Über das nicht ausgeartete Rédeische schiefe Produkt $G \circ \Gamma$

Von Z. JANKO in Lištica (Jugoslavien)

Prof. L. Rédei zum 60. Geburtstag

§ 1. Einleitung

L. RÉDEI hat in der großen Arbeit [3] das schiefe Produkt $G \circ \Gamma$ zweier Gruppen G, Γ mit den Elementen (a, α) $(a \in G, \alpha \in \Gamma)$ und der Produktregel

$$(1) \qquad (a, \alpha)(b, \beta) = (a b^{\alpha} \beta^{a}, a^{b} \alpha^{b} \beta)$$

allgemein untersucht, wobei $b^{\alpha}, \beta^{a}; a^{b}, \alpha^{b}$ Funktionen der angegebenen Argumente mit Werten aus G bzw. Γ sind, und die Bedingungen dafür aufgestellt, daß $G \circ \Gamma$ eine Gruppe mit der Einheit (e, ε) ist (wo e bzw. ε das Einselement von G bzw. Γ ist). Diese Bedingungen sind (vgl. RÉDEI [3], § 3):

$$(2) \qquad a^{\varepsilon} = a, \quad e^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha} = \alpha^{\varepsilon} = e, \quad \alpha^{e} = \alpha, \quad \varepsilon^{a} = e^{a} = a^{e} = \varepsilon,$$

$$(3) \qquad c^{a^{b}} = c, \quad \gamma^{\alpha^{\beta}} = \gamma,$$

$$(4) \qquad \gamma^{a^{b}} = e, \quad c^{\alpha^{\beta}} = \varepsilon,$$

$$(5) \qquad b^{\alpha} c^{\alpha^{b}} = (bc)^{\alpha} (b^{c})^{\alpha}, \quad \gamma^{a^{\beta}} \beta^{a} = (\beta^{\gamma})^{a} (\gamma\beta)^{a},$$

$$(6) \qquad \beta^{\alpha} c^{\alpha\beta} = (c^{\beta})^{\alpha} (\beta^{c})^{\alpha}, \quad \gamma^{ba} b^{a} = (b^{\gamma})^{a} (\gamma^{b})^{a},$$

$$(7) \qquad \beta^{\alpha} \gamma^{\alpha\beta} = (\gamma^{\beta})^{\alpha} (\beta\gamma)^{\alpha}, \quad c^{ba} b^{a} = (cb)^{a} (c^{b})^{a},$$

$$(8) \qquad (b^{c}\gamma)^{\alpha} = (b^{c})^{\alpha} \gamma^{\alpha}, \quad (c\beta^{\gamma})^{a} = c^{a} (\beta^{\gamma})^{a},$$

$$(9) \qquad \gamma^{\alpha^{c^{\beta}} \beta^{c}} = \gamma^{\alpha\beta}, \quad c^{b^{\gamma} a^{\gamma^{b}}} = c^{ba}.$$

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, dann sprechen wir über eine (Rédeische) Gruppe $G \circ \Gamma$.

Aus (2) bis (9) folgen noch weitere Gleichungen:

$$(10) \qquad \gamma^{\alpha^{c}} = \gamma^{\alpha}, \quad c^{a^{\gamma}} = c^{a},$$

$$(11) \qquad c^{a^{b}\beta} = c^{\beta}, \quad \gamma^{b\,\alpha^{\beta}} = \gamma^{b}.$$

Sind genau k der vier Relationen $b^\alpha = b$, $\beta^\alpha = e$, $a^b = \varepsilon$, $\alpha^b = \alpha$ identisch erfüllt, wo e bzw. ε das Einselement von G bzw. Γ ist, so heißt $G \circ \Gamma$ k-fach ausgeartet. Im Falle $k = 0$ nennen wir $G \circ \Gamma$ nichtausgeartet.

