Über affine Finslerräume von skalarer Krümmung

Von ARTHUR MOÓR in Szeged

Inhalt

Einleitung

Ein Finslerraum $\mathfrak{F}_n$ ist eine metrische Mannigfaltigkeit der Linienelemente (x^i, v^i), in der die Metrik durch einen metrischen Grundtensor von der Form

$$(0.1) \qquad g_{ik} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \partial^2_{v^i v^k} F^2, \qquad \partial_{v^i} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial v^i}$$

festgelegt ist, wobei die Grundfunktion $F(x, v)$ den folgenden, in der Theorie der Finslerräume gewöhnlichen Bedingungen genügt:

1. $F(x, v)$ ist in den v^i positiv homogen von erster Ordnung;
2. es ist $F(x, v) > 0$, falls mindestens eine der v^i von Null verschieden ist;
3. die quadratische Form

$$\partial^2_{v^i v^j} F^2 \xi^i \xi^j$$

ist in den Veränderlichen ξ^i positiv definit.

Die Bogenlänge einer Kurve $x^i = x^i(t)$ wird durch die Formel bestimmt:

$$(0.2) \qquad s = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), \dot{x}(t))dt, \qquad \dot{x}^i \overset{\text{def}}{=} \frac{dx^i}{dt}.$$

Nach der Cartanschen Theorie der parallelen Vektorübertragung sind die Übertragungsparameter $\Gamma_{i\ k}^{*j}(x, v)$ und $C_{i\ k}^{\ j}(x, v)$ von dem Grundtensor $g_{ik}(x, v)$ ableitbar (vgl. [2] Formeln (IV) und (XII)).

Das invariante Differential eines kontravarianten Vektors $\xi^i(x, v)$ ist durch

$$(0.3)\qquad D\xi^i = d\xi^i + \omega^i_{\ k}(d)\xi^k, \quad \omega^i_{\ k}(d) \overset{\text{def}}{=} \Gamma_{k\ j}^{*i} dx^j + A_{k\ j}^{\ i}\omega^j(d), \quad A_{k\ j}^{\ i} \overset{\text{def}}{=} F C_{k\ j}^{\ i}$$

festgelegt, wo

$$(0.4)\qquad \omega^k(d) \overset{\text{def}}{=} dl^k + \Gamma_{o\ j}^{*k} dx^j \text{ }^{1)}$$

das invariante Differential des Einheitsvektors l^i ist. Neben dem invarianten Differential benötigen wir noch im folgenden die kovariante Ableitung ∇_k, die z. B. für den kontravarianten Vektor ξ^i die Form:

$$(0.5)\qquad \nabla_k \xi^i \overset{\text{def}}{=} \partial_k \xi^i - \xi^i \|_r \Gamma_{o\ k}^{*r} + \Gamma_{j\ k}^{*i} \xi^j, \quad \|_r \overset{\text{def}}{=} F \partial_{v^r}$$

hat. Für die Entwicklung der vollständigen Theorie der Cartanschen Übertragung in $\mathfrak{F}_n$ verweisen wir auf [2].

Auf Grund dieser Fundamentalformeln der Finslerräume sind wir schon imstande, die Grundideen unserer nachfolgenden Untersuchungen zu formulieren.

In den ersten und zweiten Paragraphen verallgemeinern wir die Übertragungsparameter $\Gamma_{i\ k}^{*j}$ und $C_{i\ k}^{\ j}$ dadurch, daß wir zu diesen Größen gewisse Tensoren $\varDelta_{i\ k}^{\ j}$ und $\mu_{i\ k}^{\ j}$ addieren. Dadurch erhält man eine affine Erweiterung des Finslerraumes $\mathfrak{F}_n$. Für die affine Übertragungstheorie und für die affinen Krümmungstensoren existieren zwei verschiedenartige Möglichkeiten. Entweder bestimmt man die neuen affinen Übertragungsparameter in der Form:

$$(0.6)\qquad L_{i\ k}^{*j} \overset{\text{def}}{=} \Gamma_{i\ k}^{*j} + \varDelta_{i\ k}^{\ j},$$

$$(0.7)\qquad \frac{1}{F} M_{i\ k}^{*j} \overset{\text{def}}{=} C_{i\ k}^{\ j} + \frac{1}{F}\mu_{i\ k}^{\ j}, \quad C_{i\ k}^{\ j} \equiv \frac{1}{F} A_{i\ k}^{\ j},$$

$$(0.7\text{a})\qquad \mu_{o\ k}^{\ i} \equiv \mu_{i\ k}^{\ o} \equiv \mu_{i\ o}^{\ k} \equiv 0,$$

und somit bekommt man eine affine Übertragungstheorie im Sinne von O. VARGA (vgl. [11]), oder benützt man statt (0.6) die Berwaldschen affinen Übertragungsparameter

$$(0.8)\qquad G_{i\ k}^{*j} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \partial^2_{v^i v^k} (L_{t\ s}^{*i} v^t v^s)$$

(vgl. [1] § 1 und § 3), bzw. die Berwaldsche affine Übertragungstheorie.

1) Der Index o bedeutet — wie gewöhnlich — die Kontraktion mit dem Einheitsvektor

$$l^i \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{F} v^i.$$

Der Raum, in dem die Übertragungstheorie durch (0. 6) und (0. 7), bzw. durch (0. 8) festgelegt ist, ist trotzdem nicht eine Vargasche bzw. Berwaldsche affinzusammenhängende Mannigfaltigkeit der Linienelemente, da neben diesen affinen Übertragungsparametern im Raume ein metrischer Grundtensor von der Form (0. 1) existiert, mit dem man die Indizes herauf bzw. herabziehen kann, d. h. die kovarianten bzw. kontravarianten Vektoren können ineinander übergeführt werden. Die Parallelübertragung der Vektoren kann dabei metrisch oder auch nicht-metrisch sein, je nachdem das invariante Differential von $g_{ik}(x, v)$ Null, oder von Null verschieden ist.

Unser Raum hat also neben dem metrischen Grundtensor g_{ik} noch die Tensoren $A_{i\ k}^{\ j}$ und $\mu_{i\ k}^{\ j}$ als Grundgrößen. Eine derartige Erweiterung des metrischen Raumes $\mathfrak{F}_n$ begründen in erster Reihe die verschiedenen physikalischen Feldtheorien, in denen sehr oft metrische Räume mit affinen Übertragungen auftreten[2]; wir glauben aber, daß auch vom Standpunkt der reinen Geometrie die Entwicklung der Theorie dieser „metrisch-affinen Räume" wesentlich ist. Die exakte Definition dieser Räume ist das folgende:

D e f i n i t i o n 1. *Ein affiner Finslerraum* $\mathfrak{A}_n$ *ist die Mannigfaltigkeit der Linienelemente* (x^i, v^i) *in der eine Metrik durch den metrischen Grundtensor* (0. 1), *und eine Parallelübertragung der Vektoren durch das invariante Differential:*

$$(0.9)\qquad \overset{*}{D}\xi^i \overset{\text{def}}{=} d\xi^i + \overset{*}{\omega}{}^i_{\ k}(d)\xi^k, \qquad \overset{*}{\omega}{}^i_{\ k}(d) \overset{\text{def}}{=} L^{*i}_{k\ j}dx^j + M^{*i}_{k\ j}\overset{*}{\omega}{}^j(d)$$

$$(0.10)\qquad \overset{*}{\omega}{}^j(d) \overset{\text{def}}{=} dl^j + L^{*j}_{o\ t}dx^t \equiv \overset{*}{D}l^j$$

festgelegt ist, wo die Übertragungsparameter durch (0. 6) *und* (0. 7) *bestimmt sind.*

D e f i n i t i o n 2. *Ein metrisch-affiner Raum* $\mathfrak{B}_n$ *ist eine Mannigfaltigkeit der Linienelemente* (x^i, v^i), *in der die Metrik durch den metrischen Grundtensor* (0. 1) *festgelegt ist, und im Raume eine kovariante Ableitung der Vektoren von der Form*

$$(0.11)\qquad \xi^i_{\ ,k} \overset{\text{def}}{=} \partial_k\xi^i - \xi^i\|_t G^{*t}_{o\ k} + G^{*i}_{j\ k}\xi^j$$

existiert, wo $G^{*i}_{j\ k}$ *durch* (0. 8) *angegeben ist.*

Wir werden in den Paragraphen 3 und 4 den Begriff der Räume skalarer Krümmung auf diese Räume dadurch übertragen, daß wir für den Krümmungstensor $R^{*i}_{o\ jk}$ bzw: $K^{*i}_{\ \ j}$ eine bestimmte Form bedingen. In § 5 und

[2]) Vgl. z. B. die in der Literatur von [8] zitierten Arbeiten von L. P. Eisenhart und J. I. Horváth.

