Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von nichtkonstanten Lösungen linearer Funktionalgleichungen

Von ZOLTÁN DARÓCZY in Debrecen

Herrn Professor Ladislaus Rédei zum 60. Geburtstag gewidmet

In gewissen Funktionalgleichungen treten außer den unbekannten Funktionen und den Veränderlichen auch konstante Größen auf. A priori sind diese Konstanten beliebig wählbar, aber nicht jedem möglichen Wert derselben entsprechen nichttriviale Lösungen der Funktionalgleichung. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, für einige Funktionalgleichungen von solchem Typus notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz nichtkonstanter Lösungen zu bestimmen.

Herr Professor J. ACZÉL hat mich auf das folgende Ergebnis von I. BERSTEIN aufmerksam gemacht (s. S. MARCUS [3]):

Die Funktionalgleichung

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \qquad (0<\lambda<1)$$

besitzt für $\lambda \neq \frac{1}{2}$ keine nichtkonstante Lösung.

Auffallend ist es dabei, daß bezüglich der Funktion $f(x)$ keinerlei Voraussetzungen gemacht wurden, so daß das Ergebnis auch für nichtstetige Lösungen gilt. J. ACZÉL [1] hat bezüglich der allgemeineren Funktionalgleichung

$$f(ax+by)=pf(x)+qf(y) \tag{1}$$

bewiesen, daß diese nur im Falle $a=p$, $b=q$ stetige nichtkonstante Lösungen besitzt, wobei dieses Ergebnis mitsamt dem Beweis auch dann gültig bleibt, falls wir statt der Stetigkeit eine schwächere Voraussetzung, wie z. B. die der Meßbarkeit, Beschränkheit usw. machen.

In derselben Arbeit hat J. ACZÉL auch die Funktionalgleichung

$$f(ax+by+c)=pf(x)+qf(y)+r \tag{1'}$$

behandelt.

In Hinblick auf die obigen Resultate läßt sich nun die Frage aufwerfen: was kann man über die nichtkonstanten Lösungen von (1) und (1′) im allgemeinen Falle aussagen, d. h. dann, falls über die Funktion nichts vorausgesetzt wird? Die vorliegende Arbeit soll einen Beitrag zur Lösung dieses Problems leisten.

In § 1 beweisen wir eine leichte Verallgemeinerung der Tatsache, daß aus $a=b$ das Bestehen von $p=q$ folgt und umgekehrt. In § 2 zeigen wir, daß aus der Existenz nichtkonstanter Lösungen und aus der Rationalität einer der Konstanten a, p das Bestehen von $a=p$ folgt und ebenso für b, q. Wir untersuchen in diesem § auch den Fall algebraischer Koeffizienten. In § 3 geben wir notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz der nicht-trivialen Lösungen der Funktionalgleichung $f(ax+y)=pf(x)+f(y)$ im Falle beliebiger reeller a und p.

Für die Problemstellung sowie für wertvolle Ratschläge möchte ich Herrn Prof. J. ACZÉL aufrichtig danken.

§ 1. Die kommutativen Fälle

Bevor wir unser eigentliches Problem in Angriff nehmen, geben wir eine Verallgemeinerung des Ergebnisses von I. BERSTEIN. Es sei $\circ$ eine kommutative Operation, d. h. für zwei beliebige reelle (oder komplexe) Zahlen x, y soll

$$x \circ y = y \circ x$$

gelten. Dann haben wir den folgenden

Satz 1. *Die Funktionalgleichung*

$$f(x \circ y) = af(x) + bf(y) + c \tag{2}$$

kann nur im Falle $a=b$ eine nichtkonstante Lösung haben.

Beweis. Wegen der Kommutativität der Operation $\circ$ gilt $f(x \circ y) = f(y \circ x)$, und dementsprechend folgt aus (2)

$$af(x)+bf(y)+c = af(y)+bf(x)+c$$

d. h.

$$(a-b)[f(x)-f(y)] = 0.$$

Da $f(x)$ keine Konstante ist, muß $a-b=0$, d. h. $a=b$ gelten. Im Falle

$$x \circ y = \frac{x+y}{2}, \quad a+b=1 \quad a>0, \quad b>0$$

erhalten wir das von I. BERSTEIN [3] auf einem längeren Wege gewonnene Ergebnis.