Es gibt nur vier wesentlich verschiedene zweifach ausgeartete Fälle:

$$G_1\Gamma\colon\ (a, \alpha)(b, \beta) = (ab, a^b \alpha^b \beta),$$

$$G_2\Gamma\colon\ (a, \alpha)(b, \beta) = (ab^\alpha, \alpha^b \beta),$$

$$G_3\Gamma\colon\ (a, \alpha)(b, \beta) = (ab\beta^\alpha, a^b \alpha\beta),$$

$$G_4\Gamma\colon\ (a, \alpha)(b, \beta) = (ab^\alpha, a^b \alpha\beta),$$

von denen die ersten zwei gerade die Schreierschen Erweiterungen von Γ mit G bzw. die Zappa—Szépschen Produkte von G und Γ darstellen.

Kochendörffer [2] untersuchte die übrigen zwei Spezialfälle und stellte fest, daß die durch $G_3\Gamma$, $G_4\Gamma$ gelieferten Gruppen sich als zweimal hintereinander ausgeführte Schreiersche Erweiterungen erzeugen lassen, wobei jedesmal die bei den Erweiterungen auftretenden Bestimmungsstücke sich aus den Angaben G, Γ und aus den ebenfalls angegebenen Funktionen β^α, a^b bzw. b^α, a^b festlegen lassen.

Rédei [4] stellte die Frage, ob mit dem Verfahren aus [2] sich sogar jede Gruppe $G \circ \Gamma$ in einige hintereinanderfolgende Konstruktionen von der Art $G_1\Gamma$, $G_2\Gamma$ zerlegen lasse. F. Rühs [6] sagt, daß die Beantwortung dieser Frage sehr schwierig sei. Er gibt eine Antwort für den Fall der einfach ausgearteten Gruppen:

$$G*\Gamma\colon\ (a, \alpha)(b, \beta) = (ab\beta^\alpha, a^b \alpha^b \beta)$$

$$G{*}{*}\Gamma\colon\ (a, \alpha)(b, \beta) = (ab^\alpha, a^b \alpha^b \beta)$$

und zwar stellt er fest, daß $G*\Gamma$ eine zweimalige Schreiersche Erweiterung gewisser Untergruppen, während $G{*}{*}\Gamma$ eine einfache Schreiersche Erweiterung gewisser Untergruppen ist, von denen die eine ein Zappa—Szépsches Produkt ist.

Tibiletti [7] untersuchte die nicht ausgeartete Gruppe $G \circ \Gamma$, hat aber nur gezeigt, daß die Gruppe $G \circ \Gamma$ sich mit zwei Schreierschen Erweiterungen und mit einem Produkt zweier vertauschbaren Gruppen herstellen läßt. Da der Durchschnitt dieser vertauschbaren Gruppen nicht immer das Einselement ist, somit dieses Produkt im allgemeinen kein Zappa—Szépsches Produkt zu sein braucht (vgl. [5]), so haben wir im nichtausgearteten Fall noch nicht die vollständige Beantwortung der Rédeischen Frage.

Wir betrachten die (nicht ausgeartete) Rédeische Gruppe $G \circ \Gamma$, bestimmt durch vier Funktionen $b^\alpha, \beta^\alpha, a^b, \alpha^b$. Dann gelten die Bedingungen (2) bis (11).

Hält man in den zwei Funktionen $c^\beta (\in G)$, $\gamma^b (\in \Gamma)$ den Operator β bzw. b fest und läßt das Grundelement varieren, so entstehen zwei Abbildungen, die wir in der Form

$$c \to c^\beta \quad (c \in G), \qquad \gamma \to \gamma^b \quad (\gamma \in \Gamma) \tag{12}$$

bezeichnen. In [3] § 4 hat RÉDEI bemerkt, daß zur näheren Untersuchung der Gruppe $G \circ \Gamma$ diese Abbildungen gute Dienste leisten können, aber diese Abbildungen verhalten sich im allgemeinen recht kompliziert.