§ 6 untersuchen wir die geometrischen Eigenschaften der Räume von skalarer Krümmung. Im § 7 werden wir die Grundzüge der Theorie der Unterräume angeben, und dann wird es schon in § 8 möglich sein, den Begriff der Räume skalarer Krümmung auch mit Hilfe der autoparallelen Hyperflächen zu definieren. Es wird sich zeigen, daß in gewissen Typen der Räume skalarer Krümmung, die wir durch die spezielle Form des Krümmungstensors in § 3 definieren werden (vgl. Gleichungen (3. 1)—(3. 3)), in jedem Linienelemente eine autoparallele Hyperfläche gelegt werden kann. Endlich werden wir in § 9 den Zusammenhang unserer Untersuchungen mit anderen ähnlichen Untersuchungen angeben und aus unserer allgemeinen Theorie die der Punkträume entwickeln.

§ 1. Die Vargasche affine Erweiterung des Finslerraumes

O. Varga entwickelte in seiner Arbeit [11] die affine Theorie der Linienelementmannigfaltigkeiten. Unser durch Definition 1 bestimmter affiner Finslerraum $\mathfrak{A}_n$ ist in Bezug auf die Vektorübertragung im Wesentlichen — wie wir das schon bemerkt haben — ein affiner Linienelementraum, doch werden jetzt die entsprechenden Formeln und die Krümmugsgrößen von denen die in [11] entwickelten etwas verschieden sein, da mit Hilfe der Grundfunktion F des zum Basis gewählten Finslerraumes $\mathfrak{F}_n$, alle Größen in den v^i auf nullter Dimension homogeneisiert werden können. Das kommt schon in den Formeln (0. 9) und (0. 10) zum Ausdruck, da in diesen Formeln der normierte Einheitsvektor l^i an die Stelle von v^i der allgemeinen affinen Übertragung getreten ist. (Vgl. (1, 9) und (1, 10) von [11]).

Auf Grud der Homogenität nullter Dimension in den v^i von ξ^i folgt auf Grund von (0. 10) für das invariante Differential nach (0. 9) die Formel:

$$\overset{*}{D}\xi^i \equiv \overset{*}{\nabla}_k \xi^i dx^k + \overset{*}{\nabla}_{v^k} \xi^i \overset{*}{\omega}^k(d), \tag{1. 1}$$

wo

$$\overset{*}{\nabla}_k \xi^i \overset{\mathrm{def}}{=} \partial_k \xi^i - \xi^i \|_t L^{*t}_{o\ k} + L^{*i}_{j\ k} \xi^j, \tag{1. 2}$$

$$\overset{*}{\nabla}_{v^k} \xi^i \overset{\mathrm{def}}{=} \xi^i \|_k + M^{*i}_{j\ k} \xi^j \tag{1. 3}$$

die beiden fundamentalen kovarianten Ableitungen des $\mathfrak{A}_n$-Raumes sind. Bezeichnen wir die Cartanschen kovarianten Ableitungen des Finslerraumes $\mathfrak{F}_n$ mit ∇_k und ∇_{v^k}[3]), so hängen sie mit den entsprechenden kovarianten

[3]) Wir werden bei den Operationen im Raume $\mathfrak{F}_n$ den Stern immer weglassen.

Ableitungen des $\mathfrak{A}_n$-Raumes nach (0. 5), (0. 6) und (0. 7) durch die Formeln:

$$\overset{*}{\nabla}_k \xi^i = \nabla_k \xi^i - \xi^i\|_t A_o{}^t{}_k + A_j{}^i{}_k \xi^j, \tag{1.4}$$

$$\overset{*}{\nabla}_{v^k} \xi^i = \nabla_{v^k} \xi^i + \mu_j{}^i{}_k \xi^j \tag{1.5}$$

zusammen, wo

$$\nabla_{v^k} \xi^i \overset{\text{def}}{=} \xi^i\|_k + A_j{}^i{}_k \xi^j \tag{1.5a}$$

bedeutet.

Im folgenden benötigen wir noch einige Formeln für den Einheitsvektor l^i. Ebenso wie im Finslerraum ist

$$\text{(a)} \quad l^i\|_k = \delta^i_k - l^i l_k, \qquad \text{(b)} \quad l_i\|_k = g_{ik} - l_i l_k. \tag{1.6}$$

Aus (0. 10) folgt im Hinblick auf (0. 4) und (0. 6) die Relation:

$$\overset{*}{\omega}{}^k(d) = \omega^k(d) + A_o{}^k{}_t dx^t. \tag{1.7}$$

Da l^i ein Einheitsvektor ist, und für die durch (0. 3) definierte Übertragung

$$Dg_{ik} = 0$$

gilt, hat man $\omega^o(d) = 0$. Aus (1. 7) folgt somit nach einer Kontraktion mit l_k

$$l_k \overset{*}{\omega}{}^k(d) \equiv \overset{*}{\omega}{}^o(d) = A_o{}^o{}_t dx^t. \tag{1.8}$$

Die Cartansche kovariante Ableitung — die durch (0. 5) bestimmt ist — gibt für l^i den Nulltensor, d. h. $\nabla_k l^i \equiv 0$. Die allgemeine kovariante Ableitung des $\mathfrak{A}_n$-Raumes, die durch (1. 2) definiert ist, gibt somit nach (1. 4) und (1. 6) (a):

$$\overset{*}{\nabla}_k l^i = A_o{}^o{}_k l^i. \tag{1.9}$$

Benützt man die kovariante Ableitung des $\mathfrak{A}_n$-Raumes in der Form (1. 2), so bekommt man auf Grund von (1. 2) und (1. 9) die mit (1. 9) äquivalente Formel:

$$\partial_k l^i = -(\overset{*}{L}{}_o{}^o{}_k - A_o{}^o{}_k) l^i. \tag{1.9a}$$

Die Übertragung des $\mathfrak{A}_n$-Raumes ist im allgemeinen nicht-metrisch, d. h. es ist $\overset{*}{D} g_{ik}$ im allgemeinen von Null verschieden. Der metrische Fall ist in [6] ausführlich behandelt, wir wollen aber die wichtigsten Formeln für eine metrische Übertragung auch in unserem $\mathfrak{A}_n$-Raum angeben, umso mehr, da jetzt g_{ik} durch (0. 1) bestimmt ist und das gibt mit den Bedingungen (0. 7a) einfachere Formeln als der allgemeine metrische Grundtensor in unserer Arbeit [6].

