Subnormale Untergruppen und p-Sylowgruppen

Von BERTRAM HUPPERT in Tübingen (Deutschland)

Herrn Professor L. Rédei zum 60. Geburtstag gewidmet

Diese Note schließt sich an die Arbeit [11] von WIELANDT an. Wir bezeichnen mit $s\mathfrak{G}$ den Verband der subnormalen (nachinvarianten) Untergruppen der endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$, d. h. derjenigen Untergruppen von $\mathfrak{G}$, welche Mitglied einer Kompositionsreihe von $\mathfrak{G}$ sind. Stets sei $\mathfrak{P}$ eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$; in unseren Betrachtungen wird $\mathfrak{P}$ immer festgehalten werden. Nach WIELANDT [11] ist für jedes $\mathfrak{N} \in s\mathfrak{G}$ die Gruppe $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{P}$ eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{N}$, und die Abbildung von $\mathfrak{N}$ auf $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{P}$ ist ein Verbandshomomorphismus von $s\mathfrak{G}$ in den Verband $s\mathfrak{P}$ aller Untergruppen von $\mathfrak{P}$ (in der p-Gruppe $\mathfrak{P}$ ist jede Untergruppe subnormal, sodaß die Bezeichnung $s\mathfrak{P}$ für den Verband aller Untergruppen von $\mathfrak{P}$ gerechtfertigt ist). Das Bild von $s\mathfrak{G}$ in $s\mathfrak{P}$ bezeichnen wir mit $s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$. Unsere Betrachtungen knüpfen insbesondere an die folgenden beiden Sätze von WIELANDT an ([11], 3.8 und 4.2):

(A) Ist $p^2 \| |\mathfrak{G}|$, so sind die folgenden beiden Aussagen gleichwertig: 1. $s\mathfrak{P} = s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$, 2. $\mathfrak{G}$ ist p-auflösbar von der p-Länge 1, d. h. es gibt eine Normalkette $\mathfrak{E} \trianglelefteq \mathfrak{N} \trianglelefteq \mathfrak{M} \trianglelefteq \mathfrak{G}$ derart, daß die Ordnungen von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ zu p teilerfremd sind und $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ eine p-Gruppe ist (zum Begriff der p-Länge siehe HALL—HIGMAN [5]).

(B) Ist $\mathfrak{P}$ zyklisch, so ist entweder $s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P} = s\mathfrak{P}$ oder $s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$ ist der triviale Verband $s_0\mathfrak{P} = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{P}\}$.

Wir werden für ungerade Primzahlen p eine Verschärfung von (A) beweisen, ferner einige Sätze für den Fall einer abelschen p-Sylowgruppe $\mathfrak{P}$, die bei zyklischem $\mathfrak{P}$ alle mit (B) übereinstimmen.

Bezeichnungen. $|\mathfrak{G}|$ sei die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{G}$ (es werden nur endliche Gruppen betrachtet). $\mathbf{Z}(\mathfrak{G})$ bezeichne das Zentrum, $\Phi(\mathfrak{G})$ die Frattinigruppe und $\mathfrak{G}'$ die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$. Es sei $A^G = G^{-1}AG$ und $(A, G) = A^{-1}G^{-1}AG$. Den Normalisator bzw. Zentralisator der Untergruppe $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir mit $\mathbf{N}(\mathfrak{A})$ bzw. $\mathbf{C}(\mathfrak{A})$. Ist $\mathfrak{A}$ Untergruppe (echte Untergruppe) von $\mathfrak{G}$, so schreiben wir $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{G}$ $(\mathfrak{A} < \mathfrak{G})$; ist $\mathfrak{A}$ subnormale oder normale Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so sei dies durch $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{G}$ hervorgehoben. Mit $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle$ bezeichnen wir die von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind dabei irgendwelche Teilmengen von $\mathfrak{G}$, nicht notwendig Untergruppen. Ist $\mathfrak{P}$ eine p-Gruppe, so schreiben wir $\Omega_1(\mathfrak{P})$ für das Erzeugnis aller Elemente der Ordnung p von $\mathfrak{P}$.

§ 1. Hilfssätze

1.1. Definition. *Die endliche Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt p-nilpotent, wenn sie einen Normalteiler besitzt, dessen Ordnung zu p teilerfremd ist und dessen Index eine p-Potenz ist.* (Offenbar ist dieser Normalteiler dann eine charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{G}$.)

1.2. Definition. *Die Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt p-reduziert, wenn sie keine nichttrivialen Normalteiler oder Faktorgruppen von zu p teilerfremder Ordnung besitzt.*

1.3. Hilfssatz. *Sei $\mathfrak{N}$ subnormal in $\mathfrak{G}$. Für mindestens eine p-Sylowgruppe $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$ gelte $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{P} \leqq \Phi(\mathfrak{P})$. Ferner sei $p>2$ oder $\Phi(\mathfrak{P})$ abelsch. Dann ist $\mathfrak{N}$ p-nilpotent.*

Beweis. a) Wir beweisen den Satz zunächst für den Fall $\mathfrak{N} \trianglelefteq \mathfrak{G}$. Sei $\mathfrak{G}$ ein Gegenbeispiel minimaler Ordnung gegen Hilfssatz 1.3. Ferner sei $\mathfrak{N}$ ein kleinster Normalteiler von $\mathfrak{G}$, welcher die Voraussetzungen von 1.3 erfüllt, aber nicht p-nilpotent ist.

Sei $\mathfrak{M} \lhd \mathfrak{G}$, ferner $\mathfrak{M} < \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{M}$ maximal mit diesen Eigenschaften. Dann haben wir $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{P} \leqq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{P} \leqq \Phi(\mathfrak{P})$. Die Voraussetzungen von 1.3 sind somit für $\mathfrak{M}$ erfüllt, nach unserer Annahme ist also $\mathfrak{M}$ p-nilpotent. Das p-Komplement $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{M}$ ist dann charakteristisch in $\mathfrak{M}$, daher normal in $\mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{K} \neq \mathfrak{E}$, so erfüllt $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ wegen $\Phi(\mathfrak{P})\mathfrak{K}/\mathfrak{K} = \Phi(\mathfrak{P}\mathfrak{K}/\mathfrak{K})$ unsere Voraussetzungen. Also ist $\mathfrak{N}/\mathfrak{K}$ p-nilpotent, wegen $p \nmid |\mathfrak{K}|$ dann aber auch $\mathfrak{N}$. Somit gilt $\mathfrak{K} = \mathfrak{E}$ und daher $|\mathfrak{M}| = p^a$. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: Sei p kein Teiler von $|\mathfrak{N}/\mathfrak{M}|$. Nach einem bekannten Satz gibt es eine Untergruppe $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{E}$ (siehe Zassenhaus [13], S. 125). Wegen der Auflösbarkeit von $\mathfrak{M}$ sind alle solchen Gruppen $\mathfrak{S}$ unter $\mathfrak{N}$ konjugiert. Dies hat $\mathfrak{G} = \mathbf{N}(\mathfrak{S})\mathfrak{N} = \mathbf{N}(\mathfrak{S})\mathfrak{M}$ zur Folge. Aus $\mathfrak{M} \lhd \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{P} \leqq \Phi(\mathfrak{P})$ ergibt sich $\mathfrak{M} \leqq \Phi(\mathfrak{G})$ (Gaschütz [3], S. 162, Satz 5), damit aber $\mathfrak{G} = \mathbf{N}(\mathfrak{S})$, also $\mathfrak{S} \lhd \mathfrak{G}$. Nun ist $\mathfrak{S}$ das gewünschte invariante p-Komplement für $\mathfrak{N}$.

Fall 2: Sei p ein Teiler von $|\mathfrak{N}/\mathfrak{M}|$. Ist $|\mathfrak{N}/\mathfrak{M}| = p^b$, so ist $|\mathfrak{N}| = p^{a+b}$ und wir sind fertig. Andernfalls ist $\mathfrak{N}/\mathfrak{M}$ nicht p-auflösbar, denn wegen der maximalen Wahl von $\mathfrak{M}$ ist $\mathfrak{N}/\mathfrak{M}$ eine charakteristisch einfache Gruppe. Ist

$\mathfrak{M} > \mathfrak{E}$, so erfüllt $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ alle unsere Voraussetzungen; denn es gilt ja $\Phi(\mathfrak{P}\mathfrak{M}/\mathfrak{M}) = \Phi(\mathfrak{P})\mathfrak{M}/\mathfrak{M}$. Dann ist $\mathfrak{N}/\mathfrak{M}$ p-nilpotent, entgegen der eben getroffenen Feststellung. Also haben wir $\mathfrak{M} = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{N}$ ist charakteristisch einfach.

