

Bemerkungen zur vorstehenden Arbeit des Herrn S. Brehmer*)

Von BÉLA SZ.-NAGY in Szeged

Sei $\mathbf{T} = \{T_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ ein System von *vertauschbaren* Kontraktionen des Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$. Es wird gefragt, unter welchen Bedingungen existiert ein System $\mathbf{U} = \{U_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ von ebenfalls *vertauschbaren* unitären Operatoren eines geeigneten Hilbertschen Erweiterungsraumes $\mathfrak{K}$ derart, daß die Relation

$$(1) \quad \prod_{\omega} T_{\omega}^{n_{\omega}} = \text{pr} \prod_{\omega} U_{\omega}^{n_{\omega}}$$

für beliebige nichtnegative ganze Exponenten n_{ω} gilt, von denen nur endlich viele von 0 verschieden sind.

Eine hinreichende Bedingung ist die folgende¹⁾:

- (A) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Die Operatoren } T_{\omega} \text{ sind alle } \textit{doppelvertauschbar}, \text{ d. h. für } \omega \neq \omega' \\ \text{sind nicht nur } T_{\omega} \text{ und } T_{\omega'}, \text{ sondern auch } T_{\omega}^* \text{ und } T_{\omega'}^* \text{ vertauschbar.} \end{array} \right.$

In der vorstehenden Arbeit beweist Herr S. BREHMER die folgende weitere hinreichende Bedingung:

- (B) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Für jedes endliche Teilsystem } \mathbf{T}_0 = \{T_{\omega}\}_{\omega \in \Omega_0}, \text{ für jedes } h \in \mathfrak{H} \text{ und} \\ \text{für } 0 \leq r < 1 \text{ gilt:} \\ \sum_{k=0}^s (-1)^k r^{2k} \sum_{v \in V_k(\Omega_0)} \|T(v)h\|^2 \geq 0; \\ \text{hier bezeichnet } s \text{ die Anzahl der Elemente von } T_0, V_k(\Omega_0) \text{ die} \\ \text{Menge der aus der Indexmenge } \Omega_0 \text{ gebildeten Kombinationen } k\text{-ter} \\ \text{Klasse, und für eine solche Kombination } v = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\} \text{ wird} \\ T(v) = T_{\omega_1} T_{\omega_2} \cdots T_{\omega_k} \\ \text{gesetzt [im Falle der leeren Kombination ist } T(v) = I]. \end{array} \right.$

*) S. BREHMER, Über vertauschbare Kontraktionen des Hilbertschen Raumes, *Acta Sci. Math.*, **22** (1961), 106–111.

¹⁾ B. SZ.-NAGY, Fortsetzung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes mit Austritt aus dem Raum, Anhang zu den Vorlesungen über Funktionalanalysis von F. Riesz und B. Sz.-Nagy (Berlin, 1956).

Bemerkung 1. Man kann die obigen Bedingungen gleichzeitig verallgemeinern. *Es genügt voraussetzen, daß (B) für diejenigen endlichen Teilsysteme $\mathbf{T}'_0$ gilt, deren Elemente T_ω nicht mit allen anderen Elementen T_ω von $\mathbf{T}$ ($\omega \neq \omega'$) doppelvertauschbar sind.*

Beweis. Man hat zu zeigen, daß (B) dann für jedes endliche Teilsystem $\mathbf{T}_0$ von $\mathbf{T}$ gilt. Sei $\mathbf{T}''_0 = \{T_\omega\}_{\omega \in \Omega''}$ die Menge derjenigen Elemente von $\mathbf{T}_0$, die mit allen anderen Elementen von $\mathbf{T}$ doppelvertauschbar sind, und sei $\mathbf{T}'_0 = \{T_\omega\}_{\omega \in \Omega'}$ die Menge der übrigen Elemente von $\mathbf{T}_0$; $\mathbf{T}'_0$ möge aus s' , $\mathbf{T}''_0$ aus s'' Elementen bestehen (s' oder s'' kann evtl. auch gleich 0 sein). Da jede aus der Indexmenge $\Omega' \cup \Omega''$ gebildete Kombination k -ter Klasse sich aus einer aus der Indexmenge Ω' gebildeten Kombination k' -ter Klasse und einer aus der Indexmenge Ω'' gebildeten Kombination k'' -ter Klasse zusammensetzt ($k' + k'' = k$), so ist