Weiterhin gilt der folgende, dem vorangehenden Satz analoge

Satz 2. *Die Funktionalgleichung*

$$f(ax+by+c)=f(x)\circ f(y) \tag{3}$$

kann nur im Falle $a=b$ *für jedes reelle (komplexe)* x *eine nichtkonstante Lösung* $f(x)$ *haben.*

Beweis. Wegen der Kommutativität der Operation $\circ$ gilt

$$f(ax+by+c)=f(ay+bx+c). \tag{4}$$

Wir nehmen an, daß (3) für $a \neq b$ eine nichtkonstante Lösung hat. Dann gibt es Werte x_1 und x_2, für welche $f(x_1) \neq f(x_2)$ ist. Wir betrachten nunmehr das Gleichungssystem

$$ax+by+c=x_1, \quad bx+ay+c=x_2. \tag{5}$$

Dieses ist immer lösbar, falls nur $a^2-b^2 \neq 0$ ist. Da $a \neq b$ ist, haben wir also nur im Falle $a=-b \neq 0$ nicht immer eine Lösung. Diesen Fall werden wir einstweilen unbeachtet lassen. Es sei $x=\xi$, $y=\eta$ die eindeutig bestimmte Lösung von (5). Unter Anwendung von (4) erhalten wir dann

$$f(x_1)=f(a\xi+b\eta+c)=f(b\xi+a\eta+c)=f(x_2),$$

was offenbar einen Widerspruch bedeutet, da wir ja $f(x_1) \neq f(x_2)$ angenommen haben.

Nun bleibt nur noch die Untersuchung des Falles $a=-b \neq 0$ übrig. In diesem Falle nimmt unsere Funktionalgleichung die Gestalt

$$f[a(x-y)+c]=f(x)\circ f(y) \tag{6}$$

an. Setzen wir $x=y$, so ergibt sich

$$f(c)=f(x)\circ f(x). \tag{7}$$

Wegen der Kommutativität folgt aus (6)

$$f[a(x-y)+c]=f[a(y-x)+c].$$

Indem wir davon und von (7) Gebrauch machen, erhalten wir

$$f[a(x-y)+c]\circ f[a(y-x)+c]=f[a(x-y)+c]\circ f[a(x-y)+c]=f(c).$$

Hier läßt sich die linke Seite auf Grund von (6) in der Form

$$f[a(ax-ay+c-ay+ax-c)+c]$$

schreiben. Da $2a^2(x-y)+c=z$ beliebig ist $(a \neq 0)$, erhalten wir $f(z)=$ $=f(c)$, d. h. falls es eine Lösung gibt, so kann diese nur konstant sein.

Damit haben wir unseren Satz vollständig bewiesen.

§ 2. Die Funktionalgleichung $f(ax+by+c)=pf(x)+qf(y)+r$

In diesem Paragraphen werden wir die Funktionalgleichung

$$f(ax+by+c)=pf(x)+qf(y)+r \tag{8}$$

untersuchen, wobei keine der Konstanten a, b, p und q gleich Null ist, und x sowie y die Gesamtheit der reellen (komplexen) Zahlen durchläuft. Zuerst beweisen wir einen Hilfssatz, den wir im folgenden benötigen werden.

