Sur l'ensemble des points de l'asymétrie approximative

Par MARIE KULBACKA à Łódź (Pologne)

Etant donné une fonction $f(x)$ de variable réelle, désignons par $E_{a,\varepsilon}$ (a réel, ε positif) l'ensemble des points x pour lesquels

$$|f(x)-a|<\varepsilon.$$

Nous appelons le nombre fini a une *valeur limite approximative de droite* de la fonction $f(x)$ au point x_0, si pour chaque $\varepsilon>0$

$$E_{a,\varepsilon}\cap(x_0,\infty)$$

possède au point x_0 la densité supérieure (éventuellement densité extérieure supérieure) positive.

En remplaçant la condition $x_0<x<\infty$ par la condition $-\infty<x<x_0$ nous obtenons la définition d'une *valeur limite approximative de gauche.*

Les symboles $D_{x_0}E$, $\overline{D}_{x_0}E$, $\underline{D}_{x_0}E$ appliqués dans le présent travail signifieront respectivement: la densité, la densité supérieure et la densité inférieure de l'ensemble E au point x_0. Au cas où l'ensemble E est non-mesurable, il faut comprendre ces symboles comme les densités extérieures correspondantes.

J'indiquerai par $W^+(x_0)$ et $W^-(x_0)$, selon les cas, l'ensemble de toutes les valeurs limites approximatives de droite ou de gauche de la fonction $f(x)$ au point x_0.

Il est facile d'observer que les *limites approximatives supérieures* et *inférieures* (à condition qu'elles soient finies) sont des *valeurs limites approximatives* et que de plus

$$\overline{\lim_{x\to x_0+}}\text{ appr } f(x)=\sup W^+(x_0),\qquad \underline{\lim_{x\to x_0+}}\text{ appr } f(x)=\inf W^+(x_0),$$

$$\overline{\lim_{x\to x_0-}}\text{ appr } f(x)=\sup W^-(x_0),\qquad \underline{\lim_{x\to x_0-}}\text{ appr } f(x)=\inf W^-(x_0).$$

Par conséquent, si $f(x)$ possède au point x_0 une limite approximative de droite ou de gauche, alors $W^+(x_0)$ ou $W^-(x_0)$, selon les cas, est composé d'un seul point (d'une façon analogue comme pour les ensembles des valeurs limites ordinaires).

Un théorème de YOUNG[1]) affirme que, pour toute fonction $f(x)$, l'ensemble des points x_0 pour lesquels l'ensemble des valeurs limites de droite n'est pas identique à l'ensemble des valeurs limites de gauche est tout au plus dénombrable. Vu ce théorème se pose la question qu'est-ce que l'on peut dire de l'ensemble des points x_0 pour lesquels $W^+(x_0) \neq W^-(x_0)$.[2]) La réponse nous est donnée par le suivant

Théorème. *L'ensemble N de tous les x_0 pour lesquels $W^+(x_0) \neq W^-(x_0)$, est de la 1ière catégorie.*[3])

---

[1]) W. H. YOUNG, La symétrie de structure des fonctions de variables réelles, *Bulletin des sciences math.*, (2) **52** (1928), 265—280.

[2]) Mlle L. BELOWSKA a prouvé que l'ensemble des x_0 pour lesquels $\overline{\lim\limits_{x\to x_0+}}\,\mathrm{appr}\, f(x) \neq \overline{\lim\limits_{x\to x_0-}}\,\mathrm{appr}\, f(x)$ peut être de la puissance du continu et Mlle H. MATYSIAK a démontré que cet ensemble est de la 1ière catégorie. C'est une partie de l'ensemble $\{x\colon W^+(x) \neq W^-(x)\}$.

[3]) *(Note ajoutée le 1 mars 1960.)* Par analogie on peut prouver que N est de mesure nulle (remarque de M. ÁKOS CSÁSZÁR). Voici une démonstration de ce fait (que j'ai trouvée indépendamment, après avoir pris connaissance de la remarque de M. CSÁSZÁR). Les notations employées ici ont le même sens que dans la démonstration du théorème que N est de la 1ière catégorie. On sait de la démonstration du théorème plus haut que $L = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m$ et que, si $x_0 \in F_m$, on a

(a) $$D_{x_0}[E_{y_0,\frac{1}{m}} \cap (-\infty, x_0)] = 0, \quad \overline{D}_{x_0}[E_{y_0,\varepsilon} \cap (x_0, \infty)] > 0 \qquad \text{pour tout } \varepsilon > 0.$$

Désignons par F_{mn} l'ensemble des $x_0 \in F_m$ pour lesquels

(b) $$y_0 \in \left(\frac{n}{4m}, \frac{n+1}{4m}\right].$$

Il est évident que $F_m = \bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} F_{mn}$ et par conséquent $L = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} F_{mn}$.