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{k=0}^{s'+s''} (-1)^k r^{2k} \sum_{v \in V_k(\Omega' \cup \Omega'')} \|T(v)h\|^2 = \\
 (2) \quad &= \sum_{k=0}^{s'+s''} (-1)^k r^{2k} \sum_{\substack{0 \leq k' \leq s' \\ 0 \leq k'' \leq s'' \\ k'+k''=k}} \sum_{\substack{v' \in V_{k'}(\Omega') \\ v'' \in V_{k''}(\Omega'')}} \|T(v')T(v'')h\|^2 = \\
 &= \sum_{(0 \leq k' \leq s') \atop (0 \leq k'' \leq s'')} (-1)^{k'+k''} r^{2(k'+k'')} \sum_{v' \in V_{k'}(\Omega')} \sum_{v'' \in V_{k''}(\Omega'')} \|T(v')T(v'')h\|^2.
 \end{aligned}$$

Mit der Benützung der Doppelvertauschbarkeit der Elemente des Systems $\mathbf{T}''_0$ untereinander erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{k'=0}^{s'} (-1)^{k'} r^{2k'} \sum_{v' \in V_{k'}(\Omega')} \left[\sum_{k''=0}^{s''} (-1)^{k''} r^{2k''} \sum_{v'' \in V_{k''}(\Omega'')} (T^*(v'')T(v'')T(v')h, T(v')h) \right] \\
 &= \sum_{k'=0}^{s'} (-1)^{k'} r^{2k'} \sum_{v' \in V_{k'}(\Omega')} \left(\prod_{\omega \in \Omega''} (I - r^2 T_\omega^* T_\omega) \cdot T(v')h, T(v')h \right).
 \end{aligned}$$

Nun ist $P = \prod_{\omega \in \Omega''} (I - r^2 T_\omega^* T_\omega)$, als Produkt vertauschbarer positiver Operatoren selbst positiv, und da P mit den Elementen von $\mathbf{T}'_0$ doppelvertauschbar ist, so ist $P^{1/2}$ es auch. Also gilt:

$$S = \sum_{k'=0}^{s'} (-1)^{k'} r^{2k'} \sum_{v' \in V_{k'}(\Omega')} \|T(v')P^{1/2}h\|^2.$$

Wegen der Gültigkeit der Bedingung (B) für das System $\mathbf{T}'_0$ folgt hieraus $S \geq 0$, w. z. b. w.

Nach BREHMER²⁾ gilt Bedingung (B) für ein System $\mathbf{T} = \{T_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ insbesondere in den folgenden zwei Fällen:

(B₁) alle Operatoren T_ω sind isometrisch;

(B₂) $\sum_{\omega \in \Omega} \|T_\omega\|^2 \leq 1$.

Bemerkung 2. Allgemeiner, gilt (B) im Falle $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \cup \mathbf{T}_2$, wobei das Teilsystem $\mathbf{T}_1$ der Bedingung (B₁) und das Teilsystem $\mathbf{T}_2$ der Bedingung (B₂) genügt.

Beweis. Sei $\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}'_0 \cup \mathbf{T}''_0$ ein endliches Teilsystem von $\mathbf{T}$ mit $\mathbf{T}'_0 = \{T_\omega\}_{\omega \in \Omega'} \subseteq \mathbf{T}_1$ und $\mathbf{T}''_0 = \{T_\omega\}_{\omega \in \Omega''} \subseteq \mathbf{T}_2$; $\mathbf{T}'_0$ möge aus s' , $\mathbf{T}''_0$ aus s'' Elementen bestehen. Da $T(v')$ für jede aus Ω' gebildete Kombination v' isometrisch und da die Anzahl der aus Ω' gebildeten Kombinationen k' -ter Klasse gleich $\binom{s'}{k'}$ ist, so hat man (vgl. (2)):

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{s'+s''} (-1)^k r^{2k} \sum_{v \in V_k(\Omega' \cup \Omega'')} \|T(v)h\|^2 = \\ &= \sum_{k'=0}^{s'} \sum_{k''=0}^{s''} (-1)^{k'+k''} r^{2(k'+k'')} \binom{s'}{k'} \sum_{v'' \in V_{k''}(\Omega'')} \|T(v'')h\|^2 = \\ &= (1-r^2)^{s'} \sum_{k''=0}^{s''} (-1)^{k''} r^{2k''} \sum_{v'' \in V_{k''}(\Omega'')} \|T(v'')h\|^2. \end{aligned}$$

Da $1-r^2 > 0$ und da $\mathbf{T}''_0$ der Bedingung (B₂), also auch der Bedingung (B) genügt, so hat man $S \geq 0$, w. z. b. w.

(Eingegangen am 20. Mai 1960)

²⁾ A. a. O.