In JANKO [1] wurde gezeigt, daß die Abbildungen (12) Permutationen von G bzw. Γ sind und wenn wir

$${}^\beta a = \left(\beta^{\beta^{-1}}\right)^{-1} a^{\beta^{-1}} \left(\beta^{\left(\beta^{\beta^{-1}}\right)^{-1} a^{\beta^{-1}}}\right)^{\beta^{-1}}, \tag{13}$$

$${}^b\alpha = \left(b^{\alpha^{b^{-1}} \left(b^{b^{-1}}\right)^{-1}}\right)^{b^{-1}} \alpha^{b^{-1}} \left(b^{b^{-1}}\right)^{-1} \tag{14}$$

setzen, dann gelten die Beziehungen

$$({}^\beta a)^\beta = a, \quad ({}^b\alpha)^b = \alpha. \tag{15}$$

Wie üblich, nennen wir eine Untergruppe $L(\Lambda)$ von $G(\Gamma)$ zulässig, wenn sie bei den Permutationen $c \to c^\beta$ $(\gamma \to \gamma^b)$ in sich abgebildet wird. Wegen (13), (14) und (15) gilt: Wenn eine zulässige Untergruppe $L(\Lambda)$ von $G(\Gamma)$ alle Elemente von der Gestalt $\alpha^\beta (a^b)$ enthält, dann sind die Abbildungen

$$c \to c^\beta (c \in L) \quad (\gamma \to \gamma^b (\gamma \in \Lambda)).$$

Permutationen von $L(\Lambda)$. Diese seien induzierte Permutationen genannt.

In dieser Arbeit untersuchen wir weiter die nichtausgeartete Rédeische Gruppe $G \circ \Gamma$ und zeigen insbesondere, daß gewisse nichtausgeartete Gruppen $G \circ \Gamma$ sich sogar mit drei Schreierschen Erweiterungen herstellen lassen.

§ 2. Eigenschaften gewisser Komplexe von G und Γ

RÉDEI [3] definierte die folgenden vier Komplexe:

G_1 besteht aus den a mit $\alpha^a = \alpha \; (= \alpha^1)$,
G_0 „ „ „ a „ $b^a = \varepsilon \; (= \alpha^0)$,
Γ_1 „ „ „ α „ $a^\alpha = a \; (= a^1)$,
Γ_0 „ „ „ α „ $\beta^\alpha = e \; (= a^0)$,

wo e bzw. ε das Einselement von G bzw. Γ ist. Es gilt $e \in G_1, G_0$, $\varepsilon \in \Gamma_1, \Gamma_0$. Ferner lassen sich (3), (4) so aussprechen:

$$a^b \in \Gamma_1, \Gamma_0; \quad \alpha^\beta \in G_1, G_0.$$

RÉDEI bemerkte auch, daß $G \circ \Gamma$ dann und nur dann ausgeartet ist, wenn mindestens eine der Gleichungen

$$G_1 = G, \quad G_0 = G, \quad \Gamma_1 = \Gamma, \quad \Gamma_0 = \Gamma$$

gilt. Wir werden hier einige Eigenschaften dieser Komplexe beweisen.

Satz 1. *Die komplexe G_0, Γ_0 sind zulässige Untergruppen von G bzw. Γ.*

Beweis. Wenn $a_0, b_0 \in G_0$ ist, dann ist $c^{a_0} = \varepsilon$ und $c^{b_0} = \varepsilon$ für alle $c \in G$. Nach (7_2) ist $c^{b_0 a_0} = \varepsilon$. Aus (7_2) folgt ferner für $b = b_0$, $a = b_0^{-1}$

$$b_0^{b_0^{-1}} = (c b_0)^{b_0^{-1}},$$

woraus für $c = b_0^{-1}$ sich

$$b_0^{b_0^{-1}} = \varepsilon$$

ergibt. Also ist

$$(c b_0)^{b_0^{-1}} = \varepsilon.$$

Für $c = a b_0^{-1}$ folgt hieraus endlich

$$a^{b_0^{-1}} = \varepsilon$$

für alle $a \in G$. Der Komplex G_0 ist also eine Untergruppe von G. Diese Untergruppe ist auch zulässig, denn nach (10_2) ist

$$c^{b_0^{\alpha}} = c^{b_0} = \varepsilon.$$

Ähnlich beweist man mit Hilfe von (7_1) und (10_1), daß der Komplex Γ_0 eine zulässige Untergruppe von Γ ist.