Ist $\overset{*}{D} g_{ik} \equiv 0$, so hat man nach (1. 1)

$$\overset{*}{\nabla}_k g_{ij} \equiv 0, \qquad \overset{*}{\nabla}_{\dot{v}k} g_{ij} \equiv 0.$$

Das sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die Übertragung metrisch sei. Da die Cartanschen kovarianten Ableitungen ∇_k und $\nabla_{\dot{v}k}$ metrisch sind, wird nach (1. 4) und (1. 5)

$$A_{ijt} \Delta_o{}^t{}_k + \Delta_{(ij)k} = 0, \tag{1. 10a}$$

$$-\mu_{(ij)k} \equiv A_{ijk} - \overset{*}{M}_{(ij)k} = 0 \tag{1. 10b}$$

bestehen. Die Formel (1. 10b) zeigt unmittelbar, daß der Tensor μ_{ijk} im Falle einer metrischen Übertragung in i, j schiefsymmetrisch sein muß. Bestimmen wir nun Δ_{ijk} in der Form

$$\Delta_{ijk} = \Delta_{(ij)k} + \sigma_{ijk}, \qquad \sigma_{ijk} \overset{\text{def}}{=} \Delta_{[ij]k},$$

so wird auf Grund von (1. 10a) $\Delta_o{}^i{}_k = \sigma_o{}^i{}_k$, und somit im Falle $\overset{*}{D} g_{ij} = 0$:

$$\Delta_i{}^j{}_k = -A_i{}^j{}_t \sigma_o{}^t{}_k + \sigma_i{}^j{}_k, \tag{1. 11}$$

wo der Tensor σ_{ijk} in i, j schiefsymmetrisch sein muß.

Die Torsions- und Krümmungsgrößen des $\mathfrak{A}_n$-Raumes können nach der Cartanschen Methode leicht bestimmt werden. Wir müssen ebenso verfahren, wie im Paragraphen 7 unserer Arbeit [6], doch müssen wir jetzt für $\overset{*}{\omega}{}^o(d)$ die Relation (1. 8) in Betracht nehmen. Es ist nach (1. 11) in Hinsicht auf die schiefe Symmetrie von σ_{ijk} in i, j, immer $\overset{*}{\omega}{}^o(d) = 0$.

Die Torsion des $\mathfrak{A}_n$-Raumes bekommt man durch die Berechnung der Pfaffschen Form:

$$\Omega^i(d, \delta) \overset{\text{def}}{=} (\overset{*}{\Delta}\overset{*}{D} - \overset{*}{D}\overset{*}{\Delta}) x^i, \qquad \overset{*}{D} x^i \equiv dx^i,$$

wo $\overset{*}{\Delta}$ und $\overset{*}{D}$ die zu den — miteinander vertauschbaren — Differentiationssymbolen δ und d gehörigen invarianten Differentiale bezeichnen. Auf Grund von (0. 9) bekommt man:

$$\Omega^i(d, \delta) \equiv [dx^j \overset{*}{\omega}_j{}^i(d)] = \overset{*}{\Omega}_j{}^i{}_k [dx^j dx^k] + \overset{*}{M}_j{}^i{}_k [dx^j \overset{*}{\omega}{}^k(d)], \tag{1. 12}$$

wo

$$\overset{*}{\Omega}_j{}^i{}_k \overset{\text{def}}{=} \overset{*}{L}_{[j}{}^i{}_{k]} \equiv \Delta_{[j}{}^i{}_{k]}$$

den Tensor der Übertragungstorsion bzw. $\overset{*}{M}_j{}^i{}_k$ den Tensor der Raumtorsion bedeutet.

Die Krümmungstensoren erhält man durch die Berechnung der Formel:

$$(\overset{*}{\Delta}\overset{*}{D} - \overset{*}{D}\overset{*}{\Delta}) \xi^i = \Omega_j^i(d, \delta) \xi^j,$$

wo die Pfaffsche Form:

(1. 13) $$\Omega^i{}_j(d,\delta) \overset{\text{def}}{=} [\overset{*}{\omega}{}^t{}_j(d)\overset{*}{\omega}{}^i{}_t(d)] - (\overset{*}{\omega}{}^i{}_j(d))'$$

ist[4]) und $(\overset{*}{\omega}{}^i{}_j)'$ die äußere Ableitung der Pfaffschen Form $\overset{*}{\omega}{}^i{}_j$ bedeutet. Im Hinblick auf (1. 8), (1. 6) (a) und (0. 7a) wird:

(1. 14) $$\Omega^i{}_j \equiv \tfrac{1}{2} \overset{*}{R}{}_j{}^i{}_{kl}[dx^k dx^l] + \overset{*}{P}{}_j{}^i{}_{kl}[dx^k \overset{*}{\omega}{}^l] + \tfrac{1}{2}\overset{*}{S}{}_j{}^i{}_{kl}[\overset{*}{\omega}{}^k \overset{*}{\omega}{}^l],$$

wo die einzelnen Krümmungstensoren die folgende explizite Form haben:

(1. 15) $$\overset{*}{R}{}_j{}^i{}_{kl} \overset{\text{def}}{=} \overline{\overset{*}{R}}{}_j{}^i{}_{kl} + \overset{*}{M}{}_j{}^i{}_t \overline{\overset{*}{R}}{}_o{}^t{}_{kl},$$

(1. 15a) $$\overline{\overset{*}{R}}{}_j{}^i{}_{kl} \overset{\text{def}}{=} 2(\partial_{[l}\overset{*}{L}{}_{|j|}{}^i{}_{k]} - \overset{*}{L}{}_j{}^i{}_{[k}\|_{|t}\overset{*}{L}{}_{o|}{}^t{}_{l]} + \overset{*}{L}{}_j{}^t{}_{[k}\overset{*}{L}{}_{|t|}{}^i{}_{l]}),$$

(1. 16) $$\overset{*}{P}{}_j{}^i{}_{kl} \overset{\text{def}}{=} \overset{*}{L}{}_j{}^i{}_k\|_l - \overset{*}{\nabla}_k \overset{*}{M}{}_j{}^i{}_l + \overset{*}{M}{}_j{}^i{}_t \overset{*}{L}{}_m{}^t{}_k\|_l\, l^m,$$

(1. 17) $$\overset{*}{S}{}_j{}^i{}_{kl} \overset{\text{def}}{=} 2(\overset{*}{M}{}_j{}^i{}_{[k}\|_{l]} + \overset{*}{M}{}_j{}^t{}_{[k}\overset{*}{M}{}_{|t|}{}^i{}_{l]}).$$

B e m e r k u n g. Die Zerlegung (1. 14)—(1. 17) ist nicht vollständig analog mit der der Vargaschen affinen Räume (vgl. § 3 von [11]). Statt des Vektors $\overset{*}{\omega}{}^k(d) \equiv \overset{*}{D}l^k$ steht nämlich in [11] $\pi^j(d) = Dv^j$. Zweitens sind unsere Tensoren in den v^j homogen von nullter Dimension; das ist eine Folge der Existenz einer Grundfunktion $F(x, v)$ die bei O. VARGA in [11] nicht bedingt wurde.

Für die späteren Untersuchungen benötigen wir den Zusammenhang des Hauptkrümmungstensor $\overline{\overset{*}{R}}{}_j{}^i{}_{kl}$ mit dem Hauptkrümmungstensor $\overline{R}{}_j{}^i{}_{kl}$ des zum Grunde gelegten Finslerraumes $\mathfrak{F}_n$. Nach der Formel (1. 15a) wird:

(1. 18) $$\overline{\overset{*}{R}}{}_j{}^i{}_{kl} = \overline{R}{}_j{}^i{}_{kl} + \Phi_j{}^i{}_{kl},$$

wo

(1. 18a) $$\Phi_j{}^i{}_{kl} \overset{\text{def}}{=} 2(\nabla_{[l} A_{|j|}{}^i{}_{k]} - \overset{*}{L}{}_j{}^i{}_{[k}\|_{|t}A_{o|}{}^t{}_{l]} + A_j{}^t{}_{[k}A_{|t|}{}^i{}_{l]})$$

bedeutet.

Bilden wir die äußere Ableitung von (1. 12) und (1. 13), so wird:

(1. 19) $$(\Omega^i)' - [dx^t \Omega^i{}_t] + [\overset{*}{\omega}{}^i{}_t \Omega^t] = 0,$$

bzw.