Hilfssatz 1. *Genügt die nichtkonstante Funktion $f(x)$ der Gleichung (8), so genügt die Funktion $g(x)\equiv f(x)-f(0)$ der Cauchyschen Grundgleichung*

$$g(x+y)=g(x)+g(y). \tag{9}$$

Beweis. Zuerst setzen wir $a+b\neq 0$ voraus. Dann folgt aus (8), indem wir $x=y$ setzen, mit Rücksicht auf die Tatsache, daß $f(x)$ nicht konstant ist, $p+q\neq 0$. Mit der Substitution

$$x=y=\frac{ax^*+by^*}{a+b}$$

ergibt sich aus (8)

$$f(ax^*+by^*+c)=(p+q)f\left(\frac{ax^*+by^*}{a+b}\right)+r.$$

Falls wir hier die linke Seite gemäß (8) aufschreiben und die Bezeichnungen

$$\alpha=\frac{a}{a+b}, \quad \beta=\frac{b}{a+b}, \quad \gamma=\frac{p}{p+q}, \quad \delta=\frac{q}{p+q}$$

einführen, erhalten wir die Gleichung

$$\gamma f(x^*)+\delta f(y^*)=f(\alpha x^*+\beta y^*), \tag{10}$$

wobei $\alpha+\beta=\gamma+\delta=1$ ist. Indem wir in (10) $x^*=0$ bzw. $y^*=0$ setzen, erhalten wir die beiden folgenden Gleichungen:

$$f(\beta y^*)=\gamma f(0)+\delta f(y^*), \quad f(\alpha x^*)=\gamma f(x^*)+\delta f(0).$$

Mit Hilfe dieser Relationen nehmen wir nun die folgende Umformung von (10) vor:

$$f(\alpha x^*+\beta y^*)=\gamma f(x^*)+\delta f(y^*)=f(\alpha x^*)-\delta f(0)+$$
$$+f(\beta y^*)-\gamma f(0)=f(\alpha x^*)+f(\beta y^*)-f(0).$$

Führen wir jetzt die Bezeichnungen $\alpha x^*=u$ und $\beta y^*=v$ ein ($\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$), so ergibt sich aus der obigen Gleichung

$$f(u+v)-f(0)=f(u)-f(0)+f(v)-f(0),$$

d. h. $g(t)\equiv f(t)-f(0)$ genügt tatsächlich der Gleichung (9).

Ist $a+b=0$, so folgt aus (8), da $f(x)$ nichtkonstant ist, $p+q=0$. Dann müssen wir die Gleichung

$$f[a(x-y)+c]=p[f(x)-f(y)]+r \tag{11}$$

untersuchen. Es sei $y=0$. In diesem Falle ergibt sich

$$f(ax+c)=p[f(x)-f(0)]+r,$$

woraus

$$p[f(x-y)-f(0)]=f[a(x-y)+c]-r=p[f(x)-f(y)]$$

und wegen $p\neq 0$

$$f(x-y)=f(x)-f(y)+f(0)$$

folgt. Durch die Substitution $x-y=z$ $(x=y+z)$ gewinnen wir jetzt

$$f(y+z)=f(y)+f(z)-f(0)$$

und daraus folgt, daß $g(t)\equiv f(t)-f(0)$ der Gleichung (9) genügt.

Damit haben wir unseren Hilfssatz bewiesen.

Satz 3. *Sind von den Zahlen a, b, p, q die Zahlen a, b, oder a, q, oder b, p, oder p, q rational, so ist zur Existenz einer nichtkonstanten Lösung der Funktionalgleichung* (8) *notwendig und hinreichend, daß $a=p$, $b=q$ und (im Falle $a+b=1$, $c=0$) $r=0$ ist.*

Beweis. Setzen wir a rational voraus. Auf Grund von Hilfssatz 1 genügt $g(x)\equiv f(x)-f(0)$ der Cauchyschen Grundgleichung, und somit gilt

$$g(ax)=ag(x). \tag{12}$$

Anderseits folgt aus (8), indem man $y=0$ setzt,

$$f(ax+c)=pf(x)+qf(0)+r.$$

Durch eine Umformung und unter Anwendung von (12) erhält man

$$pf(x)+qf(0)+r-f(0)=f(ax+c)-f(0)=f(ax)-f(0)+$$
$$+f(c)-f(0)=af(x)-af(0)+f(c)-f(0),$$

woraus sich $(a-p)f(x)=$ Konstante ergibt, und da die Funktion $f(x)$ nicht konstant ist, muß notwendigerweise $a=p$ sein.