Korollar. *Die Abbildungen $c \to c^{\beta}$ bzw. $\gamma \to \gamma^{b}$ induzieren Permutationen von G_0 bzw. Γ_0.*

Satz 2. *Die Komplexe $G' = G_0 \cap G_1$ und $\Gamma' = \Gamma_0 \cap \Gamma_1$ sind zulässige Normalteiler von G_0 bzw. Γ_0.*

Beweis. Wenn $a', b' \in G'$ ist, dann ist $b'a' \in G_0$ und $b'^{-1} \in G_0$. Man muß noch beweisen, daß $b'a' \in G_1$ und $b'^{-1} \in G_1$ ist. Nach (6_2) ist $\gamma^{b'a'} = \gamma$ und $\gamma b'^{b'^{-1}} = \gamma^{b'^{-1}}$. Für $\gamma = \varepsilon$ folgt aus der letzten Relation $b'^{b'^{-1}} = \varepsilon$, ferner gilt $\gamma^{b'^{-1}} = \gamma$. Der Komplex G' ist eine Gruppe. Wenn $b' \in G'$ ist, dann ist $b'^{\alpha} \in G_0$ und nach (5_2) ist auch $\gamma^{b'^{\alpha}} = \gamma$. Die Untergruppe G' ist also zulässig. Wenn $a' \in G'$ und $b_0 \in G_0$ ist, dann ist nach (6_2):

$$\gamma^{b_0 a' b_0^{-1}} = \left(\gamma^{b_0 a'}\right)^{b_0^{-1}},$$

$$\gamma^{b_0 a'} = \gamma^{b_0},$$

$$(\gamma^{b_0})^{b_0^{-1}} = \gamma.$$

Es gilt also

$$\gamma^{b_0 \alpha' b_0^{-1}} = \gamma$$

somit ist G' normal in G_0. Ähnlich beweist man, daß Γ' zulässiger Normalteiler von Γ_0 ist.

K o r o l l a r. *Die Abbildungen $c \to c^{\beta}$ bzw. $\gamma \to \gamma^{b}$ induzieren Automorphismen von G' bzw. Γ'.*

Nach (5) ist nämlich $(a'b')^{\alpha} = a'^{\alpha} b'^{\alpha}, (\alpha'\beta')^{a} = \alpha'^{a} \beta'^{a}$ $(a', b' \in G', \alpha', \beta' \in \Gamma')$.

S a t z 3. *Wenn die Gruppe Γ abelsch ist und identisch $a^{b} = b^{a}$ gilt, dann ist der Komplex G_1 eine zulässige Untergruppe von G.* (Ähnliches gilt für Γ_1.)

B e w e i s. Sei $\alpha^{a_1} = \alpha$ und $\alpha^{b_1} = \alpha$ für alle $\alpha \in \Gamma$. Dann folgt aus (6_2)

$$\alpha^{b_1 a_1} b_1^{a} = (b_1^{\alpha})^{a_1} (\alpha^{b_1})^{a_1},$$

also

$$\alpha^{b_1 a_1} b_1^{a_1} = a_1^{b_1 \alpha} \alpha,$$

und daraus ergibt sich wegen (10_2)

$$\alpha^{b_1 a_1} b_1^{a_1} = a_1^{b_1} \alpha,$$

also endlich

$$\alpha^{b_1 a_1} = \alpha.$$

Ferner folgt aus (6_2)

$$\alpha b_1^{b_1^{-1}} = (b_1^{\alpha})^{b_1^{-1}} \alpha^{b_1^{-1}},$$

also

$$\alpha b_1^{b_1^{-1}} = (b_1^{-1})^{b_1} \alpha^{b_1^{-1}},$$

d. h.

$$\alpha^{b_1^{-1}} = \alpha.$$

Der Komplex G_1 ist also eine Gruppe.