Da $\mathfrak{G}$ ein minimales Gegenbeispiel ist, gilt $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}\mathfrak{P}$. Sei $\mathfrak{L}$ irgendeine Untergruppe von $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{E} < \mathfrak{L} \triangleleft \mathbf{N}(\mathfrak{P})$. Wir setzen $\mathbf{N}(\mathfrak{L}) = \mathfrak{G}^*$. Ist $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}$, so folgt $\mathfrak{L} \triangleleft \mathfrak{G}$. Dann erfüllen $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{N}\mathfrak{L}/\mathfrak{L}$ unsere Voraussetzungen, daher ist $\mathfrak{N}\mathfrak{L}/\mathfrak{L}$ p-nilpotent, somit $\mathfrak{N}$ p-auflösbar, entgegen der oben gemachten Feststellung. Also haben wir $\mathfrak{G}^* < \mathfrak{G}$. Wegen $\mathfrak{L} \triangleleft \mathfrak{P}$ gilt $\mathfrak{P} \leqq \mathbf{N}(\mathfrak{L}) = \mathfrak{G}^*$. Nun können wir auf die Gruppe $\mathfrak{G}^*$ und ihren Normalteiler $\mathfrak{N}^* = \mathbf{N}(\mathfrak{L}) \cap \mathfrak{N}$ unseren Satz anwenden, denn es ist ja $\mathfrak{N}^* \cap \mathfrak{P} \leqq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{P} \leqq \Phi(\mathfrak{P})$. Wir gewinnen so die p-Nilpotenz von $\mathfrak{N}^*$, damit wegen $|\mathfrak{G}^*/\mathfrak{N}^*| = |\mathfrak{N}\mathbf{N}(\mathfrak{L})/\mathfrak{N}| = p^a$ auch die p-Nilpotenz von $\mathfrak{G}^*$. Somit bewirkt $\mathfrak{G}^* = \mathbf{N}(\mathfrak{L})$ auf $\mathfrak{L}$ nur Automorphismen von p-Potenzordnung. Dies gilt für alle $\mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{L} \leqq \mathfrak{P}$ und $\mathfrak{L} \triangleleft \mathbf{N}(\mathfrak{P})$. Nehmen wir nun noch $p > 2$ an, so sind die Voraussetzungen des Satzes von J. Thompson [9] erfüllt und wir erhalten die p-Nilpotenz von $\mathfrak{G}$, damit auch die p-Nilpotenz von $\mathfrak{N}$.

Für $p = 2$ schließen wir so: Sei $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{Q}$. Da $\mathfrak{N}$ nicht p-auflösbar ist, ist sicher $\mathbf{N}(\mathfrak{Q}) < \mathfrak{G}$. Außerdem haben wir $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{Q} \triangleleft \mathfrak{P}$, also $\mathfrak{P} \leqq \mathbf{N}(\mathfrak{Q})$. Auf $\mathbf{N}(\mathfrak{Q})$ und $\mathbf{N}(\mathfrak{Q}) \cap \mathfrak{N}$ können wir nun unseren Satz anwenden. Demnach ist $\mathbf{N}(\mathfrak{Q}) \cap \mathfrak{N}$ 2-nilpotent. Da $\mathfrak{Q}$ als Untergruppe von $\Phi(\mathfrak{P})$ abelsch ist, liegt dann $\mathfrak{Q}$ im Zentrum von $\mathbf{N}(\mathfrak{Q}) \cap \mathfrak{N}$. Nach dem Satz von Burnside (Zassenhaus [13], S. 133) ist dann $\mathfrak{N}$ selbst 2-nilpotent.

b) Beweis für $\mathfrak{N} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$:[1]) Sei wieder $\mathfrak{G}$ ein minimales Gegenbeispiel. Dann ist $\mathfrak{G}$ das Erzeugnis $\langle \mathfrak{N}, \mathfrak{P} \rangle$ von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{P}$. Für jedes Element $P \in \mathfrak{P}$ gilt

$$(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{P})^P \leqq \Phi(\mathfrak{P})^P = \Phi(\mathfrak{P}).$$

Nun folgt aus dem Wielandtschen Hauptsatz ([11], S. 218)

$$\langle \mathfrak{N}^P \mid P \in \mathfrak{P} \rangle \cap \mathfrak{P} = \langle (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{P})^P \mid P \in \mathfrak{P} \rangle \leqq \Phi(\mathfrak{P}).$$

Ferner ist $\langle \mathfrak{N}^P \mid P \in \mathfrak{P} \rangle \trianglelefteq \langle \mathfrak{N}, \mathfrak{P} \rangle = \mathfrak{G}$. Nach a) ist nun $\langle \mathfrak{N}^P \mid P \in \mathfrak{P} \rangle$ p-nilpotent, also erst recht die Untergruppe $\mathfrak{N}$.

1.4. Zusatz.[2]) Im Falle 2. bei a) sei r eine von p verschiedene Primzahl, welche die Ordnung von $\mathfrak{N}$ teilt, $\mathfrak{R}$ eine r-Sylowgruppe von $\mathfrak{N}$. Da alle r-Sylowgruppen von $\mathfrak{N}$ schon unter $\mathfrak{N}$ konjugiert sind, gilt $\mathfrak{G} = \mathbf{N}(\mathfrak{R})\mathfrak{N}$. Indem wir nötigenfalls zu einer Konjugierten von $\mathfrak{R}$ übergehen, wählen wir nun $\mathfrak{R}$ so, daß $\mathbf{N}(\mathfrak{R}) \cap \mathfrak{P}$ eine p-Sylowgruppe von $\mathbf{N}(\mathfrak{R})$ ist. Wegen $\mathfrak{N} \triangleleft \mathfrak{G}$

[1]) Diesen Beweis verdanke ich Herrn Wielandt.

[2]) Auf das Folgende hat mich Herr N. Itô hingewiesen.

und der Wahl von $\mathfrak{G}$ als kleinstes Gegenbeispiel ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}\mathfrak{P}$. Dann ist auch $\mathfrak{G} = (\mathfrak{P} \cap \mathbf{N}(\mathfrak{R}))\mathfrak{N}$, daher

$$\mathfrak{P} = (\mathfrak{P} \cap \mathfrak{N})(\mathfrak{P} \cap \mathbf{N}(\mathfrak{R})) = \mathfrak{Q}(\mathfrak{P} \cap \mathbf{N}(\mathfrak{R})).$$

Wegen $\mathfrak{Q} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{P} \leqq \Phi(\mathfrak{P})$ liefert dies $\mathfrak{P} = \mathfrak{P} \cap \mathbf{N}(\mathfrak{R}) \leqq \mathbf{N}(\mathfrak{R})$. Da $\mathfrak{R}$ nicht in $\mathfrak{N}$ normal ist, denn $\mathfrak{N}$ ist charakteristisch einfach von zusammengesetzter Ordnung, haben wir $\mathbf{N}(\mathfrak{R}) < \mathfrak{G}$. Alle Voraussetzungen sind nun für die Gruppen $\mathbf{N}(\mathfrak{R})$ und $\mathbf{N}(\mathfrak{R}) \cap \mathfrak{N}$ erfüllt, also ist $\mathbf{N}(\mathfrak{R}) \cap \mathfrak{N}$ p-nilpotent.

Hilfssatz 1.3 ließe sich also ohne die Einschränkung für $p = 2$ und ohne die Hilfe des tiefliegenden Thompsonschen Satzes beweisen, wenn man zeigen könnte: Es gibt keine einfache nichtabelsche Gruppe $\mathfrak{N}$ mit den folgenden Eigenschaften: Es gibt einen Primteiler p der Ordnung von $\mathfrak{N}$ derart, daß für jeden Primteiler r von $|\mathfrak{N}|$ (auch $r = p$ ist zugelassen!) der Normalisator $\mathbf{N}(\mathfrak{R})$ einer r-Sylowgruppe $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{N}$ stets eine volle p-Sylowgruppe von $\mathfrak{N}$ enthält und p-nilpotent ist.

Die üblichen Verlagerungsmethoden lassen sich auf diese Frage nicht direkt anwenden, da sie nur die Sylownormalisatoren zu einer festen Primzahl betrachten, aber nicht die Beziehungen zwischen den Sylownormalisatoren zu verschiedenen Primzahlen berücksichtigen.

Hilfssatz 1.5 ist eine Dualisierung des folgenden bekannten Satzes: Bewirkt der Automorphismus A der p-Gruppe $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{P}/\Phi(\mathfrak{P})$ den identischen Automorphismus, so hat A p-Potenzordnung.

1.5. Hilfssatz. *Sei $\mathfrak{P}$ eine p-Gruppe, $\mathfrak{P}$ abelsch für $p = 2$, beliebig für $p > 2$. Sei $\mathfrak{A}$ eine Gruppe von Automorphismen von $\mathfrak{P}$, welche jedes Element der Ordnung p von $\mathfrak{P}$ fest läßt. Dann ist $|\mathfrak{A}| = p^{\alpha}$.*

Beweis. Sei $A \in \mathfrak{A}$ und p kein Teiler der Ordnung von A. Wir haben zu zeigen, daß dann A der identische Automorphismus ist. Dies geschieht durch Induktion nach der Ordnung von $\mathfrak{P}$. Unsere Voraussetzung überträgt sich offenbar auf charakteristische Untergruppen von $\mathfrak{P}$. Also können wir annehmen, daß A auf der Frattini-Gruppe $\Phi(\mathfrak{P})$ von $\mathfrak{P}$ den identischen Automorphismus bewirkt. Nach dem Satz von Maschke zerfällt $\mathfrak{P}/\Phi(\mathfrak{P})$ in ein direktes Produkt von unter A invarianten Gruppen. Wir können offenbar annehmen, daß diese Zerlegung nur einen Faktor enthält. Nun betrachten wir die Untergruppe $\mathfrak{U} = \Phi(\mathfrak{P}) \langle P^A P^{-1} | P \in \mathfrak{P} \rangle$ von $\mathfrak{P}$. Wegen $\mathfrak{U} \geqq \Phi(\mathfrak{P})$ ist $\mathfrak{U}$ invariant unter $\mathfrak{P}$. Aber $\mathfrak{U}$ ist auch invariant unter A, denn es gilt

$$(P^A P^{-1})^A = (P^A)^A (P^A)^{-1} \quad \text{mit} \quad P^A \in \mathfrak{P}.$$

Ist $\mathfrak{U} = \Phi(\mathfrak{P})$, so bewirkt A auf $\mathfrak{P}/\Phi(\mathfrak{P})$ den identischen Automorphismus. Dann ist A nach dem oben erwähnten Satz auch der identische Automorphismus von $\mathfrak{P}$. Also können wir $\mathfrak{U}=\mathfrak{P}$ annehmen, sodaß die Elemente $P^A P^{-1}$ ganz $\mathfrak{P}$ erzeugen.