Im Falle wo b rational ist, verläuft der Beweis ähnlich.

Ist p eine rationale Zahl, so gilt

$$f(ax-px)=f(ax-px)-f(0)+f(0)=g(ax-px)+f(0)=$$
$$=g(ax)-g(px)+f(0)=g(ax+c)-g(c)-g(px)+f(0)=$$
$$=pf(x)+qf(0)+r-f(c)-pf(x)+pf(0)+f(0)=f(0),$$

d. h. $f[(a-p)x]=$ Konstante, und da die Funktion $f(x)$ nichtkonstant ist, muß $a=p$ sein.

Im Falle wo q rational ist, verläuft der Beweis ähnlich.

Ist $a+b=1$ und $c=0$, so nimmt unsere Funktionalgleichung die Gestalt

$$f[ax+(1-a)y]=af(x)+(1-a)f(y)+r$$

an. Setzt man $x=y$, so ergibt sich $f(x)=f(x)+r$, d. h. in diesem Falle muß $r=0$ sein.

Damit haben wir die Notwendigkeit der Bedingungen bewiesen.

Der Beweis der Hinlänglichkeit geschieht durch Angabe von Lösungsfunktionen. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

I. Ist $c=0$ und $r=0$, so ist $f(x)=Ax$ eine Lösung, wobei A eine von Null verschiedene Konstante bedeutet.

II. Ist $c\neq 0$ und $r\neq 0$, so ist $f(x)=\frac{r}{c}x$ eine, offenbar nichtkonstante, Lösung.

III. Ist $c=0$, $r\neq 0$ und $a+b\neq 1$, so ist

$$f(x)=Ax+\frac{r}{1-a-b}$$

eine Lösung, wobei A eine von Null verschiedene Konstante bedeutet.

IV. Ist $c\neq 0$ und $r=0$, so unterscheiden wir die folgenden beiden Fälle:

1. $a+b\neq 1$. Dann ist

$$f(x)=Ax+\frac{Ac}{a+b-1}$$

eine Lösung, wobei A eine von Null verschiedene Konstante ist.

2. $a+b=1$. In diesem Falle nimmt unsere Funktionalgleichung die Gestalt

$$f[ax+(1-a)y+c]=af(x)+(1-a)f(y) \tag{13}$$

an. Durch die Substitution $x=y$ ergibt sich $f(x+c)=f(x)$, d. h. die Funktion ist periodisch mit der Periode c.

Mit Hilfe der Hamelschen Basis [2] geben wir nunmehr eine solche nirgends stetige additive Funktion $f(x)$ an, welche periodisch ist und der Gleichung (13) genügt.

Die Elemente der Hamelschen Basis seien die reellen Zahlen $\{c, \ldots, r_\nu, \ldots\}$. Dann entsteht eine beliebige reelle Zahl x in der Form

$$x=\alpha c+\sum_j \beta_j r_{\nu_j},$$

wobei α und die β_j rationale Zahlen sind. Wir definieren die Funktion $f(x)$ durch die Formel

$$f(x) = \alpha f(c) + \sum_j \beta_j f(r_{\nu_j})$$

und den Basiselementen entsprechend wählen wir die Funktionswerte

$$f(c) = 0, \quad f(r_\nu) \neq 0.$$

Da die Zahl a rational und die Funktion $f(x)$ additiv ist, gilt nunmehr

$$f[ax + (1-a)y + c] = f(ax) + f[(1-a)y] + f(c) = af(x) + (1-a)f(y),$$

d. h. die nichtkonstante Funktion $f(x)$ genügt (13).

Damit haben wir unseren Satz vollständig bewiesen.

Im Falle rationaler Konstanten ist es uns verhältnismäßig leicht gelungen, die früher unter Voraussetzung der Stetigkeit gewonnenen notwendigen Bedingungen zu beweisen, der Fall irrationaler Koeffizienten ist aber noch underledigt geblieben. Im folgenden erörtern wir die Ergebnisse unserer diesbezüglichen Untersuchungen.