Aus (5_2) folgt

$$\alpha^{a_1^{\beta}} \beta = (\beta^{\alpha})^{a_1} \alpha \beta,$$

also

$$\alpha^{a_1^{\beta}} \beta = a_1^{\beta^{\alpha}} \alpha \beta,$$

d. h. wegen (4_2)

$$\alpha^{a_1^{\beta}} = \alpha.$$

Die Gruppe G_1 ist also zulässig. Damit ist Satz 4 bewiesen.

In § 3 werden wir den folgenden Satz anwenden.

Satz 4. *Wenn die Abbildungen $\gamma \to \gamma^b$ $(\gamma \in \Gamma)$ nicht nur Permutationen sondern sogar Automorphismen von Γ sind, dann gelten die Beziehungen*

$$b^{-1}b^{\alpha} \in G_0, \quad b_0^{-1}b_0^{\alpha} \in G_1$$

für alle $b \in G$, $b_0 \in G_0$, $\alpha \in \Gamma$.

(Natürlich gilt auch der „duale" Satz für Γ_0, Γ_1.)

Beweis. Aus (7_2) und (10_2) folgt

(16) $$c^{b^{-1}b^{\alpha}}(b^{-1})^b = (cb^{-1})^b (c^{b^{-1}})^{b^{\alpha}}.$$

Weiter folgt aus (5_2)

$$\left(c^{b^{-1}}\right)^{b^{\alpha}} \alpha^b = \left(\alpha^{c^{b^{-1}}}\right)^b \left(c^{b^{-1}}\alpha\right)^b$$

und daraus ergibt sich wegen (4_1), (2_4) und $(c^{b^{-1}}\alpha)^b = (c^{b^{-1}})^b \alpha^b$

(17) $$\left(c^{b^{-1}}\right)^{b^{\alpha}} = \left(c^{b^{-1}}\right)^b.$$

Aus (16) und (17) folgt

(18) $$c^{b^{-1}b^{\alpha}}(b^{-1})^b = (cb^{-1})^b (c^{b^{-1}})^b.$$

Wieder nach (7_2) ist

$$(b^{-1})^b = (cb^{-1})^b (c^{b^{-1}})^b.$$

Hieraus und aus (18) folgt $c^{b^{-1}b^{\alpha}} = \varepsilon$ also schließlich

$$b^{-1}b^{\alpha} \in G_0.$$

Wir haben noch die Beziehung $b_0^{-1}b_0^{\alpha} \in G_1$ $(b_0 \in G_0,\ \alpha \in \Gamma)$ zu beweisen. Aus (6_2) folgt

(19) $$\gamma^{b_0^{-1}b_0^{\alpha}} = \left(\gamma^{b_0^{-1}}\right)^{b_0^{\alpha}},$$

denn nach Satz 1 gilt $b_0^{\alpha} \in G_0$. Andererseits folgt aus (5_2) und (10_1)

$$\left(\gamma^{b_0^{-1}}\right)^{b_0^{\alpha}} \alpha^{b_0} = \left(\gamma^{b_0^{-1}}\alpha\right)^{b_0},$$

also

(20) $$\left(\gamma^{b_0^{-1}}\right)^{b_0^{\alpha}} = \left(\gamma^{b_0^{-1}}\right)^{b_0}.$$

Ferner ist nach (6_2)

(21) $$\left(\gamma^{b_0^{-1}}\right)^{b_0} = \gamma.$$

Aus (19), (20) und (21) folgt endlich

$$\gamma^{b_0^{-1} b_0^{\alpha}} = \gamma,$$

d. h.

$$b_0^{-1} b_0^{\alpha} \in G_1.$$

Damit ist Satz 4 bewiesen.

Bemerkung. Es existiert die nicht ausgeartete Rédeische Gruppe $G \circ \Gamma$ mit den folgenden Eigenschaften:

a) die Gruppen G, Γ sind abelsch,

b) es gilt identisch $a^b = b^a$, $\alpha^\beta = \beta^\alpha$,

c) es gilt identisch $(ab)^\gamma = a^\gamma b^\gamma$, $(\alpha\beta)^c = \alpha^c \beta^c$.

Das Rédeische Beispiel der nicht ausgearteten Gruppe $G \circ \Gamma$ aus [3] § 14 hat offenbar (wie man leicht einsieht) die verlangten Eigenschaften.