(1. 20) $$(\Omega^i{}_j)' + [\overset{*}{\omega}{}^i{}_t \Omega^t{}_j] - [\overset{*}{\omega}{}^t{}_j \Omega^i{}_t] = 0.$$

Die Relationen (1. 19) und (1. 20) bestimmen eine Reihe von Identitäten für

4) Die Formel (1. 13) sollte selbstverständlich mit der Formel (7. 4) von [6] übereinstimmen, in (7. 4) von [6] ist aber ein Druckfehler!, die richtige Formel ist (1. 13).

die Krümmungs- und Torsionstensoren des $\mathfrak{A}_n$-Raumes. Von diesen Identitäten wollen wir in expliziter Form nur diejenigen angeben, die sich auf den vollständigen Krümmungstensor (1. 15) beziehen. Für $\overset{*}{\omega}{}^k(d)=0$ bekommt man aus der Formeln (1. 19) und (1. 20):

$$\frac{1}{2}(\overset{*}{R}_{[j}{}^i{}_{kl]}-\overset{*}{M}_{[j}{}^i{}_{|t}\overset{*}{R}_{0|}{}^t{}_{kl]})-\overset{*}{\nabla}_{[l}\overset{*}{\Omega}_j{}^i{}_{k]}+2\overset{*}{\Omega}_t{}^i{}_{[l}\overset{*}{\Omega}_j{}^t{}_{k]}=0, \tag{1.21}$$

$$\overset{*}{\nabla}_{[r}\overset{*}{R}_{|j|}{}^i{}_{kl]}+\overset{*}{P}_j{}^i{}_{[k|t}\overset{*}{R}_{0|}{}^t{}_{lr]}+2\overset{*}{R}_j{}^i{}_{[k|t|}\overset{*}{\Omega}_l{}^t{}_{r]}=0. \tag{1.22}$$

Beachten wir jetzt (1. 9), (0. 7a), (1. 15) und (1. 16), so bekommt man aus (1. 22) nach einer Kontraktion mit l^j die Formel $(\overset{*}{R}_0{}^i{}_{kl}\equiv\overline{R}_0^{*}{}^i{}_{kl})$:

$$\overset{*}{\nabla}_{[r}\overline{R}^{*}_{|0|}{}^i{}_{kl]}-\overline{R}_0^{*}{}^i{}_{[kl}\Delta_{|0|}{}^0{}_{r]}+l^s\overset{*}{L}_s{}^i{}_{[k||t}\overline{R}^{*}_{0|}{}^t{}_{lr]}+2\overline{R}_0^{*}{}^i{}_{[k|t|}\overset{*}{\Omega}_l{}^t{}_{r]}=0, \tag{1.23}$$

die bei der Verallgemeinerung des Schurschen Satzes von großer Bedeutung ist. Die Identität (1. 22) bzw. (1. 23) ist die Bianchische Identität des vollständigen, bzw. des kontrahierten Hauptkrümmungstensors.

Zum Schluß dieses Paragraphen geben wir noch für den Abweichungstensor $\Phi_j{}^i{}_{kl}$ eine Formel, die $\Phi_j{}^i{}_{kl}$ mit Hilfe der durch (1. 2) angegebenen kovarianten Ableitung ausdrückt. Nach den Formeln (1. 4) und (0. 6) bekommt man aus (1. 18a)

$$\Phi_j{}^i{}_{kl}=2(\overset{*}{\nabla}_{[l}\Delta_{|j|}{}^i{}_{k]}-\overset{*}{\Gamma}_j{}^i{}_{[k||t}\Delta_{0|}{}^t{}_{l]}+\Delta_j{}^t{}_{[l}\Delta_{|t|}{}^i{}_{k]}+\Delta_j{}^i{}_t\overset{*}{\Omega}_k{}^t{}_l). \tag{1.24}$$

§ 2. Die Berwaldsche affine Erweiterung des Finslerraumes

L. Berwald bestimmte in seiner Arbeit [1] eine von der Vargaschen affinen Verallgemeinerung des Finslerraumes $\mathfrak{F}_n$ verschiedene affine Erweiterung von $\mathfrak{F}_n$ dadurch, daß er durch Gleichungen von der Form

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+2G^i(x,\dot{x})=0, \qquad \dot{x}^i\overset{\text{def}}{=}\frac{dx^i}{dt} \tag{2.1}$$

in einem Linienelementraum gewisse Kurven, die sog. *Bahnen des Raumes* ausgezeichnet hatte, und von den Funktionen $G^i(x,\dot{x})$ eine kovariante Ableitung ableitete. Wählen wir für G^i die Funktionen

$$G^i(x,v)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{2}\overset{*}{\Gamma}_j{}^i{}_k(x,v)v^jv^k, \tag{2.2}$$

so bekommen wir auf diese Weise die Berwaldsche affine Theorie des Finslerraumes.

Nehmen wir statt (2. 2) die Funktionen

$$\overset{*}{G}{}^i(x,v)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{2}\overset{*}{L}_j{}^i{}_k(x,v)v^jv^k, \tag{2.3}$$

so bekommt man auch jetzt einen Berwaldschen affinen Raum, in dem wir aber noch die Existenz des metrischen Grundtensors (0. 1) bedingen wollen. Diesen Raum bezeichneten wir einen $\mathfrak{B}_n$-Raum (vgl. die Einleitung), wenn noch im Raume die kovariante Ableitung durch (0. 11) bestimmt war. Die Bahnen des $\mathfrak{B}_n$-Raumes sind durch (2. 1) bestimmt, wenn darin statt G^i die durch (2. 3) bestimmten Funktionen G^{*i} ersetzt werden. Der Parameter t ist jetzt ein von der Bogenlänge verschiedener affiner Parameter.

Für die $\mathfrak{B}_n$-Räume wollen wir im folgenden immer annehmen, daß der Tensor $A_j{}^i{}_k$ in j, k symmetrisch ist, da in den Grundgrößen (2. 3) in trivialer Weise nur der symmetrische Teil des Tensors $A_i{}^j{}_k$ vorkommen kann. Die durch (0. 8) bestimmten Übertragungsparameter $G_j^{*}{}^i{}_k$ sind jedenfalls in den Indizes j, k symmetrisch.

Die Krümmungstensoren des $\mathfrak{B}_n$-Raumes sind nach den entsprechenden Berwaldschen Formeln (vgl. [1] Formeln (2. 6), (2. 9), und (2. 10))

$$K^{*i}{}_j \overset{\text{def}}{=} 2\partial_j G^{*i} - \partial_t G^{*i}{}_j v^t + 2 G_j^{*}{}^i{}_t G^{*t} - G^{*i}{}_t G^{*t}{}_j, \tag{2. 4}$$

$$K_j^{*}{}^i{}_k \overset{\text{def}}{=} \tfrac{2}{3}\, \partial_{v[j} K^{*i}{}_{k]} \equiv 2(\partial_{[k} G^{*i}{}_{j]} + G^{*t}{}_{[j} G_{k]}^{*}{}^i{}_t), \tag{2. 5}$$

$$K_h^{*}{}^i{}_{jk} \overset{\text{def}}{=} \tfrac{2}{3}\, \partial^2_{v^h v[j} K^{*i}{}_{k]} \equiv \partial_{v^h} K_j^{*}{}^i{}_k, \tag{2. 6}$$

wo

$$G^{*i}{}_j \overset{\text{def}}{=} \partial_{v^j} G^{*i} \equiv G_t^{*}{}^i{}_j v^t,$$

und $G_j^{*}{}^i{}_k$ bzw. G^{*i} durch (0. 8) bzw. (2. 3) bestimmt ist.

