, dann gilt es auch für jedes $\alpha \leqq \alpha_0$ (Tandori [1], Satz X). Da r beliebig ist, so ergibt sich, daß für dieses Polynomsystem $\{P_n(x)\}$ (7.11) für $\alpha > 0$ fast überall im Intervall (a, b) besteht.

Damit haben wir die gewünschte Verschärfung von Satz F bewiesen.

Verschärfung von Satz I. Wenn die positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendliche strebende Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ die Bedingung (1.9) erfüllt, so können nach einem Satz von K. Tandori ([3], Satz II), eine im strengen Sinne monoton wachsende Indexfolge $\{N_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ und ein im Intervall (a, b) orthonormiertes System von beschränkten Funktionen $\{\varphi_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ derart angegeben werden, daß überall im Intervall (a, b) für jede natürliche Zahl N

$$\int_a^b \left|\sum_{n=1}^{N} \varphi_n(x)\varphi_n(t)\right| dt \leqq \sum_{m=1}^{k-1} \int_a^b \left|\sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} \varphi_n(x)\varphi_n(t)\right| dt + \tag{7.12}$$
$$+ \int_a^b \left|\sum_{n=N_{k-1}+1}^{N} \varphi_n(x)\varphi_n(t)\right| dt = O(\lambda_N) \qquad (N_{k-1} < N \leqq N_k)$$

gilt, und fast überall in (a, b) für unendlich viele Indizes m

$$\int_a^b \left|\sum_{n=1}^{N_m} \varphi_n(x)\varphi_n(t)\right| dt \geqq \int_a^b \left|\sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} \varphi_n(x)\varphi_n(t)\right| dt - \tag{7.13}$$
$$-\sum_{k=1}^{m-1} \int_a^b \left|\sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} \varphi_n(x)\varphi_n(t)\right| dt \geqq c\lambda_{N_m}$$

besteht, wobei c eine positive Konstante ist.

Wir führen die folgende Bezeichnung ein:

$$M_i = \sup_{a<x<b} \left(\max_{N_{i-1}<n\leqq N_i} |\varphi_n(x)| + 1 \right) \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Wir wählen die Folge $\{\varepsilon_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ derart, daß die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{\infty} (N_i - N_{i-1}) M_i^2 \varepsilon_i < \infty \tag{7.14}$$

besteht. Nach Satz 1 existiert also ein orthonormiertes Polynomsystem $\{P_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und eine Folge von meßbaren Mengen $E_i (\subseteqq (a, b))$ $(i = 1, 2, \ldots)$ derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind: für $x \in CE_i$ und für $N_{i-1} < n \leqq N_i$ ist

$$|\varphi_n(x) - (-1)^{j_i(x)} P_n(x)| \leqq \varepsilon_i \qquad (j_i(x) = 0 \text{ oder } 1), \tag{7.15}$$

$$|P_n(x)| \leqq 2M_i \tag{7.16}$$

und

$$\mu(E_i) \leqq \varepsilon_i. \tag{7.17}$$

Nach (7.14) ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \infty. \tag{7.18}$$

Aus (7.17) und (7.18) erhält man durch eine einfache Rechnung

$$\mu(\overline{\lim_{i\to\infty}} E_i) = 0. \tag{7.19}$$

Auf Grund von (7.19) existiert zu fast jedem $x_0 \in (a, b)$ ein solches i_0, daß $x \notin E_i$ für $i > i_0$ gilt.