§ 3. Dekomposition gewisser nichtausgearteter Gruppen $G \circ \Gamma$

Die Komplexe G_0, G' haben die Bedeutung aus § 2.

Satz 5. *Ist die Gruppe $G \circ \Gamma$ so beschaffen, daß die Gruppe G abelsch ist und die Abbildungen $\gamma \to \gamma^c (\gamma \in \Gamma)$ nicht nur Permutationen von Γ sondern auch Automorphismen von Γ sind, so ist die Menge (G_0, Γ) der Elemente (a_0, α) $(a_0 \in G_0, \alpha \in \Gamma)$ ein Normalteiler von $G \circ \Gamma$ und es gilt*

$$G \circ \Gamma / (G_0, \Gamma) \approx G/G_0, \tag{22}$$

d. h. die Gruppe $G \circ \Gamma$ ist eine Schreiersche Erweiterung von (G_0, Γ) mit G/G_0, wobei die bei der Erweiterung auftretenden Bestimmungsstücke sich aus den Angaben G, Γ und aus den ebenfalls angegebenen Funktionen $b^\alpha, \beta^\alpha, a^b, \alpha^b$ festlegen lassen.

Beweis. Der Komplex (G_0, Γ) ist eine Gruppe, denn es gilt (mit $a_0, b_0 \in G_0$)

$$(a_0, \alpha)(b_0, \beta) = (a_0 b_0^\alpha \beta^\alpha, \alpha^{b_0} \beta),$$

$$(a_0, \alpha)^{-1} = \left((\alpha^{\alpha^{-1}})^{-1}, \alpha^{-1}\right)(a_0^{-1}, \varepsilon)$$

(s. Rédei [3], § 4) und nach Satz 1 ist $a_0 b_0^\alpha \beta^\alpha, \left(\alpha^{\alpha^{-1}}\right)^{-1}, a_0^{-1} \in G_0$.

Ferner ist (G_0, Γ) normal in $G \circ \Gamma$, denn aus

$$(a_0, \alpha)(b, \beta) = (b, \beta)(c, \gamma), \quad (a_0 \in G_0),$$

folgt

$$(a_0 b^\alpha \beta^\alpha, a_0^b \alpha^b \beta) = (b c^\beta \gamma^\beta, b^c \beta^c \gamma),$$

also nach Vergleichen der ersten „Komponenten"

$$c^{\beta} = b^{-1} b^{\alpha} a_0 \beta^{\alpha} (\gamma^{\beta})^{-1},$$

woraus nach Satz 4 und Korollar von Satz 1 schließlich $c \in G_0$ folgt.

Man setzt

$$G = \sum_{A \in G/G_0} u_A G_0.$$

Die Abbildung

$$A \to (u_A, \varepsilon)(G_0, \Gamma) \quad (A \in G/G_0)$$

zeigt, daß (22) gilt. Die Gruppe $G \circ \Gamma$ ist also eine Erweiterung von (G_0, Γ) mit G/G_0. Jetzt werden wir noch das Faktorensystem und die Automorphismenmenge dieser Erweiterung berechnen. Es gilt für $a_0, b_0 \in G_0$

$$(u_A, \varepsilon)(a_0, \alpha)(u_B, \varepsilon)(b_0, \beta) = (u_A, \varepsilon)(a_0 u_B^{\alpha}, a_0^{u_B} \alpha^{u_B})(b_0, \beta) =$$
$$= (u_A, \varepsilon)(u_B^{\alpha} a_0, a_0^{u_B} \alpha^{u_B})(b_0, \beta) = (u_A, \varepsilon)(u_B^{\alpha}, \varepsilon)(a_0, a_0^{u_B} \alpha^{u_B})(b_0, \beta) =$$
$$= (u_A, \varepsilon)(u_B, \varepsilon)(u_B^{-1} u_B^{\alpha}, \varepsilon)(a_0, a_0^{u_B} \alpha^{u_B})(b_0, \beta) =$$
$$= (u_A u_B, u_A^{u_B})(u_B^{-1} u_B^{\alpha}, \varepsilon)(a_0, a_0^{u_B} \alpha^{u_B})(b_0, \beta) =$$
$$= (u_{AB} u_{AB}^{-1} u_A u_B, u_A^{u_B})(u_B^{-1} u_B^{\alpha}, \varepsilon)(a_0, a_0^{u_B} \alpha^{u_B})(b_0, \beta) =$$
$$= (u_{AB}, \varepsilon)(u_{AB}^{-1} u_A u_B, u_A^{u_B})(u_B^{-1} u_B^{\alpha} a_0, a_0^{u_B} \alpha^{u_B})(b_0, \beta).$$