Wir zeigen nun, daß $\Phi(\mathfrak{P})$ im Zentrum $Z(\mathfrak{P})$ von $\mathfrak{P}$ liegt: Sei $Y \in \Phi(\mathfrak{P})$ und $P \in \mathfrak{P}$. Dann ist $Y^A = Y$, daher $P^{-1}YP \in \Phi(\mathfrak{P})$ und $(P^{-1}YP)^A = = P^{-A}YP^A = P^{-1}YP$. Somit ist $P^A P^{-1}$ vertauschbar mit Y. Da die $P^A P^{-1}$ ganz $\mathfrak{P}$ erzeugten, folgt $Y \in Z(\mathfrak{P})$.

Also hat $\mathfrak{P}$ höchstens die Klasse 2. In $\mathfrak{P}$ gelten dann bekanntlich die Relationen

$$(X, Y)^p = (X^p, Y) \quad \text{und} \quad (XY)^p = X^p Y^p (X, Y)^{\binom{p}{2}}.$$

Aus $X^p \in \Phi(\mathfrak{P}) \leqq Z(\mathfrak{P})$ folgt jetzt $(X, Y)^p = E$ für alle X, Y aus $\mathfrak{P}$. Für $p > 2$ liefert dies $(XY)^p = X^p Y^p$, für $p = 2$ ist diese Relation trivial, da dann $\mathfrak{P}$ nach unserer Voraussetzung abelsch ist. Da $\mathfrak{P}/\Phi(\mathfrak{P})$ unter A irreduzibel ist, können wir annehmen, daß $\Phi(\mathfrak{P})$ die genaue Fixpunktmenge von A ist. Nun erhalten wir für $X \in \mathfrak{P}$ die Gleichung $(X^p)^A = (X^A)^p = X^p$, also $(X^A X^{-1})^p = = (X^A)^p X^{-p} = E$, somit $X^A \equiv X \bmod \Phi(\mathfrak{P})$. Also bewirkt A auf $\mathfrak{P}/\Phi(\mathfrak{P})$ den identischen Automorphismus, dann nach dem eingangs erwähnten Satz aber auch auf $\mathfrak{P}$.

Den Hinweis darauf, daß Hilfssatz 1.5 ohne die Voraussetzung der Regularität von $\mathfrak{P}$ (im Sinne von P. HALL) gilt, verdanke ich Herrn N. ITÔ. Der vorliegende Beweis verwendet die wohlbekannte Schlußweise, mit welcher die Struktur der nichtnilpotenten Gruppen mit lauter nilpotenten Untergruppen bestimmt werden kann.

Die beiden folgenden Hilfssätze sind bekannt (siehe etwa N. ITÔ [6] und K. IWASAWA [7]).

1.6. Hilfssatz. *Ist jede eigentliche Untergruppe von $\mathfrak{G}$ p-nilpotent, aber die p-Sylowgruppe $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$ nicht invariant in $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{G}$ selbst p-nilpotent.*

Beweis. Durch Induktion nach $|\mathfrak{G}|$.

a) $\mathfrak{G}$ ist p-normal im Sinne von GRÜN: Sonst gäbe es nach einem Satz von BURNSIDE (siehe [1], S. 156) eine p-Untergruppe $\mathfrak{P}_1$ von $\mathfrak{P}$, auf welcher ein Element Q von zu p teilerfremder Ordnung einen nichttrivialen Automorphismus bewirkt. $\mathfrak{P}_1\langle Q\rangle$ ist echte Untergruppe von $\mathfrak{G}$, da in $\mathfrak{G}$ nach der Voraussetzung die p-Sylowgruppe nicht invariant ist. Dann ist nach unserer Annahme $\mathfrak{P}_1\langle Q\rangle$ p-nilpotent, also wirkt Q trivial auf $\mathfrak{P}_1$, entgegen der obigen Annahme. Somit ist $\mathfrak{G}$ p-normal.

b) Nun betrachten wir $\mathbf{N}(Z(\mathfrak{P}))$. Ist $\mathbf{N}(Z(\mathfrak{P})) < \mathfrak{G}$, so ist $\mathbf{N}(Z(\mathfrak{P}))$ p-nilpotent, hat also nichttriviale p-Faktorgruppen. Nach dem Satz von GRÜN (siehe [13], S. 135) hat dann auch $\mathfrak{G}$ eine nichttriviale p-Faktorgruppe. Also existiert ein Normalteiler $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ mit $|\mathfrak{G}/\mathfrak{K}| = p^a > 1$. Nach unserer Annahme ist $\mathfrak{K}$ p-nilpotent, dann aber $\mathfrak{G}$ ebenso.

Es bleibt der Fall $\mathbf{N}(Z(\mathfrak{P})) = \mathfrak{G}$, also $Z(\mathfrak{P}) \lhd \mathfrak{G}$. Dann können wir den Satz auf $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{P})$ anwenden und erhalten ein $\mathfrak{K} \lhd \mathfrak{G}$ mit $p \not| \, |\mathfrak{K}/Z(\mathfrak{P})|$ und $|\mathfrak{G}/\mathfrak{K}| = p^b$. Wegen $Z(\mathfrak{P}) \neq \mathfrak{P}$ — denn $\mathfrak{P}$ ist nicht invariant in $\mathfrak{G}$ — haben wir $\mathfrak{K} < \mathfrak{G}$. Also ist $\mathfrak{K}$ p-nilpotent, dann aber auch $\mathfrak{G}$.

1.7. Hilfssatz. *Liegt jedes Element der Ordnung p von $\mathfrak{G}$ im Zentrum von $\mathfrak{G}$, ist $p > 2$ oder die p-Sylowgruppe $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$ abelsch, so ist $\mathfrak{G}$ p-nilpotent.*

Beweis. Durch Induktion nach $|\mathfrak{G}|$. Wir können annehmen, daß jede echte Untergruppe von $\mathfrak{G}$ p-nilpotent ist. Ist $\mathfrak{G}$ selbst nicht p-nilpotent, so erhalten wir $\mathfrak{P} \lhd \mathfrak{G}$ nach 1.6. Aber nach 1.5 erleidet $\mathfrak{P}$ durch $\mathfrak{G}$ keine Automorphismen von zu p teilerfremder Ordnung. Also ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{P} \times \mathfrak{S}$ (mit einem p-Komplement $\mathfrak{S}$), somit $\mathfrak{G}$ p-nilpotent.

Auf die zusätzliche Voraussetzung für $p = 2$ kann nicht verzichtet werden; dies zeigt das Beispiel der Quaternionengruppe der Ordnung 8, welche einen Automorphismus der Ordnung 3 besitzt, der auf der einzigen Untergruppe der Ordnung 2 trivial wirkt.

Nun folgt die Dualisierung von Hilfssatz 1.3:

1.8. Hilfssatz. *Die p-Sylowgruppe $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$ sei abelsch für $p = 2$, sonst beliebig und es sei $\Omega_1(\mathfrak{P}) \leqq Z(\mathfrak{P})$. Es sei $\mathfrak{N}$ eine subnormale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ mit $\Omega_1(\mathfrak{P}) \leqq \mathfrak{N}$. Dann liegen zwischen $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{G}$ nur p-auflösbare Kompositionsfaktoren von $\mathfrak{G}$.*

Beweis. a) Zunächst sei $\mathfrak{N} \trianglelefteq \mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{Q}$ eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{N}$. Da nach dem Sylowschen Satz alle unter $\mathfrak{G}$ Konjugierten von $\mathfrak{Q}$ schon unter $\mathfrak{N}$ konjugiert sind, erhalten wir $\mathfrak{G} = \mathbf{N}(\mathfrak{Q})\mathfrak{N}$ und daraus

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{N} \cong \mathbf{N}(\mathfrak{Q})/\mathbf{N}(\mathfrak{Q}) \cap \mathfrak{N}.$$

Es genügt daher der Nachweis, daß $\mathbf{N}(\mathfrak{Q})$ p-auflösbar ist. Wir können uns also weiterhin auf die Betrachtung von $\mathbf{N}(\mathfrak{Q})$ beschränken, d. h. wir können $\mathfrak{N} = \mathfrak{Q} \trianglelefteq \mathfrak{G}$ annehmen.