Ist $x_0 \in C(\overline{\lim\limits_{i\to\infty}} E_i)$ und N $(> N_{i_0}$ und $N_{k-1} < N \leqq N_k)$ eine beliebige natürliche Zahl, so besteht wegen (7.12), (7.14), (7.15), (7.16) und (7.17)

$$\int_a^b \left| \sum_{n=1}^{N} P_n(x_0) P_n(t) \right| dt \leqq \sum_{m=1}^{k-1} \int_a^b \left| \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} P_n(x_0) P_n(t) \right| dt +$$

$$+ \int_a^b \left| \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N} P_n(x_0) P_n(t) \right| dt =$$

$$= \sum_{m=1}^{k-1} \int_a^b \left| \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} (P_n(x_0) - (-1)^{j_m(x_0)} \varphi_n(x_0) + (-1)^{j_m(x_0)} \varphi_n(x_0)) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (P_n(t) - (-1)^{j_m(t)} \varphi_n(t) + (-1)^{j_m(t)} \varphi_n(t)) \right| dt +$$

$$+ \int_a^b \left| \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N} (P_n(x_0) - (-1)^{j_k(x_0)} \varphi_n(x_0) + (-1)^{j_k(x_0)} \varphi_n(x_0)) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (P_n(t) - (-1)^{j_k(t)} \varphi_n(t) + (-1)^{j_k(t)} \varphi_n(t)) \right| dt \leqq$$

$$\leqq \left(\sum_{m=1}^{i_0} + \sum_{m=i_0+1}^{k-1} \right) \left\{ \int_a^b \left| \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} (P_n(x_0) - (-1)^{j_m(x_0)} \varphi_n(x_0)) P_n(t) \right| dt + \right.$$

$$+ \int_a^b \left| \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} \varphi_n(x_0)(P_n(t) - (-1)^{j_m(t)} \varphi_n(t)) \right| dt +$$

$$\left. + \int_a^b \left| \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} \varphi_n(x_0) \varphi_n(t) \right| dt \right\} +$$

$$+ \int_a^b \left| \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N} (P_n(x_0) - (-1)^{j_k(x_0)} \varphi_n(x_0)) P_n(t) \right| dt +$$

$$+ \int_a^b \left| \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N} \varphi_n(x_0)(P_n(t) - (-1)^{j_k(t)} \varphi_n(t)) \right| dt + \int_a^b \left| \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N} \varphi_n(x_0) \varphi_n(t) \right| dt \leqq$$

$$\leqq C(x_0)+\sum_{m=i_0+1}^{k}\left\{\int_a^b \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} |P_n(x_0)-(-1)^{j_m(x_0)}\varphi_n(x_0)|\,|P_n(t)|\,dt+\right.$$

$$\left.+\left(\int_{CE_m}+\int_{E_m}\right)\sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} |\varphi_n(x_0)|\,|P_n(t)-(-1)^{j_m(t)}\varphi_n(t)|\,dt\right\}+O(\lambda_N)\leqq$$

$$\leqq C(x_0)+\sum_{i=1}^{\infty}(N_i-N_{i-1})2M_i\varepsilon_i(b-a)+\sum_{i=1}^{\infty}(N_i-N_{i-1})M_i\varepsilon_i(b-a)+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}(N_i-N_{i-1})3M_i^2\varepsilon_i+O(\lambda_N),$$

folglich

$$\int_a^b\left|\sum_{n=1}^{N}P_n(x_0)P_n(t)\right|dt\leqq C'(x_0)+O(\lambda_N). \tag{7.20}$$

Hierbei sind $C(x_0)$ und $C'(x_0)$ von N unabhängige positive Zahlen.

Aus (7.19) und (7.20) folgt, daß (1.13) mit $P_n(x)$ anstatt $\varphi_n(x)$ fast überall im Intervall (a, b) gilt.

Es sei Z' die Menge derjenigen Punkte x in (a, b), für welche die Bedingung (7.13) nicht gilt; nach der Bedingung ist

$$\mu(Z')=0. \tag{7.21}$$

Auf Grund von (7.13) ergibt sich unter Anwendung der vorigen Abschätzungen, für $x_0\in C((\overline{\lim_{i\to\infty}}\,E_i)\cup Z')$ und für einen beliebigen Index $N_m(>N_{i_0})$, die Beziehung

$$\int_a^b\left|\sum_{n=1}^{N_m}P_n(x_0)P_n(t)\right|dt\geqq\int_a^b\left|\sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m}P_n(x_0)P_n(t)\right|dt-$$