Da $u_{AB}^{-1} u_A u_B \in G_0$ und $u_B^{-1} u_B^{\alpha} \in G_0$ (Satz 4) ist, so ist

$$(u_{AB}^{-1} u_A u_B, u_A^{u_B})$$

das Faktorensystem und jedem $B \in G/G_0$ ist ein Automorphismus

$$(a_0, \alpha) \to (u_B^{-1} u_B^{\alpha} a_0, a_0^{u_B} \alpha^{u_B})$$

von (G_0, Γ) zugeordnet.

Satz 6. *Ist die Gruppe $G \circ \Gamma$ so beschaffen, daß die Gruppe G abelsch ist und die Abbildungen $\gamma \to \gamma^c$ $(\gamma \in \Gamma)$ nicht nur Permutationen von Γ sondern auch Automorphismen von Γ sind, so ist die Gruppe (G_0, Γ) eine Schreiersche Erweiterung von G' mit einer Schreierschen Erweiterung von Γ mit G_0/G', wobei jedesmal die bei den Erweiterungen auftretenden Bestimmungsstücke sich aus den Angaben G, Γ und aus den angegebenen Funktionen $b^{\alpha}, \beta^{\alpha}, a^b, \alpha^b$ festlegen lassen.*

Beweis. Es gilt

$$(G', \varepsilon) \approx G',$$

denn es ist $(a', \varepsilon)(b', \varepsilon) = (a' b', \varepsilon)$ für $a', b' \in G'$. Die Gruppe (G', ε) ist normal in (G_0, Γ), denn man sieht leicht, daß für $a' \in G'$, $b_0 \in G_0$, $\beta \in \Gamma$ die Relation

$$(a', \varepsilon)(b_0, \beta) = (b_0, \beta)({}^{\beta}a', \varepsilon)$$

gilt, da $({}^{\beta}a')^{\beta} = a'$ und nach Korollar von Satz 2 auch ${}^{\beta}a' \in G'$ gilt.

Setzt man

$$G_0 = \sum_{A \in G_0/G'} G' v_A,$$

so gilt auch

$$(G_0, \Gamma) = \sum_{(A, \alpha) \in (G_0/G', \Gamma)} (G', \varepsilon)(v_A, \alpha),$$

worin $(G_0/G', \Gamma)$ die Menge aller Elemente (A, α) $(A \in G_0/G', \alpha \in \Gamma)$ bezeichnet. In der Menge $(G_0/G', \Gamma)$ definieren wir das schiefe Produkt $(G_0/G') \mathbin{s} \Gamma$ mit

$$(A, \alpha)(B, \beta) = (AB, \alpha^{v_B}\beta).$$

Die Abbildung

$$(G', \varepsilon)(v_A, \alpha) \to (A, \alpha)$$

zeigt, daß

$$(G_0, \Gamma)/(G', \varepsilon) \approx (G_0/G') \mathbin{s} \Gamma$$

ist, denn es gilt nach Satz 4 $v_A \overset{\alpha}{v_B} = v_A v_B a' = a_1' v_{AB}$ mit $a', a_1' \in G'$ und wir haben:

