Über vertauschbare Kontraktionen des Hilbertschen Raumes

Von S. BREHMER in Potsdam (Deutschland)

1. Es seien T_1, T_2 zwei *vertauschbare* Kontraktionen eines Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$. Sz.-Nagy hat die Frage untersucht[1]) ob in einem Erweiterungsraum $\mathfrak{K}$ zwei *vertauschbare* unitäre Transformationen U_1, U_2 existieren derart, daß die Relationen

$$(\mathrm{P}^{(2)}) \qquad \mathrm{pr}\, U_1^{n_1} U_2^{n_2} = T_1^{n_1} T_2^{n_2} \text{ }^{2})$$

für alle *nicht negativen* ganzen Zahlen n_1, n_2 erfüllt sind. Dieses Problem ist in voller Allgemeinheit noch nicht gelöst. In [A] wird gezeigt, daß die gesuchten unitären Transformationen existieren, wenn man für T_1, T_2 Doppelvertauschbarkeit voraussetzt ($T_1 T_2 = T_2 T_1$ und $T_1 T_2^* = T_2^* T_1$). In dieser Arbeit wird bewiesen, daß neben *Vertauschbarkeit* auch jede der beiden folgenden Bedingungen hinreichend ist:

($\mathrm{B}_1^{(2)}$) T_1 ist isometrisch, d. h. $\|T_1 f\| = \|f\|$ für alle $f \in \mathfrak{H}$;[3])

($\mathrm{B}_2^{(2)}$) $\|T_1\|^2 + \|T_2\|^2 \leqq 1$.

Beide Bedingungen werden auf den Fall beliebig vieler *vertauschbarer* Kontraktionen T_ω $(\omega \in \Omega)$ verallgemeinert:

(B_1) alle Transformationen T_ω sind isometrisch;

(B_2) $\sum_{\omega \in \Omega} \|T_\omega\|^2 \leqq 1$.

Ist eine dieser beiden Bedingungen erfüllt, was für (B_2) *offensichtlich nur im*

---

[1]) S. den Anhang zu F. Riesz—B. Sz.-Nagy, *Vorlesungen über Funktionalanalysis* (Berlin, 1956). Diese Stelle wird in folgendem als [A] zitiert.

[2]) Ist A eine Transformation von $\mathfrak{K}$ und P die Projektion von $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{H}$, so ist $\mathrm{pr}\, A$ die durch $(\mathrm{pr}\, A)f = PAf$ für alle $f \in \mathfrak{H}$ definierte Transformation von $\mathfrak{H}$.

[3]) Der Verfasser hat darüber hinaus bewiesen, daß auch folgende Bedingung hinreichend ist: „Die Elemente f, für die $\|T_1 f\| = \|f\|$ *oder* $\|T_2^* f\| = \|f\|$ ist, spannen den Raum $\mathfrak{H}$ auf." Hierfür liegt z. Zt. nur ein recht langwieriger Beweis vor.

Falle abzählbar unendlich vieler von 0 verschiedener T_ω möglich ist, so existiert in einem Erweiterungsraum $\mathfrak{K}$ ein System von vertauschbaren unitären Transformationen $\{U_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ derart, daß

$$\text{(P)} \qquad \operatorname{pr} U_{\omega_1}^{n_1}\dots U_{\omega_p}^{n_p} = T_{\omega_1}^{n_1}\dots T_{\omega_p}^{n_p}$$

für alle endlichen Teilsysteme $\{\omega_1,\dots,\omega_p\}\subseteq\Omega$ und alle Systeme nicht negativer ganzer Zahlen $n_1,\dots,n_p$ gilt.

Für die Anregung zur Bearbeitung dieses Themas spreche ich Herrn Professor BÉLA SZ.-NAGY meinen herzlichen Dank aus.

2. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein. Jeder Kontraktion T (T_k, T_ω usw.) ordnen wir die von einem komplexen Parameter z (z_k, z_ω usw.) abhängigen Transformationen

$$(1) \qquad S = zT, \quad R = \sum_{k=1}^{\infty} S^k$$

zu. Für $r=|z|<1$ gelten dann die Relationen

$$(2) \qquad (I+R)S = R, \quad (I-S)^{-1} = I+R.$$

Für einen beliebigen Operator A definieren wir ferner:

$$(3) \qquad A^{(n)} = \begin{cases} A^n & \text{für } n=0,1,2,\dots, \\ A^{*|n|} & \text{für } n=-1,-2,\dots. \end{cases}$$

Es seien nun zwei vertauschbare Kontraktionen T_1, T_2 gegeben. Wir bilden die Transformation

$$W = T(r,\varphi_1,\varphi_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty} r^{|n_1|+|n_2|} e^{i(n_1\varphi_1+n_2\varphi_2)}\, T(n_1,n_2)$$

mit

$$T(n_1,n_2) = \begin{cases} T_1^{(n_1)} T_2^{(n_2)} & \text{für } n_1 n_2 \geqq 0, \\ T_2^{*|n_2|} T_1^{n_1} & \text{für } n_1>0,\ n_2<0, \\ T_1^{*|n_1|} T_2^{n_2} & \text{für } n_1<0,\ n_2>0. \end{cases}$$

Unsere Behauptung ist bewiesen, wenn gezeigt werden kann, daß die Transformation W für $r<1$ *positiv* ist. Man schließt dann nämlich ebenso wie in [A] bei dem für den Fall der Doppelvertauschbarkeit geführten Beweis, daß in einem Erweiterungsraum zwei vertauschbare unitäre Transformationen U_1, U_2 existieren derart, daß $\operatorname{pr} U_1^{n_1} U_2^{n_2} = T(n_1,n_2)$ für alle ganzzahligen n_1, n_2 ist. Insbesondere sind dann die Relationen ($P^{(2)}$) für alle nicht negativen n_1, n_2 erfüllt.

Zum Beweis, daß W positiv ist, formen wir W unter Verwendung von (3) und (1) um:

$$W = \sum_{n_1 n_2 \geq 0} S_1^{(n_1)} S_2^{(n_2)} + \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} S_2^{*n_2} S_1^{n_1} + \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} S_1^{*n_1} S_2^{n_2} =$$

$$= I + \sum_{n_1=1}^{\infty} (S_1^{n_1} + S_1^{*n_1}) + \sum_{n_2=1}^{\infty} (S_2^{n_2} + S_2^{*n_2}) + \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} (S_1^{n_1} S_2^{n_2} + S_1^{*n_1} S_2^{*n_2}) +$$

$$+ \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} (S_2^{*n_2} S_1^{n_1} + S_1^{*n_1} S_2^{n_2}) = I + 2\,\mathrm{Re}\,(R_1 + R_2 + R_1 R_2 + R_2^* R_1).$$

Die rechte Seite kann man auch in der Form

$$(I + R_1^*)(I + R_2^*) \cdot (I + R_1)(I + R_2) - R_1^*(I + R_2^*) \cdot (I + R_1) R_2 -$$
$$- R_2^*(I + R_1^*) \cdot (I + R_2) R_1 + R_1^* R_2^* \cdot R_1 R_2$$

schreiben, wovon man sich durch Ausmultiplizieren überzeugt. Hierbei ist zu beachten, daß die Faktoren nur links bzw. nur rechts von dem Punkt vertauscht werden dürfen. Ersetzt man hier alle Faktoren R_i bzw. R_i^* durch $(I + R_i) S_i$ bzw. $(I + R_i^*) S_i^*$, so erhält man

$$W = (I + R_1^*)(I + R_2^*)(I - S_1^* S_1 - S_2^* S_2 + S_1^* S_2^* S_1 S_2)(I + R_2)(I + R_1).$$

Für alle $f \in \mathfrak{H}$ ist somit

$$(Wf, f) = ((I - S_1^* S_1 - S_2^* S_2 + S_1^* S_2^* S_1 S_2)(I + R_1)(I + R_2) f, (I + R_1)(I + R_2) f)$$

oder, mit $(I + R_1)(I + R_2) f = g$,

$$(Wf, f) = \|g\|^2 - \|S_1 g\|^2 - \|S_2 g\|^2 + \|S_1 S_2 g\|^2$$
$$= \|g\|^2 - r^2 \|T_1 g\|^2 - r^2 \|T_2 g\|^2 + r^4 \|T_1 T_2 g\|^2.$$