$$-\sum_{k=1}^{m-1}\int_a^b\left|\sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k}P_n(x_0)P_n(t)\right|dt=$$

$$=\int_a^b\left|\sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m}(P_n(x_0)-(-1)^{j_m(x_0)}\varphi_n(x_0)+(-1)^{j_m(x_0)}\varphi_n(x_0))\cdot\right.$$

$$\left.\cdot(P_n(t)-(-1)^{j_m(t)}\varphi_n(t)+(-1)^{j_m(t)}\varphi_n(t))\right|dt-$$

$$-\sum_{k=1}^{m-1}\int_a^b\left|\sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k}(P_n(x_0)-(-1)^{j_k(x_0)}\varphi_n(x_0)+(-1)^{j_k(x_0)}\varphi_n(x_0))\cdot\right.$$

$$\left.\cdot(P_n(t)-(-1)^{j_k(t)}\varphi_n(t)+(-1)^{j_k(t)}\varphi_n(t))\right|dt\geqq$$

$$\geqq\int_a^b\left|\sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m}\varphi_n(x_0)\varphi_n(t)\right|dt-$$

$$-\int_a^b\left|\sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m}(P_n(x_0)-(-1)^{j_m(x_0)}\varphi_n(x_0))P_n(t)\right|dt-$$

$$-\int_a^b\left|\sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m}\varphi_n(x_0)(P_n(t)-(-1)^{j_m(t)}\varphi_n(t))\right|dt-$$

$$-\left(\sum_{k=1}^{i_0}+\sum_{k=i_0+1}^{m-1}\right)\left\{\int_a^b\left|\sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k}(P_n(x_0)-(-1)^{j_k(x_0)}\varphi_n(x_0))P_n(t)\right|dt+\right.$$

$$\left.+\int_a^b\left|\sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k}\varphi_n(x_0)(P_n(t)-(-1)^{j_k(t)}\varphi_n(t))\right|dt+\int_a^b\left|\sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k}\varphi_n(x_0)\varphi_n(t)\right|dt\right\}\geqq$$

$$\geqq\int_a^b\left|\sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m}\varphi_n(x_0)\varphi_n(t)\right|dt-\sum_{k=1}^{m-1}\int_a^b\left|\sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k}\varphi_n(x_0)\varphi_n(t)\right|dt-C'(x_0),$$

folglich ist

$$\int_a^b\left|\sum_{n=1}^{N_m}P_n(x_0)P_n(t)\right|dt\geqq c\lambda_{N_m}-C'(x_0). \tag{7.22}$$

Aus (7.19), (7.21) und (7.22) folgt, daß (1.12) mit $P_n(x)$ anstatt $\varphi_n(x)$ fast überall im Intervall (a, b) gilt.

Damit haben wir die Verschärfung von Satz I vollständig bewiesen.

Schriftenverzeichnis

D. MENCHOFF, [1] Sur les séries de fonctions orthogonales (Première partie), *Fundamenta Math.*, **4** (1923), 82—105;

[2] Sur les séries de fonctions orthogonales bornées dans leur ensemble, *Recueil Math. Moscou*, **3** (**43**) (1938), 103—120;

[3] Sur les multiplicateurs de convergence pour les séries de polynômes orthogonaux, *Recueil Math. Moscou*, **6** (**48**) (1939), 27—51.

K. TANDORI, [1] Über die orthogonalen Funktionen. I, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 57—130;

[2] Über die orthogonalen Funktionen. II (Summation), *ebenda*, **18** (1957), 149—168;

[3] Über die orthogonalen Funktionen. III (Lebesguesche Funktionen), *ebenda*, **18** (1957), 169 - 178;

[4] Über die orthogonalen Funktionen. IV, *ebenda*, **19** (1958), 18—24;

[5] Über die orthogonalen Funktionen. V (Genaue Weylsche Multiplikatorfolgen), *ebenda*, **20** (1959), 1—13.

(Eingegangen am 30. November 1959)