Prenons en considération l'ensemble F_{mn} où m et n sont fixés (mais arbitraires). En vertu de (a) et (b) on a pour tout $x_0 \in F_{mn}$

$$D_{x_0}\left\{x\colon \frac{n}{4m} < f(x) < \frac{n+2}{4m}\right\} \cap (-\infty, x_0) = 0; \quad \overline{D}_{x_0}\left\{x\colon \frac{n}{4m} < f(x) < \frac{n+2}{4m}\right\} \cap (x_0, \infty) > 0.$$

Mais ces densités sont les dérivés de DINI de la fonction

$$\Gamma(\xi) = \operatorname{sign}\xi \left| \left\{x\colon \frac{n}{4m} < f(x) < \frac{n+2}{4m}\right\} \cap (0, \xi) \right|$$

qui est presque partout dérivable; il en résulte que F_{mn} est de mesure nulle et par conséquent L est de mesure nulle. De la même façon on peut prouver que Z est de mesure nulle. $N = L \cup Z$ est alors aussi de mesure nulle, ce qu'il fallait démontrer.

D é m o n s t r a t i o n. En premier lieu on prouve que les ensembles $W^+(x_0)$ et $W^-(x_0)$ sont fermés.

Soit y_0 un point d'accumulation de l'ensemble $W^+(x_0)$ et soit ε un nombre positif arbitraire. Soit y_1 un point de $W^+(x_0)$ appartenant à l'intervalle $(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$. Prenons $\varepsilon_1>0$ tel que

$$(y_1-\varepsilon_1, y_1+\varepsilon_1)\subset(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon).$$

Vu que $y_1\in W^+(x_0)$, on a

$$\overline{D}_{x_0}[E_{y_1,\varepsilon_1}\cap(x_0,\infty)]>0,$$

et puisque

$$E_{y_1,\varepsilon_1}\subset E_{y_0,\varepsilon}$$

on a à plus forte raison

$$\overline{D}_{x_0}[E_{y_0,\varepsilon}\cap(x_0,\infty)]>0.$$

Cela étant valable pour tout $\varepsilon>0$, il en résulte que

$$y_0\in W^+(x_0)$$

ce qui prouve que l'ensemble $W^+(x_0)$ est fermé. On prouve de la même façon que l'ensemble $W^-(x_0)$ est fermé.

Soit L l'ensemble des points x_0 pour lesquels l'ensemble $W^+(x_0)\setminus W^-(x_0)$ n'est pas vide. Démontrons que l'ensemble L est de la 1ière catégorie.

Faisons correspondre à chaque point $x_0\in L$ un nombre $y_0=y(x_0)\in$ $\in W^+(x_0)\setminus W^-(x_0)$. Vu que $y_0\bar{\in} W^-(x_0)$, il existe un nombre naturel $m_0=m(x_0)$ tel que

$$D_{x_0}[E_{y_0,\frac{1}{m_0}}\cap(-\infty,x_0)]=0. \tag{1}$$

On peut admettre, puisque $W^-(x_0)$ est fermé, que le nombre $m_0=m(x_0)$ est choisi tellement grand que l'intervalle $\left(y_0-\dfrac{1}{m_0}, y_0+\dfrac{1}{m_0}\right)$ ne contient aucun point de $W^-(x_0)$.

Ainsi à chaque point $x_0\in L$ on a fait correspondre l'intervalle $\left(y_0-\dfrac{1}{m_0}, y_0+\dfrac{1}{m_0}\right)$ où $y_0=y(x_0)$ et $m_0=m(x_0)$. Désignons par F_m l'ensemble des points x_0 de l'ensemble L pour lesquels $m(x_0)$ a la valeur fixée m. Il est évident que

$$L=\bigcup_{m=1}^{\infty}F_m.$$

Vu que $y_0\in W^+(x_0)$, l'ensemble

$$E_{y_0,\frac{1}{2m}}\cap(x_0,\infty) \tag{2}$$

possède au point x_0 la densité supérieure positive. Désignons par F_{mk} l'ensemble des points x_0 de F_m pour lesquels

$$(3) \qquad \frac{1}{k+1} < \overline{D}_{x_0}[E_{y_0, \frac{1}{2m}} \cap (x_0, \infty)] \leqq \frac{1}{k} \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

Il est évident que

$$F_m = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{mk}.$$

En vertu de (1) il existe un entourage gauche (ξ, x_0) du point x_0 tel que pour les points x de cet entourage on a

$$(4) \qquad \frac{|E_{y_0, \frac{1}{m}} \cap (x, x_0)|}{x_0 - x} < \frac{1}{2k}.$$

Divisons les ensembles F_{mk} en des ensembles F_{mkr} tels que (4) a lieu pour tous les points de l'intervalle $\left(x_0 - \frac{1}{r}, x_0\right)$. De même que précédemment, on a

$$F_{mk} = \bigcup_{r=1}^{\infty} F_{mkr}.$$

Divisons maintenant l'axe des y en des intervalles demi-ouverts de longueur $\frac{1}{10m}$, en posant

$$I_p = \left(\frac{p}{10m}, \frac{p+1}{10m}\right],$$

où p passe par toutes les valeurs entières. Désignons par F_{mkrp} l'ensemble des $x_0 \in F_{mkr}$ pour lesquels $y_0 \in I_p$. Comme

$$F_{mkr} = \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} F_{mkrp},$$

on aura

$$L = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} F_{mkrp}.$$

Je dis que les ensembles F_{mkrp} sont non-denses. Supposons qu'un des F_{mkrp} ne soit pas non-dense, c'est-à-dire qu'il soit dense sur un certain intervalle (a, b). On peut admettre que la longueur de cet intervalle soit plus petite que $\frac{1}{r}$.