Ist W positiv für alle $r < 1$, so ist die rechte Seite auch für $r = 1$ positiv:

(4) $$\|g\|^2 - \|T_1 g\|^2 - \|T_2 g\|^2 + \|T_1 T_2 g\|^2 \geqq 0.$$

Ist umgekehrt (4) für alle $g \in \mathfrak{H}$ erfüllt, so ist $(Wf, f) \geqq 0$ auch für $r < 1$. Zum Beweis dieser Behauptung betrachten wir das Polynom

$$p(r^2) = \|g\|^2 - r^2 \|T_1 g\|^2 - r^2 \|T_2 g\|^2 + r^4 \|T_1 T_2 g\|^2$$

für $g \neq 0$. Dann ist $p(0) > 0$ und nach Voraussetzung (4) ist $p(1) \geqq 0$. Nähme nun $p(r^2)$ für ein $r^2 < 1$ einen negativen Wert an, so gäbe es im Intervall $0 < r^2 \leqq 1$ zwei verschiedene reelle Nullstellen des Polynoms und die Faktorzerlegung hätte die Gestalt

$$p(r^2) = \|g\|^2 (1 - a r^2)(1 - b r^2),$$

wobei $a \geqq 1$ und $b > 1$ sein müßte. Das ist wegen

$$ab \|g\|^2 = \|T_1 T_2 g\|^2 \leqq \|g\|^2$$

ein Widerspruch. Folglich ist $p(r^2)=(Wf,f)\geqq 0$ für alle $r<1$. Die Bedingung (4) ist also hinreichend dafür, daß W positiv ist. Es bleibt zu beweisen, daß jede der Bedingungen $(B_1^{(2)})$ und $(B_2^{(2)})$ hinreichend für (4) ist. Aus $(B_2^{(2)})$ folgt

$$\|g\|^2-\|T_1g\|^2-\|T_2g\|^2+\|T_1T_2g\|^2\geqq$$
$$\geqq\|g\|^2-\|T_1\|^2\|g\|^2-\|T_2\|^2\|g\|^2=(1-\|T_1\|^2-\|T_2\|^2)\|g\|^2\geqq 0,$$

und aus $(B_1^{(2)})$ folgt

$$\|g\|^2-\|T_1g\|^2-\|T_2g\|^2+\|T_1T_2g\|^2=0$$

für alle $g\in\mathfrak{H}$. Damit sind alle unsere Behauptungen für den Fall zweier Kontraktionen bewiesen.

3. Es sei nun $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ ein System von vertauschbaren Kontraktionen. Auf der additiven Gruppe G aller Vektoren $\mathfrak{n}=\{n_\omega\}_{\in\Omega}$ mit ganzzahligen Komponenten n_ω, die fast alle gleich Null sind, definieren wir die Operatorfunktion

$$T(\mathfrak{n})=\prod_{n_\omega<0}T_\omega^{*(-n_\omega)}\cdot\prod_{n_\omega\geqq 0}T_\omega^{(n_\omega)}.$$

Ferner bilden wir zu einem beliebigen, aber fest gewählten Teilsystem $\{\omega_1,\dots,\omega_p\}\subseteqq\Omega$ die Untergruppe $G_p\subseteqq G$ der Vektoren $\mathfrak{n}$ mit $n_\omega=0$ für $\omega\neq\omega_i$ $(i=1,\dots,p)$ und setzen zur Vereinfachung der Schreibweise

$$T_{\omega_i}=T_i,\quad n_{\omega_i}=n_i\qquad(i=1,\dots,p).$$

In Verallgemeinerung des oben für $p=2$ geführten Beweises werden wir zeigen, daß die Transformation

$$W_p=T(r,\varphi_1,\dots,\varphi_p)=\sum_{\mathfrak{n}\in G}r^{|n_1|+\dots+|n_p|}e^{i(n_1\varphi_1+\dots+n_p\varphi_p)}\,T(\mathfrak{n})\tag{5}$$

unter der Voraussetzung (B_1) bzw. (B_2) für $r<1$ *positiv* ist. Wie in [A] kann hieraus gefolgert werden, daß $T(\mathfrak{n})$ auf der zu beliebigen $\omega_1,\dots,\omega_p\in\Omega$ gebildeten Untergruppe G_p und damit auf der Gruppe G selbst positiv definit ist. Aus dem „Hauptsatz" von [A] folgt dann die Existenz eines Systems von vertauschbaren unitären Transformationen U_ω, das nach unserer Definition von $T(\mathfrak{n})$ den geforderten Bedingungen (P) genügt.