Hilfssatz 2. *Befriedigt die nichtkonstante Funktion $f(x)$ die Gleichung* (8), *so gelten für die Funktion $g(x) \equiv f(x) - f(0)$ die Relationen*

$$g(a^k x) = p^k g(x), \quad g(b^k x) = q^k g(x),$$

wo k eine beliebige natürliche Zahl ist.

Beweis. Aus (8) folgt durch die Substitution $y = 0$

$$f(ax + c) = pf(x) + qf(0) + r.$$

Durch eine Umformung und unter Verwendung von Hilfssatz 1 erhalten wir

$$f(ax) - f(0) + f(c) - f(0) = f(ax + c) - f(0) =$$
$$= pf(x) - pf(0) + (p + q)f(0) - f(0) + r$$

und hieraus folgt

$$g(ax) = f(ax) - f(0) = p[f(x) - f(0)] + (p + q)f(0) + r - f(c) = pg(x).$$

Nunmehr verwenden wir vollständige Induktion. Wir nehmen an, daß unsere Behauptung für k richtig ist, d. h. daß $g(a^k x) = p^k g(x)$ gilt. Dann ergibt sich $g[a(a^k x)] = pg(a^k x) = pp^k g(x)$, d. h. $g(a^{k+1} x) = p^{k+1} g(x)$.

Damit ist unser Hilfssatz bereits bewiesen, da der Beweis für b und q analog verläuft.

Nun gilt der folgende

Satz 4. *Es seien a und b, oder a und q, oder b und p, oder p und q algebraische Zahlen, und $P_a(x)$, $P_b(x)$, $P_p(x)$ bzw. $P_q(x)$ sei das den Zahlen a, b, p bzw. q eindeutig zugeordnete irreduzible Hauptpolynom. Dann ist zur*

Existenz einer nichtkonstanten Lösung der Gleichung (8) *notwendig, daß auch die übrigen Koeffizienten algebraisch sind, und daß die Identitäten*

$$P_a(x) \equiv P_p(x), \quad P_b(x) \equiv P_q(x)$$

bestehen.

Beweis. Es sei

$$P_a(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i$$

(α_i rational für jedes i). Auf Grund der Hilfssätze 1 und 2 ergibt sich

$$(14) \qquad g\left[\left(a^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i a^i\right)x\right] = g(a^n x) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i g(a^i x) = \left(p^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i p^i\right) g(x)$$

und dementsprechend muß im Falle $P_a(a) = a^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i a^i = 0$, da $g(x)$ nicht konstant ist,

$$(15) \qquad p^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i p^i = 0$$

sein, so daß auch die Zahl p algebraisch ist. Dann gehört auch zu p ein eindeutig bestimmtes irreduzibles Hauptpolynom $P_p(x)$. Da $P_a(p) = 0$ ist, gilt $P_a(x) | P_p(x)$, so daß mit Rücksicht auf die Irreduzibilität $P_a(x) \equiv P_p(x)$ sein muß.

Ähnlich verläuft der Beweis im Falle, daß b algebraisch ist.

Falls p algebraisch ist und z. B. (15) befriedigt, dann erhalten wir, indem wir (14) in umgekehrter Richtung lesen, da $g(x)$ nicht konstant ist, die Relation $a^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i a^i = 0$, und so ist $P_p(a) = 0$; folglich gilt $P_p(x) | P_a(x)$ und wegen der Irreduzibilität

$$P_a(x) \equiv P_p(x).$$

Ein ähnlicher Schluß gilt im Falle, daß q algebraisch ist.