Wir bezeichnen mit $K^i{}_j$ denjenigen Tensor, der die Form (2. 4) hat, statt G^{*i} steht aber in seiner Formel die durch (2. 2) bestimmte Größe G^i. $K^i{}_j$ ist also der entsprechende Berwaldsche affine Krümmungstensor des Finslerraumes $\mathfrak{F}_n$. Eine einfache Rechnung zeigt, daß der Tensor $K^{*i}{}_j$ mit $K^i{}_j$ durch die Formel

$$K^{*i}{}_j = K^i{}_j + 2A^i{}_{;j} - (\partial_{v^j} A^i)_{;t} v^t + 2A^t \partial^2_{v^t v^j} A^i - \partial_{v^t} A^i \partial_{v^j} A^t \tag{2. 7}$$

zusammenhängt, wo das Semikolon die Berwaldsche kovariante Ableitung bezeichnet. Diese kovariante Ableitung stimmt formal mit (0. 11) überein, nur steht statt $G_j^{*}{}^i{}_k$ der Berwaldsche Übertragungparameter $G_j{}^i{}_k$ (vgl. [1] § 3).

Im folgenden benötigen wir noch die Bianchischen Identitäten des Krümmungstensors $K_j^{*}{}^i{}_k$. Es ist (vgl. [1] Formel (3. 5), S. 761):

$$K^{*i}{}_{j,k} - K^{*i}{}_{k,j} + K_j^{*}{}^i{}_{k,r} v^r = 0, \qquad K^{*i}{}_k \equiv K_j^{*}{}^i{}_k v^j, \tag{2. 8}$$

wo das Komma die durch (0. 11) angegebene kovariante Ableitung bedeutet.

§ 3. Definition der affinen Finslerräume von skalarer Krümmung. Beispiele

Die Definition der $\mathfrak{A}_n$-Räume von skalarer Krümmung wollen wir durch solche Formeln festlegen, daß die Forderung, daß sie als Spezialfälle die Finslerschen und die Riemannschen Räume von skalarer Krümmung (vgl. [1] § 13 und [14] Chap. V. insb. § 8, Formel (11)), ferner die in unserem Aufsatz [8] entwickelten Räume in sich enthalte, erfüllt sei. Wir geben die folgende

Definition 3. *Ein affiner Finslerraum $\mathfrak{A}_n$ ist ein $\mathfrak{A}_n$-Raum von skalarer Krümmung erster, zweiter, bzw. dritter Art, falls sein Krümmungstensor R^*_{oijk} die Form:*

$$R^*_{oijk} = 2R^* \gamma_{i[k}\gamma_{|o|j]} + \tfrac{2}{3} R^* \|_{[j}(\gamma_{|i|k]}\gamma_{oo} - \gamma_{|io}\gamma_{o|k]}), \tag{3.1}$$

$$R_{oijk} = 2R^* \gamma_{i[k} l_{j]} + \tfrac{2}{3} R^* \|_{[j}(\gamma_{|i|k]} - \gamma_{|io|} l_{k]}), \tag{3.2a}$$

$$R^*_{oijk} = 2R^* g_{i[k}\gamma_{|o|j]} + \tfrac{2}{3} R^* \|_{[j}(g_{|i|k]}\gamma_{oo} - l_{|i}\gamma_{o|k]}^{\;i}), \tag{3.2b}$$

bzw.

$$R^*_{oijk} = 2R^* g_{i[k} l_{j]} + \tfrac{2}{3} R^* \|_{[j}(g_{|i|k]} - l_{|i|} l_{k]}) \tag{3.3}$$

hat, wo γ_{ij} einen aus g_{ij}, $A_i{}^j{}_k$ und aus den partiellen Ableitungen dieser Grundtensoren gebildeten rein kovarianten Tensor bedeutet.

Die Type (3. 2a) und (3. 2b) nennen wir $\mathfrak{A}_n$-Räume von skalarer Krümmung zweiter Art, da in den Gliedern des Krümmungstensors bei diesen Typen immer ein g_{ik}- und ein γ_{ik}-Faktor vorkommt. (Es ist nämlich in (3. 2a) $l_j = g_{oj}$, $g_{oo} = 1$.) Die Krümmungstensoren haben bei diesen Typen gleichartigen Charakter.

Es kann leicht verifiziert werden, daß diese Definition der $\mathfrak{A}_n$-Räume von skalarer Krümmung unseren Forderungen genügt. Für

$$A_i{}^j{}_k = 0, \qquad \gamma_{ij} = g_{ij} \tag{3.4}$$

geht jeder Typ in einen $\mathfrak{F}_n$-Raum von skalarer Krümmung über (vgl. [1] Formel (13.5), S. 774[5]) und unsere Formeln (0. 6), und (1. 18)). Nehmen wir jetzt an, daß der zu Grunde gelegte Finslerraum $\mathfrak{F}_n$ ein Riemannscher Raum $\mathfrak{R}_n$ ist, d. h. g_{ij} nur von dem Orte x^i abhängt, von der Richtung v^i aber unabhängig ist, so bekommt man nach den Formeln (0. 6), (1. 18), (3. 4) und

[5]) In der zitierten Formel befindet sich ein Druckfehler. Im letzten Glied soll statt l^j_m bzw. l^j_i : δ^j_m bzw. δ^j_i gesetzt werden.

nach $R^*\|_j=0$ von jedem der Type (3. 1)—(3. 3):

$$R_{oijk}=2R^*(x)g_{h[j}g_{k]i}l^h \tag{3.5}$$

da offenbar $l_j \equiv g_{oj} \equiv g_{jo}$ immer in jeden metrischen Räumen gültig ist. Beachten wir jetzt, daß sowohl R_{hijk}, wie g_{ij} von den v^i unabhängig sind, so bekommt man aus (3. 5) eben die charakteristische Relation des Krümmungstensors des $\mathfrak{R}_n$-Raumes von skalarer Krümmung. Bedingen wir jetzt statt (3. 4) nur die Unabhängigkeit der Grundtensoren $A_i{}^j{}_k$ und g_{ij} von den v^i, so geht unser $\mathfrak{A}_n$-Raum in einen in unserem Aufsatz [8] behandelten $\mathfrak{R}_n^*$-Raum über, und die Typen (3. 1)—(3. 3) bestimmen die R_n^*-Räume von skalarer Krümmung erster, zweiter, bzw. dritter Gattung, da jetzt offenbar wieder $R^*\|_j=0$ ist, und auch R^*_{hijk} von der Richtung unabhängig ist. (Vgl. die Formeln (2. 1)—(2. 3) von [8].)

Wir wollen jetzt durch Beispiele die Existenz der $\mathfrak{A}_n$-Räume von skalarer Krümmung beweisen. Auf Grund von (1. 18) ist

$$R^*_{oikl} \equiv \overline{R}^*_{oikl}=\overline{R}_{oikl}+\Phi_{oikl}. \tag{3.6}$$

Um die explizite Formel von Φ_{oikl} zu bekommen, beachten wir die im Finslerraum gültige Relation:

$$\Gamma_j^{*i}{}_k\|_t l^j=\nabla_o A_k{}^i{}_t \tag{3.7}$$

(vgl. [2] Formel (44)), somit bekommt man von (1. 18a) nach einer Kontraktion mit l^j im Hinblick auf (0. 6) und nach Herunterziehen des Indexes i

$$\Phi_{oikl}=2\nabla_{[l}A_{|oi|k]}-2(\nabla_o A_{ti[k}+A_{ri[k}\|_{|t|}l^r+A_{ti[k})A_{|o|}{}^t{}_{l]}. \tag{3.8}$$

Beispiel A. Nehmen wir an, daß der Finslerraum $\mathfrak{F}_n$ ein Raum von konstanter Krümmung ist, d. h. der Krümmungstensor die Form

$$R_{oikl}=2Rg_{i[l}l_{k]}, \qquad R=\text{Konst.} \tag{3.9}$$

hat, und für $A_j{}^i{}_k$

$$A_{jik}=p_i g_{jk} \tag{3.9a}$$

besteht, wo p_i einen kovarianten Vektor bedeutet. Mit der Bezeichnung

$$\gamma_{il} \overset{\text{def}}{=} \nabla_l p_i+\nabla_o A_{lit}p^t+p_i p_l+Rg_{il}$$

bekommt man nach den Formeln (3. 6), (3. 8) und (3. 9) eben den Typ (3. 2a) mit $R^*\equiv 1$. Ist der Vektor p_i allein von dem Orte x^i abhängig und von der Richtung v^i unabhängig, so ist γ_{il} ein symmetrischer Tensor.