Wir fassen die Indizes der Komponenten des Vektors $\mathfrak{n}\in G_p$, für die $n_i>0$ bzw. $n_j<0$ bzw. $n_k=0$ ist, zu den Indexsystemen

$$\begin{aligned}&I_\varrho: 1\leqq i_1<\dots<i_\varrho\leqq p,\\&J_\sigma: 1\leqq j_1<\dots<j_\sigma\leqq p,\\&K_\tau: 1\leqq k_1<\dots<k_\tau\leqq p\end{aligned}\tag{6}$$

mit $\varrho+\sigma+\tau=p$ zusammen. Die Systeme I_0, J_0, K_0 sind hierbei als „leer" zu betrachten. Die Summation über alle $\mathfrak{n}\in G_p$ in (5) kann ersetzt werden durch eine Summation über alle Indexsysteme $I_\varrho, J_\sigma, K_\tau$, die den Bedingungen (6) genügen und eine Permutation der Zahlen $1, \ldots, p$ bilden, verbunden mit einer Summation der Komponenten n_{i_λ} von 1 bis ∞ und der Komponenten n_{j_ν} von -1 bis $-\infty$. Setzen wir zur Vereinfachung $m_j = -n_j$, so gilt

$$W_p = \sum_{\varrho+\sigma+\tau=p} \sum_{I_\varrho, J_\sigma, K_\tau} \sum_{m_{k_1}=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_{j_\sigma}=1}^{\infty} \sum_{n_{i_1}=1}^{\infty} \cdots \sum_{n_{i_\varrho}=1}^{\infty} S(\mathfrak{n})$$

mit $S(\mathfrak{o}) = I$ und

$$S(\mathfrak{n}) = S_{j_1}^{*m_{j_1}} \cdots S_{j_\sigma}^{*m_{j_\sigma}} S_{i_1}^{n_{i_1}} \cdots S_{i_\varrho}^{n_{i_\varrho}}$$

für $\mathfrak{n} \neq \mathfrak{o}$. Es folgt

$$W_p = \sum_{\varrho+\sigma+\tau=p} \sum_{I_\varrho, J_\sigma, K_\tau} R_{j_1}^* \ldots R_{j_\sigma}^* R_{i_1} \ldots R_{i_\varrho}, \tag{7}$$

wobei zu ergänzen ist, daß die zweite Summe für $\tau = p$ aus dem einzigen Glied I bestehen soll. Wir behaupten, daß (7) auch in der Form

$$\begin{aligned} W_p = & \prod_{j=1}^{p} (I+R_j^*) \prod_{i=1}^{p} (I+R_i) - \\ & - \sum_{1 \leqq \nu_1 \leqq p} \prod_{j=1}^{p} (I+R_j^*) S_{\nu_1}^* S_{\nu_1} \prod_{i=1}^{p} (I+R_i) + \\ & + \sum_{1 \leqq \nu_1 < \nu_2 \leqq p} \prod_{j=1}^{p} (I+R_j^*) S_{\nu_1}^* S_{\nu_2}^* S_{\nu_1} S_{\nu_2} \prod_{i=1}^{p} (I+R_i) - \\ & - + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + (-1)^p \prod_{j=1}^{p} (I+R_j^*) S_1^* \ldots S_p^* S_1 \ldots S_p \prod_{i=1}^{p} (I+R_i) \end{aligned} \tag{8}$$

geschrieben werden kann. Zunächst erkennt man, daß beim Ausmultiplizieren der in der ersten Zeile von (8) stehenden Produkte jeder Summand von (7) genau einmal auftritt. Darüber hinaus ergeben sich nur Produkte, in denen gesternte und ungesternte Faktoren mit *gleichen* Indizes auftreten, z. B.