Obwohl dieser Satz keine vollständige Lösung des Problems bedeutet, lassen sich mit seiner Hilfe zahlreiche konkrete Fälle erledigen. Betrachten wir z. B. die Funktionalgleichung

$$f(\sqrt[3]{2}x + y) = pf(x) + f(y),$$

wo p reell ist. Das zu $\sqrt[3]{2}$ gehörige Hauptpolynom ist $x^3 - 2$. Da nun dieses außer $\sqrt[3]{2}$ keine reelle Wurzel hat, muß $\sqrt[3]{2} = p$ sein. Auf Grund einer analogen Überlegung gilt auch im allgemeinen das folgende

Korollar. *Sind a und b, oder a und q, oder b und p, oder p und q reelle algebraische Zahlen, für welche die entsprechenden eindeutig zugeordneten irreduziblen Hauptpolynome keine anderen reellen Wurzeln haben, so ist zur Existenz einer nichtkonstanten Lösung der Gleichung* (8) *notwendig, daß* $a = p$ *und* $b = q$ *ist.*

Dieses Korollar enthält offenbar die Notwendigkeitsaussage von Satz 3, da ja die rationalen Zahlen die eindeutig bestimmten Wurzeln von Polynomen ersten Grades sind.

Alle unsere Schlußweisen bleiben auch für komplexe Funktionen komplexer Veränderlichen gültig, der Beweis von Satz 3 läßt sich aber auf den Fall „komplexer rationaler" Koeffizienten nicht übertragen, da (12) für komplexe rationale Zahlen $a = \alpha + \beta i$ (α, β rational) seine Gültigkeit verliert. Hingegen bleibt Satz 4 samt seinem Beweis auch für komplexe algebraische Zahlen a, b bzw. p bzw. q gültig.

§ 3. Notwendige und hinreichende Bedingungen im Falle irrationaler Koeffizienten

Man könnte daran denken, daß die Beschränkung auf rationale bzw. algebraische Koeffizienten nur eine Mangelhaftigkeit unserer Beweismethode ist, und der dritte Satz auch im Falle beliebiger Koeffizienten besteht. Im weiteren zeigen wir nun, daß unsere Ergebnisse keiner wesentlichen Verbesserung fähig sind.

Es bezeichne R den Körper der rationalen Zahlen, V den Körper der reellen Zahlen und K einen beliebigen Teilkörper der reellen Zahlen. Wir betrachten K als einen Vektorraum über R, mit der Basis $\{\ldots, s_\nu, \ldots\}$ und V als einen Vektorraum über K mit der Basis $\{\ldots, r_\mu, \ldots\}$.

Wir brauchen den folgenden Hilfssatz[1]).

Hilfssatz 3. *Die Zahlenmenge*

$$\{\ldots, s_\nu r_\mu, \ldots\}$$

ist eine Basis der reellen Zahlen über R.

Nunmehr betrachten wir die Funktionalgleichung

$$f(ax+y) = pf(x)+f(y), \tag{16}$$

wo a und p nichtrationale reelle Zahlen sind. Im folgenden wird für uns die folgende Definition von Nutzen sein:

---

[1]) Für den Fall einer endlichen Basis siehe z. B. Rédei [4], § 413. Für unendliche Basen verläuft der Beweis analog.

Zwei reelle Zahlen, r und s nennen wir *entsprechend,* falls

a) r und s Wurzel desselben irreduziblen Hauptpolynoms über R sind, oder aber

b) r und s beide transzendent über R sind.

Es gilt der folgende

Satz 5. *Zur Existenz einer nichtkonstanten Lösung der Funktionalgleichung* (16) *ist es notwendig und hinreichend, daß a und p entsprechende Zahlen sind.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingungen folgt aus Satz 4. Um zu beweisen, daß die Bedingungen auch hinreichend sind, nehmen wir an, daß a und p entsprechende Zahlen sind. Bekanntlich gibt es dann einen solchen Isomorphismus φ zwischen $R(a)$ und $R(p)$, für welchen die Relationen $\varphi(a)=p$ und $\varphi(r)=r$ bei beliebigem $r\in R$ gelten[2]).