Beispiel B. Es sei jetzt p_i eint kovarianter Vektor und

$$A_{ijk}=p_i g_{jk}.$$

Nehmen wir wieder an, daß der Finslerraum $\mathfrak{F}_n$ ein Raum von konstanter Krümmung ist. Setzen wir jetzt

(3. 10) $$\gamma_{ik} \overset{\text{def}}{=} p_i p_k + p_i p_r \|_k l^r - \nabla_k p_i + R l_i l_k ,$$

so bekommen wir auf Grund der Formeln (3. 6), (3. 8) und (3. 9) den Typ (3. 2b) mit $R^* \equiv 1$.

Ist in diesem Beispiel $R = 0$ und $p_o = 0$, so ist nach (3. 10) und nach der Identität $\nabla_k l_i = 0$ der Vektor γ_{ok} der Nullvektor, und somit ist nach (3. 2b) $\overset{*}{R}_{oijk} = 0$. Die geometrische Bedeutung dieser Relation ist die Existenz des absoluten Parallelismus der Linienelemente l^i im $\mathfrak{A}_n$-Raum, da die Integrabilitätsbedingungen des Differentialgleichungssystems $\overset{*}{\omega}{}^i(d) = 0$, d. h. die Formeln:

$$(\overset{*}{\omega}{}^i)' \equiv [\overset{*}{\omega}{}^k \overset{*}{\omega}{}^i{}_k] - \overset{*}{P}_o{}^i{}_{jk} [dx^j \overset{*}{\omega}{}^k] - \overset{*}{R}_o{}^i{}_{jk} [dx^j dx^k] = 0$$

(vgl. [2] § 42, S. 38), in diesem Falle erfüllt sind.

Der Hauptkrümmugnstensor (1. 15a) ist aber bei diesem Beispiel im allgemeinen von Null verschieden, auch in dem Falle, in dem der Hauptkrümmungstensor $\bar{R}_j{}^i{}_{kl}$ des Finslerraumes $\mathfrak{F}_n$ Null ist. Auf Grund der Relation $p_o = 0$ ist nämlich nach (1. 18a) in diesem Falle

$$\Phi_j{}^i{}_{kl} = 2\delta^i_{[l}(p_{k]} p_j - \nabla_{k]} p_j)$$

und nach (1. 18) beweist das unsere Behauptung. Ein absoluter Parallelismus der Vektoren existiert also im $\mathfrak{A}_n$-Raum auch dann nicht, wenn das im $\mathfrak{F}_n$-Raum gültig war. (Vgl. [2] § 43.)

B e i s p i e l C. Nehmen wir an, daß $A_{oik} = 0$ ist, so wird nach den Formeln (3. 6) und (3. 8) $\bar{\overset{*}{R}}_{oikl} = \bar{R}_{oikl}$ bestehen. Wenn also (3. 9) gültig war, so ist auch der $\mathfrak{A}_n$-Raum ein Raum von skalarer Krümmung dritter Art. Wenn wir für A_{ijk} die Form

(3. 11) $$A_{ijk} = g_{ij} p_k \qquad p_k = \partial_k p(x)$$

nehmen (p_k ist ein nur vom Orte x^i abhängiger Gradientvektor), so bekommt man nach (1. 18a) $\Phi_j{}^i{}_{kl} = 0$, d. h. es stimmen nach (1. 18) sogar die Hauptkrümmungstensoren der $\mathfrak{A}_n$- und $\mathfrak{F}_n$-Räume überein. Bedingen wir noch die Relation $\mu_i{}^j{}_k = 0$, so wird nach (0. 7)

(3. 11a) $$\overset{*}{M}_j{}^i{}_k = A_j{}^i{}_k$$

gültig sein, und auf Grund der Formeln (1. 15) und (1. 17) werden außer den Krümmungstensoren $\bar{\overset{*}{R}}_i{}^j{}_{kl}$ und $\overset{*}{R}_i{}^j{}_{kl}$ auch die Krümmungstensoren $\overset{*}{S}_i{}^j{}_{kl}$ des $\mathfrak{A}_n$- und $\mathfrak{F}_n$-Raumes übereinstimmen. Das können wir im folgenden Satz zusammenfassen:

Satz 1. *Bestehen die Relationen* (3. 11) *und* (3. 11a), *so sind die Krümmungstensoren* (1. 15), (1. 15a) *und* (1. 17) *des* $\mathfrak{A}_n$*-Raumes mit den entsprechenden Krümmungstensoren des Finslerraumes* $\mathfrak{F}_n$ *identisch.*

§ 4. Definition der affin-skalaren Räume. Beispiele

In diesem Paragraphen wollen wir die metrisch-affinen Räume $\mathfrak{B}_n$ (vgl. die Definition 2 in der Einleitung) von skalarer Krümmung definieren. Wir wollen diese Definition in der Weise festlegen, daß die metrisch-affinen Räume $\mathfrak{B}_n$ von skalarer Krümmung, die wir kurz als affin-skalare Räume bezeichnen wollen, eben die Finslerräume $\mathfrak{F}_n$ von skalarer Krümmung bestimmen, falls $A_i{}^j{}_k=0$ ist. Die Definition bestimmen wir mit Hilfe des Tensors $K^{*i}{}_j$, da daraus die übrigen Krümmungstensoren auf Grund der Formeln (2. 5) und (2. 6) schon bestimmbar sind.

Definition 4. *Ein metrisch-affiner Raum* $\mathfrak{B}_n$ *soll ein affin-skalarer Raum* $\mathfrak{B}_n$ *von erster, zweiter, bzw. dritter Art genannt werden, falls* K^{*i} *die Form:*

$$K^{*i}{}_j=K^*F^2(\gamma^i{}_j\gamma_{oo}-\gamma^i{}_o\gamma_{oj}), \tag{4. 1}$$

$$\text{(a)}\quad K^{*i}{}_j=K^*F^2(\gamma^i{}_j-\gamma^i{}_o l_j), \qquad \text{(b)}\quad K^{*i}=K^*F^2(\delta^i_j\gamma_{oo}-l^i\gamma_{oj}), \tag{4. 2}$$

bzw.

$$K^{*i}{}_j=K^*F^2(\delta^i_j-l^i l_j) \tag{4. 3}$$

hat. (Für die Bedeutung von γ_{ik} bzw. für die Benennung „skalarer Raum zweiter Art" vgl. unsere Definition 3, und die nachfolgenden Zeilen.)

Offenbar entsteht (4. 2) von der Formel (4. 1) dadurch, daß wir in den beiden Gliedern von (4. 1) je ein γ_{ij} durch den metrischen Grundtensor g_{ij} ersetzen. Ist nun $A_i{}^j{}_k=0$, und $\gamma_{ik}=g_{ik}$, so bestimmt jeder der Type (4. 1)—(4. 3) einen Finslerraum $\mathfrak{F}_n$ von skalarer Krümmung (vgl. [1], § 13, insb. Gleichung (13. 3)). Die Existenz dieser Typen wollen wir wieder durch Beispiele zeigen.

Vor allem bemerken wir, daß ein $\mathfrak{B}_n$-Raum auf Grund von (0. 6) und (2. 3) — abgesehen von dem metrischen Grundtensor g_{ik} — allein durch die Angabe von

$$A^i \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} A_j{}^i{}_k v^j v^k \tag{4. 4}$$

bestimmt werden kann, während nach den Formeln (2. 3) und (0. 8) $A_i{}^j{}_k$ überhaupt nicht in expliziter Form bekannt sein muß.