$$R_{j_1}^* \ldots R_{j_\sigma}^* R_{i_1}^* \ldots R_{i_\varrho}^* R_{i_1} \ldots R_{i_\varrho}. \tag{9}$$

Diese Faktoren treten aber auch in den folgenden Zeilen von (8) auf, wenn wir alle Faktoren S_ν mit Hilfe der Relation $S_\nu(I+R_\nu) = R_\nu$ eliminieren und dann ausmultiplizieren. Der Summand (9) tritt in der ersten Zeile von (8) genau $\binom{\varrho}{0}$-mal, in der zweiten $\binom{\varrho}{1}$-mal, in der dritten $\binom{\varrho}{2}$-mal auf, usw. Bei den sukzessiven Additionen und Subtraktionen heben sich alle diese Summanden wegen

$$\sum_{i=0}^{p} (-1)^{i+1} \binom{\varrho}{i} = 0 \qquad (\varrho = 1, \ldots, p)$$

heraus. Damit ist (8) bewiesen. Mit

$$g=\prod_{i=1}^{p}(I+R_i)f$$

folgt

$$(10)\quad \begin{aligned}(W_p f, f) &= \left(\left(I+\sum_{k=1}^{p}(-1)^k \sum_{1\leqq i_1<\dots<i_k\leqq p} S_{i_1}^*\dots S_{i_k}^* S_{i_1}\dots S_{i_k}\right)g, g\right)=\\ &=\|g\|^2+\sum_{k=1}^{p}(-1)^k \sum_{1\leqq i_1<\dots<i_k\leqq p} r^{2k}\|T_{i_1}\dots T_{i_k}g\|^2.\end{aligned}$$

Die rechte Seite ist eine endliche alternierende Reihe mit den Gliedern

$$a_k=\sum_{1\leqq i_1<\dots<i_k\leqq p} r^{2k}\|T_{i_1}\dots T_{i_k}g\|^2.$$

Es sei nun (B_2) erfüllt. Dann gilt

$$\begin{aligned}a_{k+1} &= \sum_{1\leqq i_1<\dots<i_{k+1}\leqq p} r^{2k+2}\|T_{i_1}\dots T_{i_{k+1}}g\|^2\leqq\\ &\leqq \sum_{1\leqq i_1<\dots<i_{k+1}\leqq p} r^{2k+2}\|T_{i_{k+1}}\|^2\cdot\|T_{i_1}\dots T_{i_k}g\|^2\leqq\\ &\leqq r^2\sum_{i=1}^{p}\|T_i\|^2 \sum_{1\leqq i_1<\dots<i_k\leqq p} r^{2k}\|T_{i_1}\dots T_{i_k}g\|^2\leqq a_k,\end{aligned}$$

d. h. die Glieder nehmen monoton ab. Für die nach dem ersten negativen Glied abbrechende Partialsumme gilt, wiederum wegen (B_2),

$$\|g\|^2-\sum_{i=1}^{p} r^2\|T_i g\|^2 \geqq \|g\|^2\left(1-\sum_{i=1}^{p}\|T_i\|^2\right)\geqq 0.$$

Diese Partialsumme bildet eine obere Schranke für die Partialsummen der Reihe (10) mit den monoton abnehmenden Gliedern a_k. Folglich ist W_p positiv, und die Bedingung (B_2) ist hinreichend.

Ist die Bedingung (B_1) erfüllt, so folgt aus (10)

$$(W_p f, f)=\|g\|^2+\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}r^{2k}\|g\|^2=(1-r^2)^p\|g\|^2\geqq 0.$$

Damit ist auch die letzte Behauptung bewiesen[4]).

(Eingegangen am 2. Mai 1960)

---

[4]) Ist $p>2$, so kann daraus, daß (10) für $r=1$ und für alle $g\in\mathfrak{H}$ positiv ist, nicht gefolgert werden, daß $W_p\geqq O$ ist. Ein Analogon zur Bedingung (4) kann also im allgemeinen Fall nicht formuliert werden.