Zur Theorie der Wahrheitsfunktionen

Von ANDRÁS ÁDÁM in Szeged

§ 1. Einführung

Die vorliegende Arbeit enthält drei Sätze über die einfache wiederholungsfreie Superposition von Funktionen des Aussagenkalküls.

Satz 1 erläutert den Zusammenhang der Prim-Implikanten der superponierten Funktion und der Prim-Implikanten der beiden Funktionen, die in der Superposition auftreten. (Dieser Satz ist ersichtlich sukzessiv anwendbar für eine beliebige wiederholungsfreie Superposition.) Sätze 2 und 3 beziehen sich auf den Fall, daß die äußere Funktion monoton von der inneren Funktion abhängt; Satz 2 liefert eine äquivalente Bedingung dafür, daß eine Teilmenge der Variablen einer Wahrheitsfunktion als die Menge der Variablen der inneren Funktion in einer passenden Superposition abtrennbar ist, und Satz 3 besagt, daß diese Abtrennbarkeit auch für den nicht-verschwindenden Durchschnitt abtrennbarer Variablenmengen gilt.[1])

Satz 2 ist in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung einiger bekannter Resultate von KUSNJEZOW und TRACHTENBROT. TRACHTENBROT ([6], Satz 6, S. 252) gibt nämlich ein Kriterium dafür an, daß ein Teilgraph eines zweipoligen Graphen ein (eventuell nicht-eigentlicher) zweipoliger Graph sei; diese Bedingung ist im wesentlichen die Aussage B) unseres Satzes 2 (vgl. den Zusammenhang der Bahnen eines zweipoligen Graphen und der Prim-Implikanten den entsprechenden Wahrheitsfunktion: [1], S. 209, oder [4], S. 177). Andererseits kann der Satz an der Seite 197 der Arbeit [5] so umformt werden, daß er eine andere logische Bedingung für dieselbe graphentheoretische Beschaffenheit gebe; diese Bedingung besteht darin, daß die Variablen, die den Kanten des Teilgraphen entsprechen, durch eine monotone Superposition abtrennbar sind. So gibt die Vergleichung der zitierten Ergeb-

1) Es ist ein offenes Problem, ob der unserem Satze 3 analoge Satz auch im allgemeinen Fall für abtrennbare Mengen gilt.

nisse von KUSNJEZOW und TRACHTENBROT einen mittelbaren Beweis für unseren Satz 2 im Spezialfall einer monotonen Wahrheitsfunktion, die durch einen zweipoligen Graphen ohne Wiederholung realisiert werden kann.

§ 2. Terminologie

Unter einer *Funktion* verstehen wir immer eine *Wahrheitsfunktion* (mit anderer Benennung: *Boolesche Funktion*), d. h. eine eindeutige Funktion der Form $f(x_1, \ldots, x_n)$, deren Wert und jede Variable wahr ($\uparrow$) oder falsch ($\downarrow$) sein kann.

Wir bezeichnen die Negation durch eine Querlinie, die Konjunktion durch & oder als Multiplikation.

Eine Konjunktion[2]) heißt eine *Elementarkonjunktion* von f, wenn jedes Glied derselben entweder eine unnegierte oder eine negierte Variable von f ist. Dieselbe Variable darf nicht in einer Elementarkonjunktion zweimal auftreten (in entgegengesetztem Falle könnten ja entweder einige Vorkommen derselben gestrichen werden, oder wäre die Konjunktion identisch falsch). Die Buchstaben $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ werden immer Elementarkonjunktionen bedeuten. Wir sagen, daß die Elementarkonjunktion $\mathfrak{A}$ eine *Implikante* von f ist, falls $\mathfrak{A}$ die Funktion f impliziert, d. h. falls f das Wert $\uparrow$ hat in jedem solchen Falle, daß $\mathfrak{A} = \uparrow$ ist. $\mathfrak{A}$ ist eine *Prim-Implikante* von f, wenn $\mathfrak{A}$ eine Implikante von f ist, aber keine echte Teil-Konjunktion von $\mathfrak{A}$ die Funktion f impliziert.[3]) (Für diesen Begriff siehe die Arbeiten [2], [3] von QUINE, und die Seite 175 der Arbeit [4] von KUSNJEZOW.)