Zweitens bemerken wir, daß der Krümmungsskalar K^* in den Räumen vom Typ (4. 1) und (4. 2) in manchen Fällen mit dem Tensor γ^i_j vereinigt werden könnte, d. h. man könnte in (4. 1) im Falle $K^*>0$ statt γ_{ik} den Tensor $\overset{*}{\gamma}_{ik} \overset{\text{def}}{=} \sqrt{K^*}\gamma_{ik}$ bzw. im Falle (4. 2) $\overset{*}{\gamma}_{ik} \overset{\text{def}}{=} K^*\gamma_{ik}$ einführen. Die Formeln (4. 1) und (4. 2), ausgedrückt mit γ^*_{ik}, würden dann eine einfachere Struktur haben. Befriedigt aber γ_{ij} eine charakteristische Relation (wie z. B. $\overset{*}{\nabla}_k\gamma_{ij}=0$ ist), die für γ^*_{ij} schon nicht gültig ist, so ist es zweckmäßig den Krümmungstensor $K^{*i}_{\ j}$ des affin-skalaren Raumes in der Form (4. 1) bzw. (4. 2) zu bestimmen.

Drittens bemerken wir die im folgenden wichtigen Relationen

$$l^i_{;j}=0, \qquad F_{;j}=0, \tag{4. 5}$$

wo das Semikolon die schon im Paragraphen 2 benützte Berwaldsche kovariante Ableitung bedeutet.

Beispiel A'. Nehmen wir an, daß $A^i=\frac{1}{2}F^2p^i$ ist, wo p^i einen kontravarianten Vektor bedeutet. Z. B. führt der durch (3. 9a) angegebene Tensor $A_i{}^j{}_k$ zu diesem Vektor. Beachten wir jetzt die Formeln (2. 7) und (4. 5), und nehmen wir noch an, daß der zu Grunde gelegte Finslerraum $\mathfrak{F}_n$ ein Raum von skalarer Krümmung ist, d. h.

$$K^i_j=F^2K(\delta^i_j-l^il_j) \tag{4. 6}$$

besteht, so wird nach der Bezeichnung:

$$\gamma^i_j \overset{\text{def}}{=} p^i_{;j}-\tfrac{1}{2}p^i\|_{j;o}+p^ip_j+\tfrac{1}{2}F^2(\partial^2_{\dot v^t\dot v^j}p^i)p^t- \tag{4. 7}$$
$$-\tfrac{1}{2}p^t\|_jl_tp^i+p^i\|_jp_o-\tfrac{1}{4}p^i\|_tp^t\|_j+K\delta^i_j$$

der Krümmungstensor $K^{*i}_{\ j}$ die Form (4. 2a) haben, der $\mathfrak{B}_n$-Raum ist also ein affin-skalarer Raum von zweiter Art. Der Krümmungsskalar ist jetzt $K^*\equiv1$.

Beispiel B'. Nehmen wir an, daß im Beispiel A' $p^i=l^i$ ist. Nach (4. 5), (1. 6) (a) bekommt man von der Formel (4. 7):

$$\gamma^i_j=(\tfrac{1}{4}+K)\delta^i_j+\tfrac{3}{4}l^il_j. \tag{4. 8}$$

Da im Beispiel A' der Tensor $K^{*i}_{\ j}$ die Form (4. 2a) hatte, wird jetzt nach (4. 8) und wegen $K^*=1$ (vgl. Beispiel A'):

$$K^{*i}_{\ j}=F^2(\tfrac{1}{4}+K)(\delta^i_j-l^il_j), \tag{4. 9}$$

der $\mathfrak{B}_n$-*R*aum ist also ein affin-skalarer Raum von dritter Art mit dem Krümmungsskalar $(\frac{1}{4}+K)$. Wir haben also von einem Raume $\mathfrak{F}_n$ von skalarer Krümmung (vgl. Formel (4. 6)) wieder einen Raum von skalarer Krümmung bekommen, der Krümmungstensor hat sich aber dabei verändert, während in Satz 1 eben der Krümmungstensor sich nicht veränderte. Nach den Formeln (4.6) und (4.9) können wir das im folgenden Satz zusammenfassen.

Satz 2. *Ist $\mathfrak{F}_n$ ein Finslerraum von skalarer Krümmung, in dem also* (4.6) *gültig ist, und ist*

$$A^i = \tfrac{1}{2} F^2 l^i,$$

so ist der zugehörige $\mathfrak{B}_n$-Raum ein affin-skalarer Raum von dritter Art, dessen Krümmungstensor $K^{*i}_{\ j}$ sich von $K^i_{\ j}$ nur um einen skalaren Faktor unterscheiden kann. Es ist:

$$K^{*i}_{\ j} = \frac{4K+1}{4K} K^i_{\ j}.$$

Beispiel C′. Nehmen wir an, daß (4.6) besteht und

$$A^i = v^i p_r v^r, \qquad p_r = p_r(x^1, \ldots, x^n)$$

ist. Beachten wir jetzt, daß neben (4.5) auch $v^i_{\ ;j} = 0$ besteht, so bekommt man aus der Formel (2.7) den Typ (4.2b), mit

$$\gamma_{oj} = K l_j + p_o p_j - 2 p_{o\,;\,j} + p_{j\,;\,o}.$$

Für γ_{ij} kann in diesem Falle

$$\gamma_{ij} = K l_i l_j + p_i p_j - 2 p_{i\,;\,j} + p_{j\,;\,i}$$

gesetzt werden.

§ 5. Parallelübertragung des Linienelementes in den verschiedenen skalaren Räumen

Zu Grunde gelegt sei wieder ein $\mathfrak{A}_n$-Raum von skalarer Krümmung. Nehmen wir an, daß die Übertragungsparameter (0.6) in i, k symmetrisch sind; in diesem Falle existieren infinitesimale Parallelogramme im $\mathfrak{A}_n$-Raum. Die Parallelübertragung des normierten LInienelementes ist durch

$$\overset{*}{\omega}{}^i(d) = 0 \tag{5.1}$$

charakterisiert. Führt man in einem $\mathfrak{A}_n$-Raum mit symmetrischen Übertragungsparametern den Vektor l^i parallel um ein infinitesimales Parallelogramm herum, so bekommt man nach (5.1) und (0.10) für die Veränderung von l^i:

$$(\delta d - d\delta) l^i = R^{*i}_{o\ jk} \delta x^j dx^k. \tag{5.2}$$

Bezüglich der Parallelübertragung des Vektors l^i in den Finslerräumen um ein infinitesimales Parallelogramm besteht der folgende

S a t z v o n B e r w a l d. „1) Führt man in einem Finslerschen Raum skalarer nicht konstanter Krümmung R ein beliebiges normiertes Linienelement parallel um ein willkürliches infinitesimales Parallelogramm herum, so unterscheiden sich seine Anfangs- und Endlage um einen Vektor, der (von Größen höherer als zweiter Ordnung abgesehen) der 3-Richtung bezw. 2-Richtung angehört, die durch das Linienelement und die 2-Richtung des Parallelogramms aufgespannt wird. Wenn insbesondere die 2-Richtung des Parallelogramms senkrecht zu einem der Vektoren mit den kovarianten Komponenten l_i oder $R_{||i}$-ist, so gehört der Differenzvektor (bis auf Größen mindestens dritter Ordnung) der 2-Richtung des Parallelogramms an. Ist die 2-Richtung des Parallelogramms zu beiden Vektoren l_i und $R_{||i}$ senkrecht, so stimmen Anfangs- und Endlage des Linienelements in zweiter Ordnung überein.