Es sei $\{\ldots, s_\nu, \ldots\}$ eine Basis von $R(a)$ über R, und $\{1, \ldots, r_\mu, \ldots\}$ eine Basis von V über $R(a)$. Dann ist auf Grund des Hilfssatzes 3 die Zahlenmenge

$$\{\ldots, s_\nu, \ldots, s_\nu r_\mu, \ldots\}$$

eine Basis von V über R. Es sei nunmehr x eine beliebige reelle Zahl. Nach dem obigen läßt x eine Darstellung von der Form

$$x=\sum_i \alpha_i s_{\nu_i}+\sum_{j,k}\beta_j^k s_{\nu_j} r_{\mu_k}$$

zu, wobei $\alpha_i, \beta_j^k \in R$ ist.

Wir definieren die Funktion $f(x)$ durch

$$f(x)=\sum_i \alpha_i f(s_{\nu_i})+\sum_{j,k}\beta_j^k f(s_{\nu_j} r_{\mu_k})$$

und wir wählen die den Basiselementen entsprechenden Funktionswerte auf folgende Weise:

$$f(s_\nu)=\varphi(s_\nu), \quad f(s_\nu r_\mu)=0.$$

Dann gilt

$$f(x)=\sum_i \alpha_i \varphi(s_{\nu_i}).$$

Bekanntlich ist die so definierte Funktion additiv, d. h. sie befriedigt die Funktionalgleichung

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

---

[2]) $R(a)$ bedeutet die Erweiterung von R durch das Element a. Da R gemeinsamer Primkörper der Körper $R(a)$ und $R(p)$ ist, gilt $\varphi(r)=r$ für jedes Element $r\in R$. (S. Rédei [4].)

Es genügt jetzt noch zu zeigen, daß auch $f(ax)=pf(x)$ gilt. Um den Nachweis der letzten Behauptung zu erbringen, berechnen wir den Wert von ax:

$$ax=\sum_i \alpha_i a s_{\nu_i}+\sum_{j,k}\beta_j^k a s_{\nu_j} r_{\mu_k}.$$

Da $as_\nu \in R(a)$ ist, kann man

$$a s_{\nu_i}=\sum_k \gamma_k^i s_{\nu_k}, \qquad \gamma_k^i \in R$$

schreiben. Indem wir davon Gebrauch machen, erhalten wir

$$ax=\sum_i \alpha_i\Big(\sum_k \gamma_k^i s_{\nu_k}\Big)+\sum_{j,k}\beta_j^k\Big(\sum_l \gamma_l^j s_{\nu_l}\Big) r_{\mu_k}.$$

Nunmehr berechnen wir den Wert von $f(ax)$:

$$f(ax)=\sum_i \alpha_i \sum_k \gamma_k^i \varphi(s_{\nu_k})=\sum_i \alpha_i \sum_k \varphi(\gamma_k^i)\varphi(s_{\nu_k})=\sum_i \alpha_i \varphi\Big(\sum_k \gamma_k^i s_{\nu_k}\Big)=$$
$$=\sum_i \alpha_i \varphi(a s_{\nu_i})=\sum_i \alpha_i \varphi(a)\varphi(s_{\nu_i})=\varphi(a)\sum_i \alpha_i \varphi(s_{\nu_i})=pf(x).$$

Damit haben wir den Satz 5 bewiesen.

Aus dem Satz 5 folgt, daß sich die Behauptung von Satz 3 nicht auf den Fall beliebiger reeller Koeffizienten übertragen läßt. Z. B. haben die Funktionalgleichungen

$$f(\sqrt{2}x+y)=-\sqrt{2}f(x)+f(y),$$
$$f(\pi x+y)=ef(x)+f(y)$$

nichttriviale Lösungen.

Literatur

[1] J. Aczél, Über eine Klasse von Funktionalgleichungen, *Commentarii Math. Helvetici*, **21** (1948), 247—256.

[2] G. Hamel, Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y)=f(x)+f(y)$, *Math. Annalen*, **60** (1905), 459—462.

[3] S. Marcus, Sur une classe de fonctions définies par des inégalités, introduite par M. Á. Császár, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 192—217.

[4] L. Rédei, *Algebra* I (Budapest, 1954).

(Eingegangen am 4. Dezember 1959)