$$(G', \varepsilon)(v_A, \alpha)(G', \varepsilon)(v_B, \beta) = (G', \varepsilon)(v_A, \alpha)(v_B, \beta) =$$
$$= (G', \varepsilon)(v_A \overset{\alpha}{v_B} \beta^{\alpha}, \alpha^{v_B}\beta) = (G', \varepsilon)(\beta^{\alpha} v_A \overset{\alpha}{v_B}, \alpha^{v_B}\beta) =$$
$$= (G', \varepsilon)(\beta^{\alpha}, \varepsilon)(v_A \overset{\alpha}{v_B}, \alpha^{v_B}\beta) = (G', \varepsilon)(v_A \overset{\alpha}{v_B}, \alpha^{v_B}\beta) =$$
$$= (G', \varepsilon)(a_1' v_{AB}, \alpha^{v_B}\beta) = (G', \varepsilon)(a_1', \varepsilon)(v_{AB}, \alpha^{v_B}\beta) = (G', \varepsilon)(v_{AB}, \alpha^{v_B}\beta).$$

Das schiefe Produkt $(G_0/G') \mathbin{s} \Gamma$ ist also eine zerfallende Erweiterung von Γ mit G_0/G', ferner ist (G_0, Γ) eine Erweiterung von G' mit $(G_0/G') \mathbin{s} \Gamma$. Jetzt werden wir noch das Faktorensystem und die Automorphismenmenge dieser letzten Erweiterung berechnen. Das Faktorensystem $(c', \varepsilon) \in (G', \varepsilon)$ bekommen wir aus der Relation

$$(v_A, \alpha)(v_B, \beta) = (c', \varepsilon)(v_{AB}, \alpha^{v_B}\beta)$$

und daraus folgt $c' = \overset{-1}{v_{AB}} v_A \overset{\alpha}{v_B} \beta^{\alpha} \in G'$ nach Satz 4. Das Automorphismensystem bekommen wir aus der Relation

$$(v_B, \beta)(a', \varepsilon) = (b', \varepsilon)(v_B, \beta),$$

woraus $b' = a'^{\beta}$ folgt. Jedem $(B, \beta) \in (G_0/G') \mathbin{s} \Gamma$ ist also der Automorphismus

$$(a', \varepsilon) \to (a'^{\beta}, \varepsilon)$$

von (G', ε) zugeordnet. Damit haben wir Satz 6 bewiesen.

K o r o l l a r. *Ist die nicht ausgeartete Rédeische Gruppe* $G \circ \Gamma$ *so beschaffen, daß die Gruppe G abelsch ist und die Abbildungen* $\gamma \to \gamma^c$ $(\gamma \in \Gamma)$ *nicht nur Permutationen von* Γ *sondern auch Automorphismen von* Γ *sind, so läßt sich die Gruppe* $G \circ \Gamma$ *mit drei (im Fall* $G_0 = G'$ *mit zwei) Schreierschen Erweiterungen darstellen.*

Natürlich gilt auch „der duale Satz" mit Γ_0, Γ'.

Literaturverzeichnis

[1] Z. Janko, Über das nicht ausgeartete Rédeische schiefe Produkt, *Glasnik mat.-fiz. i astr.*, **14** (1959), 285—290.

[2] R. Kochendörffer, Zur Theorie der Rédeischen schiefen Produkte, *Journal f. d. reine u. angew. Math.*, **192** (1953), 96—101.

[3] L. Rédei, Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, *Journal f. d. reine u. angew. Math.*, **188** (1950), 201—227.

[4] L. Rédei, Besprechung der Arbeit [2] im *Zentralblatt f. Math.*, **51** (1954), 256—257.

[5] L. Rédei—J. Szép, Die Verallgemeinerung der Theorie des Gruppenproduktes von Zappa—Casadio, *Acta Sci. Math.*, **16** (1955), 165—170.

[6] F. Rühs, Über die einfach ausgearteten Rédeischen schiefen Produkte, *Journal f. d. reine u. angew. Math.*, **198** (1957), 81—86. [Vgl. auch Z. Janko, Über das Rédeische schiefe Produkt vom Typ $G \odot \Gamma$, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 4—6.]

[7] C. M. Tibiletti, Una composizione del prodotto sghembo di Rédei, *Collectanea Math. Milano*, **167** (1958), 1 - 15.

(Eingegangen am 28. September 1959)