Enthält eine Elementarkonjunktion $\mathfrak{A}$ jede Variable von f (entweder negiert oder unnegiert), so sagen wir, daß $\mathfrak{A}$ eine *volle Elementarkonjunktion* von f ist. Ist $\mathfrak{A}$ eine volle Elementarkonjunktion von f, so entspricht $\mathfrak{A}$ in bekannter Weise einer Stelle des Definitionsbereiches von f, so daß wir über den Wert einer Variablen in $\mathfrak{A}$, ferner über den Substitutionswert $f(\mathfrak{A})$ (d. h. den Wert von f an der einzigen Stelle, wo $\mathfrak{A}$ erfüllt wird) sprechen können.

Sei die geordnete Menge der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ durch Θ bezeichnet; wir schreiben $f[\Theta]$ statt $f(x_1, \ldots, x_n)$. Sei Θ' eine beliebige Teilmenge von Θ. Im Falle, daß zwei Wahrheitsfunktionen $f^*[(\Theta - \Theta') \cup x'], f'[\Theta']$ existieren (wo die Anordnung von Θ auch auf die Mengen $\Theta - \Theta'$ und Θ' übertragen wird, und x' eine in Θ nicht auftretende Variable ist, die in $(\Theta - \Theta') \cup x'$ als letzte auftritt), so daß durch die Substitution $x' = f'[\Theta']$ eine Funktion entsteht, die als Funktion von $x_1, \ldots, x_n$ (in dieser Reihenfolge) aufgefaßt, mit $f[\Theta]$

---

[2]) Auch die Konjunktion mit einem Gliede und die leere Konjunktion (deren Wert $\uparrow$ ist) wird erlaubt.

[3]) Die identisch falsche Funktion hat keine Prim-Implikante; die identisch wahre hat eine einzige: die leere Konjunktion.

übereinstimmt, sprechen wir über eine *Darstellung* von $f[\Theta]$ in der Form einer *einfachen wiederholungsfreien Superposition.*[4]) Existiert eine solche Superposition für eine Teilmenge Θ' von Θ, so heißt Θ' eine *abtrennbare Teilmenge* (für die Funktion f).

Man sagt, daß die Wahrheitsfunktion f von der Variablen x_i *monoton wachsend* abhängt, wenn keine zwei solche volle Elementarkonjunktionen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ existieren, daß

(i) $\mathfrak{A}$ die Variable x_i unnegiert, $\mathfrak{B}$ aber x_i negiert enthält,

(ii) jede andere Variable gleichen Wert in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ hat,

(iii) $f(\mathfrak{A}) = \downarrow$ und $f(\mathfrak{B}) = \uparrow$ ist.

Es ist leicht ersichtlich, daß dies dann und nur dann der Fall ist, wenn keine Prim-Implikante von f die Variable x_i negiert enthält.

Die Funktion f hängt von x_i *monoton abnehmend* ab, wenn keine zwei solche volle Elementarkonjunktionen existieren, daß

(i) $\mathfrak{A}$ die Variable x_i unnegiert enthält, $\mathfrak{B}$ aber x_i negiert enthält,

(ii) jede andere Variable gleichen Wert in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ hat,

(iii) $f(\mathfrak{A}) = \uparrow$ und $f(\mathfrak{B}) = \downarrow$ gilt.

Dies ist genau dann der Fall, wenn keine Prim-Implikante x_i unnegiert enthält.

Ist f eine monoton wachsende oder monoton abnehmende Funktion von x_i, so sagen wir, daß f eine *monotone Funktion* von x_i ist. Ist f^* in einer Darstellung von f in der Form einer einfachen wiederholungsfreien Superposition eine monotone Funktion der Variablen x', so sagen wir, daß Θ' eine *monoton-abtrennbare Teilmenge* von Θ (für f) ist.[5])

Ist $\mathfrak{A}$ eine Elementarkonjunktion von $f[\Theta]$ und Θ' eine beliebige Teilmenge von Θ, so bedeutet $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ diejenige Teil-Konjunktion von $\mathfrak{A}$, die genau die gemeinsamen Variablen von $\mathfrak{A}$ und Θ' enthält (jede Variable ist unnegiert oder negiert je nachdem wie sie in $\mathfrak{A}$ vorkommt).