Wegen $\Omega_1(\mathfrak{P}) \leqq \mathbf{Z}(\mathfrak{P})$ gilt nun $\mathfrak{P} \leqq \mathbf{C}(\Omega_1(\mathfrak{P}))$, und wegen $\Omega_1(\mathfrak{P}) \leqq \mathfrak{Q}$ ist $\Omega_1(\mathfrak{P}) = \Omega_1(\mathfrak{Q}) \trianglelefteq \mathfrak{G}$. Mithin ist p kein Teiler der Ordnung von $\mathfrak{G}/\mathbf{C}(\Omega_1(\mathfrak{P}))$, und wir können $\mathfrak{G} = \mathbf{C}(\Omega_1(\mathfrak{P}))$ annehmen. Dies gilt für alle p-Sylowgruppen $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$. Also sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 1.7 erfüllt und $\mathfrak{G}$ ist p-nilpotent.

b) Nun sei nur $\mathfrak{N} \lhd\lhd \mathfrak{G}$. Dann gibt es subnormale Untergruppen $\mathfrak{N}_i$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_0 \lhd \mathfrak{N}_1 \lhd \cdots \lhd \mathfrak{N}_s = \mathfrak{G}$. Wenden wir a) auf die Paare $\mathfrak{N}_{i+1}, \mathfrak{N}_i$ an, so erhalten wir, daß $\mathfrak{N}_{i+1}/\mathfrak{N}_i$ p-auflösbar ist. Dies ergibt die Behauptung.

Die volle Dualisierung von 1.3 für $\mathfrak{N} \triangleleft \mathfrak{G}$ würde besagen, daß $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ eine invariante p-Sylowgruppe hat; einfachste Beispiele zeigen, daß dies selbst bei zyklischem $\mathfrak{P}$ nicht immer zutrifft.

1.9. Beispiele. a) Die Einschränkung für $p=2$ in 1.8 kann nicht gestrichen werden; dies zeigt die Gruppe der Ordnung 120, welche nichtzerfallende Erweiterung einer Gruppe der Ordnung 2 mit der alternierenden Gruppe $\mathfrak{A}_5$ ist; die 2-Sylowgruppe ist in diesem Falle eine Quaternionengruppe der Ordnung 8.

b) Auch die Voraussetzung $\Omega_1(\mathfrak{P}) \leqq \mathbf{Z}(\mathfrak{P})$ kann nicht gestrichen werden, wie folgendes Beispiel beweist:

Wir betrachten die Gruppe $\mathfrak{G}$ aller Matrizen vom Grade 2, deren Matrixelemente dem Restklassenring $\bmod p^2$ entnommen sind und deren Determinante zu p teilerfremd ist. Die Abbildung dieser Matrizen auf ihre Reste $\bmod p$ ist ein Homomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf die volle lineare Gruppe $GL(2,p)$. Der Kern $\mathfrak{K}$ dieses Homomorphismus besteht genau aus den Matrizen der Gestalt $E+pA$, ist also elementar abelsch von der Ordnung p^4. Dann hat die p-Sylowgruppe $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$ die Ordnung p^5, ist daher für $p>3$ regulär (Hall [4], S. 73). Das Element $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ hat die Ordnung p^2. Somit hat $\mathfrak{P}$ den Exponenten p^2, woraus mit $\mathfrak{K} \leqq \Omega_1(\mathfrak{P}) < \mathfrak{P}$ und $|\mathfrak{P}/\mathfrak{K}| = p$ folgt, daß $\mathfrak{K} = \Omega_1(\mathfrak{P})$ ist. Die Voraussetzungen von Hilfssatz 1.8 sind nun bis auf $\Omega_1(\mathfrak{P}) \leqq \mathbf{Z}(\mathfrak{P})$ erfüllt, aber $\mathfrak{G}/\mathfrak{K} \simeq GL(2,p)$ ist bekanntlich für $p>3$ nicht p-auflösbar.

§ 2. Untersuchung von $s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$

2.1. Satz. *Sei p^2 ein Teiler der Ordnung von $\mathfrak{G}$.*

a) *Ist $p>2$ oder $\Phi(\mathfrak{P})$ abelsch, liegen ferner alle maximalen Untergruppen von $\mathfrak{P}$ in $s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$, so ist $\mathfrak{G}$ p-auflösbar von der p-Länge* 1; *nach Satz* (A) *von Wielandt ist dann $s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P} = s\mathfrak{P}$, d. h. jede Untergruppe von $\mathfrak{P}$ liegt $s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$.*

b) *Ist $\Omega_1(\mathfrak{P}) \leqq \mathbf{Z}(\mathfrak{P})$, ferner $\mathfrak{P}$ abelsch für $p=2$ und liegen alle minimalen Untergruppen von $\mathfrak{P}$ in $s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$, so ist $\mathfrak{G}$ p-auflösbar.*

Beweis. a) Wir können annehmen, daß $\mathfrak{G}$ p-reduziert ist. Seien die $\mathfrak{A}_i$ die sämtlichen maximalen Untergruppen von $\mathfrak{P}$, also $\Phi(\mathfrak{P}) = \cap \mathfrak{A}_i$. Nach unserer Voraussetzung gibt es zu jedem $\mathfrak{A}_i$ mindestens ein $\mathfrak{N} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{A}_i$. Wir betrachten die Menge M aller subnormalen Untergruppen $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ mit der Eigenschaft, daß $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{P}$ eines der $\mathfrak{A}_i$ ist. Diese Menge enthält mit einem $\mathfrak{N}$ alle seine Konjugierten. Daher ist $\mathfrak{K} = \bigcap_M \mathfrak{N}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{P} = \cap \mathfrak{A}_i = \Phi(\mathfrak{P})$. Nach Hilfssatz 1.3 ist $\mathfrak{K}$ p-nilpotent. Da $\mathfrak{G}$ p-reduziert ist, also keine nichttrivialen Normalteiler von zu p teilerfremder Ordnung hat, folgt $|\mathfrak{K}| = p^a$.

$\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ hat elementar abelsche p-Sylowgruppe $\mathfrak{P}/\Phi(\mathfrak{P})$. Jede Untergruppe von $\mathfrak{P}/\Phi(\mathfrak{P})$ ist Durchschnitt von einigen maximalen Untergruppen $\mathfrak{A}_i/\Phi(\mathfrak{P})$ von $\mathfrak{P}/\Phi(\mathfrak{P})$. Wegen $\mathfrak{A}_i \in s_{\mathfrak{G}} \mathfrak{P}$ ist auch $\mathfrak{A}_i/\Phi(\mathfrak{P}) \in s_{\mathfrak{G}/\mathfrak{K}} \mathfrak{P}/\Phi(\mathfrak{P})$. Da $s_{\mathfrak{G}/\mathfrak{K}} \mathfrak{P}/\Phi(\mathfrak{P})$ ein Verband ist, liegt also auch jede Untergruppe von $\mathfrak{P}/\Phi(\mathfrak{P})$ in $s_{\mathfrak{G}/\mathfrak{K}} \mathfrak{P}/\Phi(\mathfrak{P})$. Ist nun $|\mathfrak{P}/\Phi(\mathfrak{P})| = p$, so ist $\mathfrak{P}$ nach dem Burnsideschen Basissatz zyklisch (ZASSENHAUS [13], S. 105), wegen $p^2 \| |\mathfrak{P}|$ und $\Phi(\mathfrak{P}) \in s_{\mathfrak{G}} \mathfrak{P}$ ist dann sicher $s_{\mathfrak{G}} \mathfrak{P} \neq s_0 \mathfrak{P}$, daher $\mathfrak{G}$ p-auflösbar von der p-Länge 1 nach Satz (B) von WIELANDT. Ist aber $|\mathfrak{P}/\Phi(\mathfrak{P})| \geqq p^2$, so können wir Satz (A) auf $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ anwenden und erhalten, daß $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ die p-Länge 1 hat. Da $\mathfrak{G}$ p-reduziert ist, gibt es dann einen Normalteiler $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{G}$ mit $p \nmid |\mathfrak{M}/\mathfrak{K}|$ und $|\mathfrak{G}/\mathfrak{M}| = p^b$. Wie beim Beweis von 1.3 gibt es nun ein $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{M} = \cdot \mathfrak{K}\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{E}$, und wieder gilt $\mathfrak{G} = \mathfrak{K}\mathbf{N}(\mathfrak{S})$. Aus $\mathfrak{K} = \Phi(\mathfrak{P})$ und $\mathfrak{K} \lhd \mathfrak{G}$ ergibt sich $\mathfrak{K} \leqq \Phi(\mathfrak{G})$ und dann $\mathfrak{G} = \mathbf{N}(\mathfrak{S})$, also $\mathfrak{S} \trianglelefteq \mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{G}$ p-reduziert ist, folgt nun $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}$. Also hat $\mathfrak{G}$ die p-Länge 1.

b) Seien die $\mathfrak{B}_i$ die sämtlichen minimalen Untergruppen von $\mathfrak{P}$, also $\langle \mathfrak{B}_i \rangle = \Omega_1(\mathfrak{P}) \in s_{\mathfrak{G}} \mathfrak{P}$. Somit gibt es ein $\mathfrak{N} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{P} = \Omega_1(\mathfrak{P})$. Nach Hilfssatz 1.8 befinden sich zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{N}$ nur p-auflösbare Kompositionsfaktoren von $\mathfrak{G}$.