Soit $x_0 \in F_{mkrp} \cap (a, b)$. Vu que la densité supérieure de l'ensemble (2) est en vertu de (3), plus grande que $\frac{1}{2k}$, il existe un intervalle (x_0, x), où $x > x_0$ et $x \in (a, b)$, sur lequel la densité moyenne de l'ensemble (2) est plus grande que $\frac{1}{2k}$, c'est-à-dire

$$\frac{|E_{y_0, \frac{1}{2m}} \cap (x_0, x)|}{x - x_0} > \frac{1}{2k}.$$

Puisque la fonction

$$\Gamma(\xi) = \frac{|E_{y_0, \frac{1}{2m}} \cap (x_0, \xi)|}{\xi - x_0}$$

est une fonction continue de la variable ξ pour $\xi > x_0$ et que F_{mkrp} est dense sur l'intervalle (a, b), il existe un point $x_1 \in F_{mkrp} \cap (a, b)$ tel que $\Gamma(x_1) > \frac{1}{2k}$, c'est-à-dire que

$$\frac{|E_{y_0, \frac{1}{2m}} \cap (x_0, x_1)|}{x_1 - x_0} > \frac{1}{2k}. \tag{5}$$

Or nous avons supposé $b - a < \frac{1}{r}$, donc $x_1 - x_0 < \frac{1}{r}$; vu que $x_1 \in F_{mkrp}$ et en vertu de (4) nous avons donc

$$\frac{|E_{y_1, \frac{1}{m}} \cap (x_0, x_1)|}{x_1 - x_0} < \frac{1}{2k} \tag{6}$$

où y_1 est un nombre de l'ensemble $W^+(x_1) \setminus W^-(x_1)$ qui correspond au point x_1. Ensuite puisque x_0 et x_1 appartiennent à F_{mkrp} on a $y_0, y_1 \in I_p$, donc $|y_1 - y_0| < \frac{1}{10m}$, d'où il résulte que

$$\left(y_0 - \frac{1}{2m}, y_0 + \frac{1}{2m}\right) \subset \left(y_1 - \frac{1}{m}, y_1 + \frac{1}{m}\right).$$

On en tire que

$$E_{y_0, \frac{1}{2m}} \subset E_{y_1, \frac{1}{m}}$$

et cela implique que les inégalités (5) et (6) sont contradictoires.

D'après ce qui précède chacun des ensembles F_{mkrp} est non-dense et par conséquent l'ensemble L est de la 1ière catégorie.

De la même façon on peut prouver que l'ensemble Z de tous ces nombres réels x, pour lesquels $W^-(x) \setminus W^+(x)$ n'est pas vide, est de la 1ière catégorie. Vu que $N = L \cup Z$, N est aussi de la 1ière catégorie, ce qu'il fallait démontrer.

Faisons pour terminer une observation, à savoir que pour les valeurs limites on connait le théorème suivant:

„Pour toute fonction $f(x)$ à valeurs réelles l'ensemble des points x pour lesquels l'ensemble des valeurs limites du côté droit ou l'ensemble des valeurs limites du côté gauche ne contient pas le nombre $f(x)$, est tout au plus dénombrable."

La démonstration de ce théorème est analogue à la démonstration du théorème de YOUNG. Par analogie on pourrait espérer que la proposition suivante est vraie:

„Pour toute fonction $f(x)$ à valeurs réelles l'ensemble des points x pour lesquels $W^+(x)$ ou $W^-(x)$ ne contient pas le nombre $f(x)$, est de la 1ière catégorie."

Cette proposition est toutefois fausse, ce que prouve l'exemple suivant:

Soit l'ensemble E un G_δ dense, de mesure nulle et soit $\chi_E(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble E. Dans chaque point x_0 nous avons $\lim\limits_{x \to x_0} \text{appr}\, \chi_E(x) = 0$, donc les ensembles $W^+(x_0)$ et $W^-(x_0)$ contiennent le seul nombre zéro. Vu qu'aux points de l'ensemble E on a $\chi_E(x) = 1$, donc E est l'ensemble des points, dans lesquels $W^+(x)$ et $W^-(x)$ ne contiennent pas le nombre $\chi_E(x)$. Mais l'ensemble E est de la 2ième catégorie (il est même résiduel), ce qui prouve que la proposition plus haut est fausse.

(Reçu le 26 octobre 1959)