---

[4]) Das Wort „wiederholungsfrei" bezieht sich auf die Tatsache, daß f' und f^* keine gemeinsamen Argumente haben. Das Wort „einfach" ist für die Unterscheidung von den Superpositionen, wobei mehr als eine Variable von f^* substituiert wird, ferner von den iterierten Superpositionen zweckmäßig. Der betrachtete Superpositionsbegriff wird im Hilfssatz 1.1 der Arbeit [5] von KUSNJEZOW (S. 192) von einem anderen Gesichtspunkt aus erleuchtet.

[5]) Es ist möglich, daß eine Teilmenge der Variablen abtrennbar, aber nicht monoton-abtrennbar ist: z. B. die Menge $\{x, y\}$ für die Funktion

$$x z \vee y z \vee \bar{x} \bar{y} \bar{z} = (x \vee y) \longleftrightarrow z.$$

§ 3. Ergebnisse

Satz 1. *Betrachten wir eine Darstellung der Wahrheitsfunktion* $f[\Theta]$ *in der Form einer einfachen wiederholungsfreien Superposition. Eine Elementarkonjunktion* $\mathfrak{A}$ *ist dann und nur dann eine Prim-Implikante von* f, *wenn eine der folgenden drei Aussagen für* $\mathfrak{A}$ *wahr ist:*

α) $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{\Theta - \Theta'}$ *und* $\mathfrak{A}$ *ist eine Prim-Implikante von* f^*,

β) $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ *ist eine Prim-Implikante von* f' *und* $\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}$ & x' *ist eine Prim-Implikante von* f^*,

γ) $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ *ist eine Prim-Implikante von* $\bar{f}'$ *und* $\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}$ & $\bar{x}'$ *ist eine Prim-Implikante von* f^*.

Bemerkung. Es ist klar, daß für jede Elementarkonjunktion nur eine der Aussagen α), β), γ) gelten kann.

Der Beweis gründet sich auf zwei Hilfssätze.[6])

Hilfssatz 1. *Ist* $\mathfrak{A}$ *eine Prim-Implikante von* f *und ist* $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ *nicht leer, so ist entweder*

β') $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ *eine Implikante von* f' *und* $\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}$ & x' *eine Implikante von* f^*, *oder*

γ') $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ *eine Implikante von* $\bar{f}'$ *und* $\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}$ & $\bar{x}'$ *eine Implikante von* f^*.

Beweis. Ist $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ keine Implikante von f' oder $\bar{f}'$, so existieren zwei passende volle Elementarkonjunktionen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ von f', deren $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ eine gemeinsame Teil-Konjunktion ist, und für die $f'(\mathfrak{B}) = \uparrow, f'(\mathfrak{C}) = \downarrow$ gelten. Es sei $\mathfrak{D}$ eine beliebige volle Elementarkonjunktion von f, deren $\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}$ eine Teil-Konjunktion ist. Wenn $f'(\mathfrak{D}_{\Theta'}) = \uparrow$ ist, dann muß

$$f(\mathfrak{D}) = f(\mathfrak{D}_{\Theta-\Theta'} \mathbin{\&} \mathfrak{B}) = \uparrow$$

gelten (die erste Gleichung gilt, weil die Werte der Variablen von f^* übereinstimmen; und die zweite gilt, weil $\mathfrak{A}$ eine Teil-Konjunktion von $\mathfrak{D}_{\Theta-\Theta'}$ & $\mathfrak{B}$ ist). Wenn $f'(\mathfrak{D}_{\Theta'}) = \downarrow$ ist, dann muß (aus ähnlichen Gründen)

$$f(\mathfrak{D}) = f(\mathfrak{D}_{\Theta-\Theta'} \mathbin{\&} \mathfrak{C}) = \uparrow$$

gelten. Daher ist $\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}$ eine Implikante von f; das ist aber im Widerspruch zur Annahme, daß $\mathfrak{A}$ eine Prim-Implikante ist.