Wir betracten nun $\mathfrak{N}$ mit der elementar abelschen p-Sylowgruppe $\Omega_1(\mathfrak{P})$. Jede Untergruppe $\mathfrak{A}$ von $\Omega_1(\mathfrak{P})$ ist Vereinigung einiger minimaler Untergruppen $\mathfrak{B}_i$, liegt also in $s_{\mathfrak{N}} \Omega_1(\mathfrak{P})$. Ist $|\Omega_1(\mathfrak{P})| > p$, so folgt mit Satz (A) sofort $l_p(\mathfrak{N}) = 1$. Ist aber $|\Omega_1(\mathfrak{P})| = p$, so ist $\mathfrak{P}$ zyklisch, und wegen $p^2 \| |\mathfrak{P}|$ liefert nun Satz (B) die Aussage $l_p(\mathfrak{G}) = 1$.

Wir wissen nun, daß $\mathfrak{N}$ und auch alle Kompositionsfaktoren oberhalb $\mathfrak{N}$ p-auflösbar sind. Daher ist $\mathfrak{G}$ selbst p-auflösbar.

2.2. Hilfssatz. *Es sei $\mathfrak{G}$ p-reduziert und die p-Sylowgruppe $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$ sei regulär. Dann ist jeder nichtabelsche Hauptfaktor von $\mathfrak{G}$ mit durch p teilbarer Ordnung einfach.*

Beweis. Durch Übergang zu einer Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$ können wir erreichen, daß der vorgegebene Hauptfaktor ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ wird. Dieser ist direktes Produkt von einfachen nichtabelschen, isomorphen Gruppen $\mathfrak{N}_i$. Diese Zerlegung in nichtabelsche Faktoren ist eindeutig, die $\mathfrak{N}_i$ werden daher bei inneren Automorphismen von $\mathfrak{G}$ nur permutiert. Sei $\mathfrak{K}$ derjenige Normalteiler von $\mathfrak{G}$, welcher auf den $\mathfrak{N}_i$ die identische Permutation hervorruft. Angenommen, es sei $\mathfrak{P} \not\leqq \mathfrak{K}$. Dann gibt es ein $P \in \mathfrak{P}$, welches auf den $\mathfrak{N}_i$ einen p-Zyklus hervorruft, d. h. es gibt $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_p$

mit $\mathfrak{N}_i^p = \mathfrak{N}_{i+1}$ und $\mathfrak{N}_p^p = \mathfrak{N}_1$. Sei nun $E \neq N_1 \in \mathfrak{N}_1$ mit $N_1^p = E$. Wir setzen

$$N_i = N_{i-1}^p = N_1^{p^{i-1}} \qquad (1 < i \leqq p)$$

und betrachten die Untergruppe $\mathfrak{A} = \langle P, N_1, \ldots, N_p \rangle$ von $\mathfrak{P}$. Die Kommutatorgruppe $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{A}$ liegt in der elementar abelschen Gruppe $\langle N_1, \ldots, N_p \rangle$, hat daher nur Elemente der Ordnung p. Als Untergruppe der regulären Gruppe $\mathfrak{P}$ ist auch $\mathfrak{A}$ regulär. Dies erfordert $(N_1 P^{-1})^p = N_1^p P^{-p} = P^{-p}$. Andererseits gilt aber

$$(N_1 P^{-1})^p = N_1^{E+p+\cdots+p^{p-1}} P^{-p} = N_1 N_2 \cdots N_p P^{-p} \neq P^{-p}.$$

Also ist doch $\mathfrak{P} \leqq \mathfrak{K}$ und dann $\mathfrak{G} = \mathfrak{K}$ wegen der p-Reduziertheit von $\mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{N}$ minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ war, ist dann $\mathfrak{N}$ einfach.

2.3. Satz. *Es sei d die minimale Erzeugendenanzahl von $\mathfrak{P}$ (also $|\mathfrak{P}/\Phi(\mathfrak{P})| = p^d$). Bezeichnen wir als p-Kompositionsfaktoren von $\mathfrak{G}$ die Kompositionsfaktoren von durch p teilbarer Ordnung, so gilt:*

a) *Ist $p \neq 2$, so hat $\mathfrak{G}$ höchstens d paarweise nichtisomorphe, nichtauflösbare p-Kompositionsfaktoren; genauer: die Anzahl der nichtauflösbaren Hauptfaktoren von durch p teilbarer Ordnung ist höchstens d.*

b) *Ist $\mathfrak{P}$ regulär, so hat $\mathfrak{G}$ höchstens d nichtauflösbare p-Kompositionsfaktoren.*

Beweis. a) Wir beweisen den Satz durch Induktion nach der Ordnung von $\mathfrak{G}$. Die Voraussetzungen übertragen sich offenbar auf alle Faktorgruppen von $\mathfrak{G}$. Sei $\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{P} \leqq \Phi(\mathfrak{P})$, so ist $\mathfrak{N}$ nach Hilfssatz 1.3 p-nilpotent, enthält daher nur p-auflösbare Kompositionsfaktoren von $\mathfrak{G}$. Da für $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ der Satz nach unserer Induktionsannahme gilt, sind wir in diesem Falle schon fertig.

Ist aber $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{P} \not\leqq \Phi(\mathfrak{P})$, so enthält $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{P}$ ein Element aus einem geeigneten minimalen Erzeugendensystem von $\mathfrak{P}$; denn jedes nicht in $\Phi(\mathfrak{P})$ liegende Element von $\mathfrak{P}$ ist Mitglied eines minimalen Erzeugendensystems von $\mathfrak{P}$. Dann haben wir $d(\mathfrak{P}\mathfrak{N}/\mathfrak{N}) \leqq d-1$. Nach unserer Induktionsannahme hat nun $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ höchstens $d-1$ nichtisomorphe, nichtauflösbare p-Hauptfaktoren. Die charakteristisch einfach Gruppe $\mathfrak{N}$ trägt höchstens einen weiteren solchen Hauptfaktor bei.

b) Der Beweis verläuft zunächst wie in Teil a). Die Bedingung $p \neq 2$ ist nun überflüssig, da eine reguläre 2-Gruppe stets abelsch ist und für abelsche p-Sylowgruppen der Hilfssatz 1.3 ohne Einschränkung zur Verfügung steht. Da man beim Beweis annehmen kann, dass $\mathfrak{G}$ p-reduziert ist, ist der minimale Normalteiler $\mathfrak{N}$ (sofern er überhaupt nichtabelsch ist und zu unserer Zählung etwas beiträgt) nach 2. 2 einfach, liefert daher genau einen nichtabelschen p-Kompositionsfaktor.

2.4. Beispiele. a) Wir konstruieren eine p-auflösbare Gruppe der p-Länge 2 derart, daß alle minimalen Untergruppen von $\mathfrak{P}$ in $s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$ liegen. Sei $p = 2^n + 1$ eine Fermatsche Primzahl und $\mathfrak{H}$ die von HALL—HIGMAN konstruierte Gruppe der Ordnung $p^{p-1}2^{2n+1}$, welche eine invariante, elementar abelsche Untergruppe $\mathfrak{L}$ der Ordnung p^{p-1} und einen Automorphismus σ der Ordnung p hat ([5], S. 32). Wir bilden $\mathfrak{K} = \mathfrak{H} \times \mathfrak{Z}$ mit $|\mathfrak{Z}| = p$ und dann die folgende nichtzerfallende Erweiterung von $\mathfrak{K}$ mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung p:

$$H^P = H^\sigma \quad \text{für} \quad H \in \mathfrak{H}, \quad Z^P = Z \quad \text{für} \quad \mathfrak{Z} = \langle Z \rangle \quad \text{und} \quad P^p = Z.$$

Die entstehende Gruppe $\mathfrak{G}$ hat sicher die p-Länge 2, denn $\mathfrak{G}/\langle Z \rangle$ ist isomorph zu der von HALL—HIGMAN angegebenen Gruppe der p-Länge 2 ([5], S. 32). Die p-Sylowgruppe $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$ hat die Ordnung p^{p+1} und mindestens ein Zentrum der Ordnung p^2, ist daher sicher regulär (siehe [4], S. 73). Da $\mathfrak{P}$ den Exponenten p^2 hat, ist $\Omega_1(\mathfrak{P}) = \mathfrak{K}$. Also sind alle minimalen Untergruppen von $\mathfrak{P}$ subnormal in $\mathfrak{G}$.

b) Wir bilden das direkte Produkt von 7 alternierenden Gruppen vom Grad 7 und erweitern dies zerfallend mit der einfachen Gruppe der Ordnung 168, welche die Faktoren transitiv vertauscht. Die entstehende Gruppe zeigt, daß die Regularitätsvoraussetzung in 2.3 b) nicht überflüssig ist.

§ 3. Gruppen mit abelscher p-Sylowgruppe

3.1. Satz. *Sei $\mathfrak{P}$ abelsch und $\mathfrak{H} \in s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$. Dann gilt:* a) *Ist $\mathfrak{H} \leqq \Phi(\mathfrak{P})$, so liegen alle Untergruppen von $\mathfrak{H}$ in $s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$.* b) *Ist $\Omega_1(\mathfrak{P}) \leqq \mathfrak{H}$, so liegen alle Obergruppen von $\mathfrak{H}$ in $s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$.* c) *Ist schließlich $\Omega_1(\mathfrak{P}) \leqq \mathfrak{H} \leqq \Phi(\mathfrak{P})$, so liegen alle Untergruppen von $\mathfrak{P}$ in $s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$ (und $\mathfrak{G}$ ist daher p-auflösbar von der p-Länge 1).*

Beweis. a) Nach Voraussetzung gibt es ein $\mathfrak{N} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{H} \leqq \Phi(\mathfrak{P})$. Nach Hilfssatz 1.3 ist dann $\mathfrak{N}$ p-nilpotent, hat also insbesondere p-Länge 1. Nach Satz (A) liegen dann alle Untergruppen von $\mathfrak{H}$ in $s_{\mathfrak{N}}\mathfrak{H}$, wegen der Transitivität der Subnormalität dann aber auch in $s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$.

b) Nun gibt es ein $\mathfrak{N} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{H} \geqq \Omega_1(\mathfrak{P})$. Nach Hilfssatz 1.8 liegen oberhalb von $\mathfrak{N}$ nur p-auflösbare Kompositionsfaktoren von $\mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{K}$ der Durchschnitt aller Konjugierten von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{G}$, so liegen auch oberhalb von $\mathfrak{K}$ nur p-auflösbare Kompositionsfaktoren von $\mathfrak{G}$ (WIELANDT [10], S. 214), d. h. $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ ist p-auflösbar. Da $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ abelsche p-Sylowgruppe hat, hat $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ die p-Länge 1 (HALL—HIGMAN [5], S. 7) und nach Satz (A) von WIELANDT liegt jede Obergruppe von $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{P}$ in $s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$. Wegen $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{P} \leqq \mathfrak{H}$ folgt daraus die Behauptung.

c) Aus a) und b) zusammen folgt die p-Auflösbarkeit von $\mathfrak{G}$. Dann hat $\mathfrak{G}$ die p-Länge 1 und Satz (A) ergibt die Behauptung.

Die Voraussetzung von Satz 3. 1 c) ist offensichtlich nur dann erfüllbar, wenn $\Omega_1(\mathfrak{G}) \leqq \Phi(\mathfrak{P})$ gilt, d. h. wenn die abelsche Gruppe $\mathfrak{P}$ keine Invariante p hat. Wir werden auch weiterhin sehen, daß die Invarianten p besondere Schwierigkeiten bereiten. Schon in WIELANDT [11] blieb ja bei der Betrachtung elementar abelscher Sylowgruppen vom Typ (p, p) die Frage offen, ob der Verband $s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$ eine Kette der Länge 2 sein kann.

Satz 3. 1 umfaßt offenbar den Satz (B) von WIELANDT: Ist nämlich $\mathfrak{P}$ zyklisch von einer Ordnung $\geqq p^2$, so folgt aus $\mathfrak{E} < \mathfrak{H} < \mathfrak{P}$ auch $\Omega_1(\mathfrak{P}) \leqq \mathfrak{H} \leqq \Phi(\mathfrak{P})$.

3. 2. Hilfssatz. *Hat $\mathfrak{G}$ abelsche p-Sylowgruppe $\mathfrak{P}$, so gilt*

$$\mathfrak{G}' \cap \mathbf{Z}(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{E}.$$

Beweis. Sei $\mathfrak{G} = \sum_{1}^{n} G_i \mathfrak{P}$ eine Zerlegung von $\mathfrak{G}$ in Linksnebenklassen nach $\mathfrak{P}$; dabei ist $p \nmid n$. Ist G ein Element aus $\mathfrak{G}$, so seien die $P_i(G) \in \mathfrak{P}$ eindeutig bestimmt durch $G G_i = G_{i'} P_i(G)$. Dann ist die Abbildung $G \to V(G) = \prod_{i=1}^{n} P_i(G)$ bekanntlich ein Homomorphismus von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{P}$, die Verlagerung von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{P}$.

Ist nun $G \in \mathfrak{G}'$, so ist $V(G) = E$, denn es handelt sich um einen Homomorphismus in die abelsche Gruppe $\mathfrak{P}$. Ist $G \in \mathbf{Z}(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{P}$, so haben wir $G G_i = G_i G$, daher $P_i(G) = G$ für alle i und dann $V(G) = G^n$. Gilt schließlich $G \in \mathfrak{G}' \cap \mathbf{Z}(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{P}$, so folgt $V(G) = G^n = E$, also $G = E$.

Dieser Hilfssatz wurde von D. TAUNT auf anderem Wege für auflösbare Gruppen $\mathfrak{G}$ bewiesen (TAUNT [8]); wie ich erfuhr, ist der obenstehende Beweis auch den Herren P. HALL und D. TAUNT bekannt.

3. 3. Satz. *Hat $\mathfrak{G}$ abelsche p-Sylowgruppe $\mathfrak{P}$, so gibt es einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ mit den folgenden Eigenschaften: $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ist p-auflösbar und jeder abelsche Kompositionsfaktor von $\mathfrak{N}$ hat zu p teilerfremde Ordnung. Es gibt also stets eine Kompositionsreihe von $\mathfrak{G}$, in der alle Kompositionsfaktoren der Ordnung p höher stehen als alle nichtabelschen Kompositionsfaktoren mit durch p teilbarer Ordnung. (Über die Position der Kompositionsfaktoren von zu p teilerfremder Ordnung kann natürlich nichts ausgesagt werden.)*

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Ordnung von $\mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{G}' = \mathfrak{E}$, so ist $\mathfrak{G}$ abelsch und der Satz trivial. Andernfalls sei $\mathfrak{K}$ ein in $\mathfrak{G}'$ liegender minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Nach unserer Induktionsannahme ist der Satz für $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ erfüllt. Hat $\mathfrak{K}$ eine zu p teilerfremde Ordnung oder ist $\mathfrak{K}$ direktes Produkt von einfachen nichtabelschen Gruppen mit durch p teilbarer Ordnung, so ist der Satz offensichtlich auch für $\mathfrak{G}$ richtig. Es bleibt der Fall zu untersuchen, daß $\mathfrak{K}$ elementar abelsch vom Exponenten p ist.

Sei $\mathfrak{C}$ der Zentralisator von $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{G}$. Wegen $\mathfrak{K} \triangleleft \mathfrak{G}$ ist auch $\mathfrak{C} \trianglelefteq \mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{P}$ abelsch ist, haben wir $\mathfrak{P} \leqq \mathfrak{C}$, also $p \not| \, |\mathfrak{G}/\mathfrak{C}|$. Ist nun $\mathfrak{C} < \mathfrak{G}$, so gilt nach unserer Induktionsannahme der Satz für $\mathfrak{C}$, dann aber auch für $\mathfrak{G}$, da die oberhalb von $\mathfrak{C}$ noch auftretenden Kompositionsfaktoren von zu p teilerfremder Ordnung nicht stören. Wir können also $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}$ annehmen. Dann folgt aber $\mathfrak{K} \leqq \mathfrak{P} \cap \mathbf{Z}(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{G}'$, also mit Hilfssatz 3.2 $\mathfrak{K} = \mathfrak{E}$, entgegen unserer Wahl von $\mathfrak{K}$.

Das Holomorph der abelschen Gruppe vom Typ (p, p) zeigt sofort, daß Satz 3.3 schon bei p-Sylowgruppen der Klasse 2 nicht mehr allgemein gilt.

3.4. Satz. *$\mathfrak{G}$ habe abelsche p-Sylowgruppe $\mathfrak{P}$. Es sei $\mathfrak{N}$ der kleinste Normalteiler von $\mathfrak{G}$ mit p-auflösbarer Faktorgruppe. Dann gilt:*

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 \times \cdots \times \mathfrak{P}_s \times \mathfrak{Q}; \quad \textit{dabei ist} \quad \mathfrak{N} \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 \times \cdots \times \mathfrak{P}_s$$

und jedes $\mathfrak{P}_i$ ist isomorph zur p-Sylowgruppe eines Kompositionsfaktors von $\mathfrak{G}$.

Beweis. a) Es sei $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{S}$; wir zeigen zunächst, dass $\mathfrak{S}$ ein direkter Faktor von $\mathfrak{P}$ ist. Dies folgt sofort aus dem folgenden Satz von Gaschütz ([2], S. 105, Satz 7): $\mathfrak{N}$ sei eine Gruppe mit abelscher p-Sylowgruppe und ohne nichttriviale p-Faktorgruppen. Dann zerfällt jede Erweiterung von $\mathfrak{N}$ mit einer p-Gruppe über $\mathfrak{N}$.

b) Sei $\mathfrak{E} = \mathfrak{N}_0 \triangleleft \mathfrak{N}_1 \triangleleft \cdots \triangleleft \mathfrak{N}_s = \mathfrak{N}$ eine Normalkette derart, daß $\mathfrak{N}_{i+1}/\mathfrak{N}_i$ genau einen Kompositionsfaktor von durch p teilbarer Ordnung enthält. Wir setzen $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{N}_1 = \mathfrak{P}_1$. Angenommen, es sei schon $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{N}_i = \mathfrak{P}_1 \times \cdots \times \mathfrak{P}_i$ gezeigt. Wir setzen $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{N}_{i+1} = \mathfrak{L}_i$. Dann ist $\mathfrak{L}_i \mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_i$ p-auflösbar, aber $\mathfrak{N}_i$ hat keinen Kompositionsfaktor der Ordnung p. Nach a) folgt nun $\mathfrak{L}_i = (\mathfrak{N}_i \cap \mathfrak{P}) \times \mathfrak{P}_{i+1}$ für ein geeignetes $\mathfrak{P}_{i+1}$.