Wir haben die Behauptung von β') oder γ') über $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ bewiesen; wir sollen noch die Richtigkeit der entsprechenden Aussage über $\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}$ zeigen. Wir nehmen an, daß $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ die Funktion f' impliziert, und betrachten den

[6]) Wir lassen im Beweis die Spezialfälle außer Acht, wenn f' identisch $\uparrow$ oder $\downarrow$ ist, und überlassen dem Leser die Richtigkeit des Satzes in diesen entarteten Fällen einzusehen und ihn einfacher zu formulieren.

Wert von f^* an einer beliebigen Stelle, wo $\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}$ & x' wahr ist. Dann muß f^* mit $f(\mathfrak{E}) = \uparrow$ übereinstimmen, wo $\mathfrak{E}$ eine beliebige volle Elementarkonjunktion von f ist, die $\mathfrak{A}$ als Teilkonjunktion enthält. Daher ist $\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}$ & x' eine Implikante von f^*. Der Beweis verläuft ähnlich, wenn $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ die Funktion $\bar{f}'$ impliziert.

Hilfssatz 2. *Gilt eine der Aussagen $\beta'), \gamma')$ für eine Elementarkonjunktion $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{A}$ eine Implikante der Funktion f.*

Beweis. Wir nehmen an, daß $\beta')$ erfüllt ist und $\mathfrak{A}$ bezüglich einer Stelle des Definitionsbereiches von f wahr ist. Dann ist f' wahr an der entsprechenden Stelle, und auch $\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}$ wird genügt. Daher gibt die Substitution von f' für x' der Funktion f den Wahrheitswert $\uparrow$. Im Falle, daß $\gamma')$ gilt, verläuft der Beweis analog.

Beweis des Satzes 1. Es sei eine Prim-Implikante $\mathfrak{A}$ von f angegeben. Im Falle $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}$ wird $\alpha)$ ersichtlich erfüllt. Im entgegengesetzten Falle können wir den Hilfssatz 1 anwenden. Wäre $\beta')$ erfüllt, aber $\beta)$ nicht, so könnten wir eine Teil-Konjunktion von $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ betrachten, die eine Prim-Implikante von f' ist, ferner eine Teil-Konjunktion von $\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}$ & x', die eine Prim-Implikante von f^* ist. (Es muß in mindestens einem Falle eine echte Teil-Konjunktion-Relation bestehen.) Durch die Anwendung des Hilfssatzes 2 würden wir dann eine Implikante von f bekommen, die echter Teil von $\mathfrak{A}$ ist, was der Bedingung für $\mathfrak{A}$ widerspricht. Im Falle, daß $\gamma')$ erfüllt wird, aber $\gamma)$ nicht, schließen wir analog.

Umgekehrt, ist $\beta)$ oder $\gamma)$ gültig, so ist wegen des Hilfssatzes 2 $\mathfrak{A}$ eine Implikante von f. Wäre $\mathfrak{A}$ keine Prim-Implikante, so sollte sie eine Prim-Implikante echt enthalten; der Hilfssatz 1 führte dann aber zu einem Widerspruch. — Gilt $\alpha)$, so ist $\mathfrak{A}$ offenbar eine Prim-Implikante von f.

Satz 2. *Die folgenden Eigenschaften* A) *und* B) *sind äquivalent für eine beliebige Teilmenge Θ' der Variablenmenge Θ der Wahrheitsfunktion $f[\Theta]$:*

A) *Θ' ist monoton-abtrennbar,*

B) *sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei beliebige Prim-Implikanten von f, und ist weder $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ noch $\mathfrak{B}_{\Theta'}$ die leere Konjunktion, so ist auch $\mathfrak{A}_{\Theta'}$&$\mathfrak{B}_{\Theta-\Theta'}$ eine Prim-Implikante von f.*

Beweis. Wird A) erfüllt, so ist es unmöglich, daß in zwei passenden Prim-Implikanten der Funktion f^* die Variable x' unnegiert bzw. negiert auftritt. B) muß wegen der Aussage $\beta)$ oder $\gamma)$ des Satzes 1 gelten.