Wir vermerken zwei direkte Folgerungen aus Satz 3.4:

3.5. Satz. *$\mathfrak{G}$ habe abelsche p-Sylowgruppe $\mathfrak{P}$.* a) *Ist d die minimale Erzeugendenzahl von $\mathfrak{P}$, so hat $\mathfrak{G}$ höchstens d nichtauflösbare Kompositionsfaktoren von durch p teilbarer Ordnung; hat $\mathfrak{G}$ mindestens einen Kompositionsfaktor der Ordnung p, so hat es höchstens $d-1$ nichtauflösbare Kompositionsfaktoren von durch p teilbarer Ordnung.* b) *Es sei p^n die kleinste Invariante von $\mathfrak{P}$. Haben die p-Sylowgruppen jedes Kompositionsfaktors von $\mathfrak{G}$ einen Exponenten kleiner als p^n, so ist $\mathfrak{G}$ p-auflösbar.*

Offenbar liefern 3.5 a) und 3.5 b) für zyklisches $\mathfrak{P}$ wieder den Satz (B) von Wielandt.

Wir wollen den Normalteiler $\mathfrak{N}$ aus Satz 3.4 noch etwas genauer studieren:

3.6. Satz. *$\mathfrak{G}$ habe abelsche p-Sylowgruppe $\mathfrak{P}$ und keinen Kompositionsfaktor der Ordnung p. Zu jeder Kompositionsreihe $\mathfrak{E} = \mathfrak{N}_0 \lhd \mathfrak{N}_1 \lhd \cdots \lhd \mathfrak{N}_r = \mathfrak{G}$ von $\mathfrak{G}$ gibt es dann eine direkte Zerlegung $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 \times \cdots \times \mathfrak{P}_s$ mit den folgenden Eigenschaften:*

a) $\mathfrak{P}_1 \times \cdots \times \mathfrak{P}_i = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{N}_{j(i)} \in s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$ $(i = 1, \ldots, s)$,

b) *jede Gruppe $\mathfrak{Q} \in s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$ ist Produkt einiger der $\mathfrak{P}_i$.*

Beweis. Offenbar können wir annehmen, dass $\mathfrak{G}$ p-reduziert ist.

1. Zu einer vorgegebenen Kompositionsreihe $\mathfrak{E} = \mathfrak{N}_0 \lhd \mathfrak{N}_1 \lhd \cdots \lhd \mathfrak{N}_r = \mathfrak{G}$ konstruieren wir zuerst eine Reihe $\mathfrak{E} = \mathfrak{K}_0 \lhd \mathfrak{K}_1 \lhd \cdots \lhd \mathfrak{K}_s = \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{K}_i \lhd \mathfrak{G}$ derart, daß (i) alle $\mathfrak{K}_i$ p-reduziert sind, (ii) die $\mathfrak{K}_i \cap \mathfrak{P}$ und die $\mathfrak{N}_i \cap \mathfrak{P}$ abgesehen von der Numerierung die gleichen Gruppen sind.

Die Konstruktion verläuft so:
Sei $\mathfrak{M}_i$ die normale Hülle von $\mathfrak{N}_i$ in $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{L}_i$ der kleinste Normalteiler von $\mathfrak{M}_i$ mit p-freier Faktorgruppe. Die $\mathfrak{K}_i$ seien die verschiedenen unter den $\mathfrak{L}_i$. Dann ist (i) offenbar erfüllt, ferner sind die $\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{P}$ und die $\mathfrak{K}_i \cap \mathfrak{P}$ abgesehen von der Numerierung gleich. Zum Beweis von (ii) genügt es nun, $\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{N}_i \cap \mathfrak{P}$ zu zeigen.

Sei schon $\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{N}_i \cap \mathfrak{P}$. Ist p kein Teiler von $|\mathfrak{N}_{i+1}/\mathfrak{N}_i|$, so ist p auch kein Teiler von $|\mathfrak{M}_{i+1}/\mathfrak{M}_i|$ und daher $\mathfrak{M}_{i+1} \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{N}_i \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{N}_{i+1} \cap \mathfrak{P}$. Ist p ein Teiler von $|\mathfrak{N}_{i+1}/\mathfrak{N}_i|$, so gilt $\mathfrak{N}_{i+1} \cap \mathfrak{P} > \mathfrak{N}_i \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{P}$, also ist $\mathfrak{N}_{i+1} \not\leqq \mathfrak{M}_i$. Nun ist $\mathfrak{N}_{i+1}\mathfrak{M}_i/\mathfrak{M}_i$ eine einfache nichtabelsche subnormale Untergruppe von $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}_i$. Nach WIELANDT ([12], S. 464, Satz (5)) ist dann die normale Hülle $\mathfrak{M}_{i+1}/\mathfrak{M}_i$ direktes Produkt einiger Konjugierter von $\mathfrak{N}_{i+1}\mathfrak{M}_i/\mathfrak{M}_i$. Da aber $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}_i$ keine nichttrivialen Faktorgruppen von zu p teilerfremder Ordnung besitzt, ist $\mathfrak{M}_{i+1}/\mathfrak{M}_i$ nach Hilfssatz 2.2 einfach, also ist $\mathfrak{M}_{i+1} = \mathfrak{N}_{i+1}\mathfrak{M}_i$. Daraus folgt $\mathfrak{M}_{i+1} \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{N}_{i+1} \cap \mathfrak{P}$.

In allen folgenden Überlegungen betrachten wir statt der Kompositionsreihe $\mathfrak{N}_i$ die Normalreihe $\mathfrak{K}_i$.

2. Nun konstruieren wir die $\mathfrak{P}_i$: Wir setzen $\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1$. Es sei $\mathfrak{R}_1$ der kleinste Normalteiler von $\mathbf{N}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P}_1)$ mit p-auflösbarer Faktorgruppe; nach Satz 3.3 enthält $\mathfrak{R}_1$ keinen Kompositionsfaktor der Ordnung p. Andererseits gilt $\mathfrak{G} = \mathbf{N}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P}_1)\mathfrak{K}_1$, daher $\mathbf{N}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P}_1)/\mathbf{N}_{\mathfrak{K}_1}(\mathfrak{P}_1) \simeq \mathfrak{G}/\mathfrak{K}_1$ und dies ist eine Gruppe ohne Kompositionsfaktoren der Ordnung p und ohne nichttriviale Faktorgruppen von zu p teilerfremder Ordnung. Dies zusammen liefert $\mathbf{N}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P}_1) = \mathbf{N}_{\mathfrak{K}_1}(\mathfrak{P}_1)\mathfrak{R}_1$. Jetzt folgt $\mathfrak{G} = \mathfrak{K}_1\mathbf{N}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P}_1) = \mathfrak{K}_1\mathfrak{R}_1$, und $\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{R}_1 = \mathbf{N}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P}_1) \cap \mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{R}_1 = \mathbf{N}_{\mathfrak{K}_1}(\mathfrak{P}_1) \cap \mathfrak{R}_1$ hat zu p teilerfremde Ordnung, da $\mathbf{N}_{\mathfrak{K}_1}(\mathfrak{P}_1)$ und $\mathfrak{R}_1$ Normalteiler von $\mathbf{N}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P}_1)$ sind, $\mathbf{N}_{\mathfrak{K}_1}(\mathfrak{P}_1)$ p-auflösbar ist und $\mathfrak{R}_1$ keinen Kompositionsfaktor der Ordnung

p besitzt. Mit $\mathfrak{R}_1 \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{Q}_1$ erhalten wir also $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{Q}_1$. Wenn wir nun annehmen, daß für $\mathfrak{R}_1$ mit der p-Sylowgruppe $\mathfrak{Q}_1$ und der Normalkette $\mathfrak{E} \lhd \mathfrak{K}_2 \cap \mathfrak{R}_1 \lhd \cdots \lhd \mathfrak{R}_1$ die entsprechende Zerlegung $\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{P}_2 \times \cdots \times \mathfrak{P}_s$ mit $\mathfrak{K}_i \cap \mathfrak{R}_1 \cap \mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{P}_2 \times \cdots \times \mathfrak{P}_i$ und der Eigenschaft b) schon durchgeführt ist, so erhalten wir die gewünschte Zerlegung von $\mathfrak{P}$.

3. Sei $\mathfrak{M}$ ein von $\mathfrak{K}_1$ verschiedener minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{G}$ p-reduziert ist, hat $\mathfrak{M}$ durch p teilbare Ordnung, ist also nach Hilfssatz 2. 2 einfach. Dies ergibt $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{K}_1 = \mathfrak{E}$, somit $\mathfrak{M} \leqq \mathbf{C}(\mathfrak{K}_1) \leqq \mathbf{N}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P}_1)$. Da $\mathfrak{M}$ nicht p-auflösbar ist, erhalten wir $\mathfrak{M} \leqq \mathfrak{R}_1$. Angenommen, es sei $\mathfrak{M} \not\leqq \mathfrak{K}_j$, aber $\mathfrak{M} \leqq \mathfrak{K}_{j+1}$. Da $\mathfrak{K}_{j+1}$ p-reduziert ist, ergibt sich $\mathfrak{K}_{j+1} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{K}_j$. Nehmen wir an, daß der Satz für $\mathfrak{R}_1$ schon gilt, so ist $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{Q}_1 \cap \mathfrak{M}$ ein $\mathfrak{P}_i$; wegen $\mathfrak{K}_j \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 \times \cdots \times \mathfrak{P}_j \not\geqq \mathfrak{P}_i$ und $\mathfrak{K}_{j+1} \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 \times \cdots \times \mathfrak{P}_{j+1} \geqq \mathfrak{P}_i$ folgt notwendig $i = j+1$.

Nun vergleichen wir die beiden Normalreihen

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{K}_0 \lhd \mathfrak{K}_1 \lhd \cdots \lhd \mathfrak{K}_s = \mathfrak{G} \quad \text{und} \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{K}_0^* \lhd \mathfrak{K}_1^* \lhd \cdots \lhd \mathfrak{K}_s^* = \mathfrak{G}$$

mit $\quad \mathfrak{K}_i^* = \mathfrak{M} \times \mathfrak{K}_{i-1}$ für $1 \leqq i \leqq j$ und $\mathfrak{K}_i^* = \mathfrak{K}_i$ für $i \geqq j+1$.

Es ist $\mathfrak{K}_i^* \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_{j+1} \times \mathfrak{P}_1 \times \cdots \times \mathfrak{P}_{i-1}$ für $1 \leqq i \leqq j$ und $\mathfrak{K}_i^* \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 \times \cdots \times \mathfrak{P}_i$ für $i \geqq j+1$. Also erhalten wir bis auf die Anordnung der Faktoren aus beiden Normalreihen wieder die gleiche Zerlegung $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 \times \cdots \times \mathfrak{P}_s$.

4. Nun beweisen wir die Aussage b) durch Induktion nach s. Seien

(I) $\qquad \mathfrak{E} = \mathfrak{K}_0 \lhd \mathfrak{K}_1 \lhd \cdots \lhd \mathfrak{K}_s = \mathfrak{G}$ und

(II) $\qquad \mathfrak{E} = \mathfrak{M}_0 \lhd \mathfrak{M}_1 \lhd \cdots \lhd \mathfrak{M}_s = \mathfrak{G}$

Normalreihen, welche gemäß 1. zu vorgegebenen Kompositionsreihen konstruiert sind. $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{M}_1$ sind minimale Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{K}_1 \neq \mathfrak{M}_1$, so ersetzen wir die Reihe (I) gemäß 3. durch eine Reihe, welche mit $\mathfrak{M}_1$ beginnt, und dabei werden die $\mathfrak{P}_i$ nicht geändert. Also können wir $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{M}_1$ annehmen. Dann vergleichen wir in $\mathfrak{R}_1$ die Ketten $\mathfrak{E} \lhd \mathfrak{R}_1 \cap \mathfrak{K}_2 \lhd \cdots \lhd \mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{E} \lhd \mathfrak{R}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \lhd \cdots \lhd \mathfrak{R}_1 \cap \mathfrak{M}_s = \mathfrak{R}_1$. Die erste liefert die Zerlegung $\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{P}_2 \times \times \cdots \times \mathfrak{P}_s$, die zweite liefert gemäß unserer Induktionsannahme die gleichen $\mathfrak{P}_i$. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 3. 6 gibt einen ziemlich genauen Einblick in die Struktur von $s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$:

3. 7. Satz. $\mathfrak{G}$ *habe abelsche p-Sylowgruppe* $\mathfrak{P}$ *und keinen Kompositionsfaktor der Ordnung p. Dann gilt:*

a) $s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$ *ist isomorph zu einem Teilverband eines Mengenverbandes* $\{1, \ldots, s\}$, *ist also distributiv.*

b) *Trifft für die Kompositionsfaktoren von* $\mathfrak{G}$ *von durch p teilbarer Ordnung die Schreiersche Vermutung zu, so ist* $s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$ *der volle Mengenverband* $\{1, \ldots, s\}$, *ist also komplementär.*

B e w e i s. a) folgt direkt aus Satz 3. 6.

b) Wir können annehmen, daß $\mathfrak{G}$ p-reduziert ist. Sei $\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Dann ist p ein Teiler von $|\mathfrak{N}|$, also nach unserer Voraussetzung $\mathfrak{N}$ nichtabelsch. Nach 2. 2 ist $\mathfrak{N}$ einfach. Die Richtigkeit der Schreierschen Vermutung liefert die Auflösbarkeit von $\mathfrak{G}/\mathbf{C}(\mathfrak{N})\mathfrak{N}$, also unter unserer Voraussetzung $\mathfrak{G} = \mathbf{C}(\mathfrak{N})\mathfrak{N}$. Aber andererseits ist $\mathbf{C}(\mathfrak{N}) \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{E}$, also $\mathfrak{G} = \mathbf{C}(\mathfrak{N}) \times \mathfrak{N}$. Die Fortsetzung dieses Verfahrens liefert eine Darstellung von $\mathfrak{G}$ als direktes Produkt von einfachen nichtabelschen Gruppen mit durch p teilbarer Ordnung. Daraus folgt offensichtlich die Behauptung b).

3. 8. B e i s p i e l. Wir wollen noch durch Angabe eines Beispiels zeigen, daß sich Satz 3. 5 b) nicht auf alle regulären p-Sylowgruppen $\mathfrak{P}$ ausdehnen läßt, obwohl in einer regulären p-Gruppe Invarianten definiert sind, daher Satz 3. 5 b) für reguläres $\mathfrak{P}$ in der vorliegenden Formulierung durchaus Sinn hat. Wir gehen ganz ähnlich vor wie bei 1. 9 b) und betrachten die Gruppe $\mathfrak{G}$ aller Matrizen vom Grade 2, deren Matrixelemente dem Restklassenring mod p^3 entnommen sind und deren Determinante zu p teilerfremd ist. Die Abbildung dieser Matrizen auf ihre Reste mod p ist wieder ein Homomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf die lineare Gruppe $GL(2, p)$. Der Kern $\mathfrak{K}$ besteht diesmal aus den Matrizen $E+pA$, wobei A mod p^2 zu lesen ist. Also ist $|\mathfrak{K}| = p^8$, daher $|\mathfrak{P}| = p^9$ und $\mathfrak{P}$ ist für $p \geqq 11$ sicher regulär. $\mathfrak{K}$ hat offenbar den Exponenten p^2, und da $\mathfrak{P}$ Elemente der genauen Ordnung p^3 besitzt, z. B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, ist $\mathfrak{K}$ gleich dem Erzeugnis aller p^3-ten Potenzen von Elementen aus $\mathfrak{P}$. Eine kurze Rechnung zeigt, daß die Elemente der Ordnung p in $\mathfrak{K}$ die Gestalt $E+p^2A$ besitzen, daher stets p-te Potenzen von Elementen aus $\mathfrak{K}$ sind. Somit hat $\mathfrak{K}$ lauter Invarianten p^2 und $\mathfrak{P}$ hat die Invarianten p^3, p^2, p^2, p^2, also keine Invariante p. Alle Kompositionsfaktoren von $\mathfrak{G}$ enthalten p nur in der ersten Potenz, aber $\mathfrak{G}$ hat dennicht p-auflösbaren Kompositionsfaktor $GL(2, p)$.

Durch Übergang zu der Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$ nach dem zentralen Normalteiler, welcher von $(1+p)E$ erzeugt wird, läßt sich dieses Beispiel noch so abändern, daß $\mathfrak{P}$ genau 3 Invarianten hat. Besitzt dagegen $\mathfrak{P}$ nur 2 Invarianten, so gilt Satz 3. 5 b) und auch alle übrigen Ergebnisse von § 3. Darauf soll in einer späteren Arbeit eingegangen werden.

Literatur

[1] W. Burnside, *Theory of groups of finite order*, second edition (Cambridge, 1911).

[2] W. Gaschütz, Zur Erweiterungstheorie der endlichen Gruppen, *Journal für Math.*, **190** (1952), 93–107.

[3] W. Gaschütz, Über die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen, *Math. Zeitschrift*, **58** (1953), 160—170.

[4] P. Hall, A contribution to the theory of groups of prime power order, *Proc. London Math. Soc.*, (2) **36** (1933), 29—95.

[5] P. Hall—G. Higman, On the p-length of p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem, *Proc. London Math. Soc.*, (3) **6** (1956), 1—42.

[6] N. Itô, Über eine zur Frattini-Gruppe duale Bildung, *Nagoya Journ. of Math.*, **9** (1955), 123—127.

[7] K. Iwasawa, Über die Struktur der endlichen Gruppen, deren echte Untergruppen sämtlich nilpotent sind, *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan*, (III) **23** (1941), 1—4.

[8] D. Taunt, On A-groups, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **45** (1949), 24—42.

[9] J. Thompson, Normal p-complements for finite groups, *Math. Zeitschrift*, **72** (1960), 332—354.

[10] H. Wielandt, Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen, *Math. Zeitschrift*, **45** (1939), 209—244.

[11] H. Wielandt, Sylowgruppen und Kompositionsstruktur, *Abh. Math. Seminar Hamburg*, **22** (1958), 215—228.

[12] H. Wielandt, Über den Normalisator der subnormalen Untergruppen, *Math. Zeitschrift*, **69** (1958), 463—465.

[13] H. Zassenhaus, *Lehrbuch der Gruppentheorie*. I (Leipzig—Berlin, 1937).

(Eingegangen am 28. März 1960,
in durchgearbeiteter Form am 3. Oktober 1960)