Umgekehrt, es sei B) erfüllt. Betrachten wir die Funktionen $f'[\Theta']$ und $f^*[(\Theta-\Theta') \cup x']$, die durch die Formeln

$$f'[\Theta'] = \mathfrak{A}^{(1)}_{\Theta'} \vee \cdots \vee \mathfrak{A}^{(k)}_{\Theta'}$$

und

$$(1)\qquad f^*[(\Theta-\Theta')\cup x'] = \mathfrak{A}^{(k+1)} \vee\cdots\vee \mathfrak{A}^{(m)} \vee \mathfrak{A}^{(1)}_{\Theta-\Theta'}\, x' \vee\cdots\vee \mathfrak{A}^{(k)}_{\Theta-\Theta'}\, x'$$

definiert werden, wo $\mathfrak{A}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{A}^{(m)}$ die sämtlichen Prim-Implikanten von f sind, und $\mathfrak{A}^{(i)}_{\Theta'}$ $(1 \leqq i \leqq m)$ genau im Falle $k < i \leqq m$ die leere Konjunktion ist.

Der Beweis wird vollständig sein, wenn wir zeigen, daß f gleich f^* ist, wenn $x' = f'$ gilt. In der Tat, substituieren wir die die Funktion f' definierende Formel für jedes Vorkommen von x' in (1), und wenden die Distributivität an. Die Aussage B) versichert, daß auf diese Weise die sämtlichen Prim-Implikanten von f und nur diese an der rechten Seite von (1) entstehen (dieselbe Prim-Implikante kann in mehreren Exemplaren auftreten), was die Gleichheit der superponierten Funktion mit f bedeutet.

Satz 3. *Sind Θ' und Θ'' monoton-abtrennbare Teilmengen von Θ für die Funktion f, deren Durchschnitt nicht leer ist, so ist auch $\Theta' \cap \Theta''$ monoton-abtrennbar für f.*

Beweis. Satz 2 hat ein Kriterium dafür gegeben, daß eine Teilmenge monoton-abtrennbar sei; deshalb genügt es zu beweisen, daß $\Theta' \cap \Theta''$ die Aussage B) erfüllt, wenn beide von Θ' und Θ'' sie erfüllen.

In der Tat ist dann $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ & $\mathfrak{B}_{\Theta-\Theta'}$ eine Prim-Implikante von f, und damit ist auch

$$(\mathfrak{A}_{\Theta'} \,\&\, \mathfrak{B}_{\Theta-\Theta'})_{\Theta''} \,\&\, \mathfrak{B}_{\Theta-\Theta''} = \mathfrak{A}_{\Theta'\cap\Theta''} \,\&\, \mathfrak{B}_{(\Theta-\Theta')\cap\Theta''} \,\&\, \mathfrak{B}_{\Theta-\Theta''} =$$
$$= \mathfrak{A}_{\Theta'\cap\Theta''} \,\&\, \mathfrak{B}_{\Theta-(\Theta'\cap\Theta'')}$$

eine Prim-Implikante von f.

Literaturverzeichnis

[1] A. Ádám, Kétpólusú elektromos hálózatokról (Über zweipolige elektrische Netze). III, *A Magyar Tudományos Akadémia Mat. Kutató Intézetének Közleményei*, **3** (1958), 207—218. (Ungarisch, mit russischer und deutscher Zusammenfassung.)

[2] W. V. Quine, The problem of simplifying truth functions, *American Math. Monthly*, **59** (1952), 521—531.

[3] W. V. Quine, A way to simplify truth functions, *American Math. Monthly*, **62** (1955), 627—631.

[4] А. В. Кузнецов, Об одной свойстве функций, реализуемых неплоскими бесповторными схемами, Труды Мат. Инст. им. Стеклова, **51** (1958), 174—185.

[5] А. В. Кузнецов, О бесповторных контактных схемах и бесповторных суперпозициях функций алгебры логики, Труды Мат. Инст. им. Стеклова, **51** (1958), 186—225.

[6] Б. А. Трахтенброт, К теории бесповторных контактных схем, Труды Мат. Инст. им. Стеклова, **51** (1958), 226—269.

(Eingegangen am 25. August 1959)