2) Führt man in einem Finslerschen Raum konstanter Krümmung ein beliebiges normiertes Linienelement parallel um ein willkürliches infinitesimales Parallelogramm herum, so unterscheiden sich seine Anfangs- und Endlage um einen Vektor, der (von Größen höherer als zweiter Ordnung abgesehen) der 2-Richtung des Parallelogramms angehört. Wenn insbesondere die Krümmung Null ist oder wenn die 2-Richtung des Parallelogramms zum Linienelement senkrecht ist, so stimmen Anfangs- und Endlage in zweiter Ordnung überein." (Vgl. [1] § 14, S. 775.)

Im folgenden werden wir das Analogon dieses Berwaldschen Satzes in unseren $\mathfrak{A}_n$- und $\mathfrak{B}_n$-Räumen formulieren.

S a t z 3. *Der Berwaldsche Satz über die Parallelübertragung von l^i um ein infinitesimales Parallelogramm in den Finslerräumen von skalarer Krümmung ist in den $\mathfrak{A}_n$-Räumen von skalarer Krümmung dritter Art gültig. Auch für den Typ* (3. 2a) *ist der Berwaldsche Satz gültig, die Veränderung von l^i wird aber in den verschiedenen Fällen nicht von der drei- bzw. Zweirichtung $(l^i, dx^i, \delta x^i)$ bzw. $(dx^i, \delta x^i)$ sondern von der durch die Vektoren*

$$\gamma^{io}, \quad \lambda^i \overset{\text{def}}{=} \gamma^i_{\ k} dx^k, \quad \mu^i \overset{\text{def}}{=} \gamma^i_{\ k} \delta x^k \tag{5. 3}$$

bestimmten drei- bzw. Zweirichtung (λ^i, μ^i) abhängig sein.

B e w e i s. Nach (3. 2a) und (5. 2) ist:

$$\begin{aligned}(\delta d - d\delta) l^i = {} & (\tfrac{1}{3} R^* \|_j \delta x^j + R^* l_j \delta x^j) \lambda^i - \\ & - (\tfrac{1}{3} R^* \|_k dx^k + R^* l_k dx^k) \mu^i + \tfrac{2}{3} \gamma^{io} R^* \|_{[k} l_{j]} \delta x^j dx^k.\end{aligned} \tag{5. 4}$$

Für den Typ (3. 3) ist in (5. 4) nach den Definitionsformeln (5. 3): $\gamma^i_{\ k} = \delta^i_k$, $\lambda^i = dx^i$, $\mu^i = \delta x^i$. Die Formel (5. 4) entspricht der Formel (14. 1) von [1]. Der Vergleich dieser beiden Formeln ergibt unmittelbar die Richtigkeit unseres Satzes 3.

Der Berwaldsche Satz (vgl. [1] § 14) über die Parallelübertragung der normierten Linienelemente in Finslerräumen skalarer Krümmung um ein infinitesimales Parallelogramm ist in den $\mathfrak{A}_n$-Räumen vom Typ (3. 1) und (3. 2b) nicht gültig falls der Krümmungsskalar R^* auch von den v^i abhängig ist. Ist aber der Krümmungsskalar von v^i unabhängig, so kann das Analogon des Berwaldschen Satzes für jede Art der $\mathfrak{A}_n$-Räume skalarer Krümmung bestimmt werden. Für die Typen (3. 2a) und (3. 3) wurde das schon in unserem Satz 3 gezeigt. Wir brauchen also nur die Typen (3. 1) und (3. 2b) untersuchen. Es besteht der

Satz 4. *Ist der $\mathfrak{A}_n$-Raum ein Raum von skalarer Krümmung erster Art, und ist der Krümmungsskalar nur vom Orte x^i unabhängig, so gilt der Berwaldsche Satz über die Parallelübertragung von l^i in den $\mathfrak{F}_n$-Räumen von konstanter Krümmung* (vgl. [1] § 14, 2), S. 775) *auch in diesen Räumen, statt der Zweirichtung $(dx^i, \delta x^i)$ steht aber jetzt der Zweirichtung (λ^i, μ^i)* (vgl. (5. 3)) *und statt l_i steht γ_{0i}. Ist der $\mathfrak{A}_n$-Raum vom Typ* (3. 2b), *so ist $\lambda^i = dx^i$, $\mu^i = \delta x^i$ und im Berwaldschen Satz soll nur l_i mit γ_{0i} vertauscht werden.*

Bemerkung. In den entsprechenden Berwaldschen Untersuchungen kommen Finslerräume konstanter Krümmung vor, während wir von dem Krümmungsskalar R^* nur die Unabhängigkeit von den v^i bedingt haben. Im Finslerschen Fall folgt aber nach dem Schurschen Satz [1], § 16, daß der Krümmungsskalar eine Konstante ist, falls sie von den v^i nicht abhängt.

Beweis des Satzes 4. Auf Grund von (5. 2) und (3. 1) ist

$$(5.5)\qquad (\delta d - d\delta) l^i = R^*[(\gamma_{0j}\delta x^j)\lambda^i - (\gamma_{0k} dx^k)\mu^i].$$

(5. 5) entspricht der Gleichung (14. 3) von [1]. Vergleichen wir diese beiden Formeln, so folgt unmittelbar der Satz 4.

Wir wollen nun die Parallelübertragung des Linienelementes v^i um ein infinitesimales Parallelogramm in einem affin-skalaren Raum $\mathfrak{B}_n$ untersuchen. In einem Berwaldschen affinen Raum $\mathfrak{B}_n$ ist die Veränderung des Linienelementes v^i nach einer Parallelübertragung um ein infinitesimales Parallelogramm

$$(5.6)\qquad (\delta d - d\delta) v^i = K_{j\ k}^{*i}\,\delta x^j dx^k$$

(vgl. [1] Gleichung (7. 16)). Um die Lösung unseres Problems zu bekommen, müssen wir also von den Formeln (4. 1)—(4. 3) immer den Krümmungstensor $K_{j\ k}^{*i}$ bestimmen.

Für den Typ (4. 3) bekommt man nach (2. 5) für $K_{j\ k}^{*i}$ die Form:

$$(5.7)\qquad K_{j\ k}^{*i} = 2FK^*\delta^i_{[k}l_{j]} + \tfrac{2}{3}FK^*\|_{[j}(\delta^i_{k]} - l^i l_{k]}).$$

die abgesehen vom Faktor F — mit dem Typ (3. 3) identisch ist, die auch einen Finslerraum $\mathfrak{F}_n$ von skalarer Krümmung charakterisiert. Auf Grund von (5. 6) und (5. 7) besteht also der folgende

Satz 5. *Für die Parallelübertragung des Linienelementes v^i um ein infinitesimales Parallelogramm besteht in einem affin-skalaren Raum dritter Art der Berwaldsche Satz* (vgl. [1] § 14), *wenn darin statt l^i das Linienelement v^i gesetzt wird.*

Für die anderen Typen der affin-skalaren Räume könnten auf Grund von (5. 6) und (4. 1)—(4. 2b) leicht ähnliche Sätze bestimmt werden. Z. B. für den Typ (4. 1) ist

$$K^{*i}_{j\ k} = F\{\tfrac{4}{3} l_{[j}(\gamma^i{}_{k]}\gamma_{oo} - \gamma^i{}_{|o}\gamma_{o|k]}) +$$
$$+ \tfrac{2}{3} K^*\|_{[j}(\gamma^i{}_{k]}\gamma_{oo} - \gamma^i{}_{|o}\gamma_{o|k]}) + \tfrac{2}{3} K^*[(\gamma^i{}_{[k}\gamma_{|oo|})\|_{j]} - (\gamma^i{}_o\gamma_{o[k})\|_{j]}]\}$$

und somit besteht nach (5. 6) der

Satz 6. *In einem affin-skalaren Raum von erster Art verändert sich das Linienelement v^i bei einer Parallelübertragung um ein infinitesimales Parallelogramm um einen Vektor, der eine lineare Kombination der Vektoren* (5. 3), *und*

$$\varrho^i \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^i{}_{[k}\|_{j]}\delta x^j dx^k, \quad \sigma^i \stackrel{\text{def}}{=} (\gamma^i{}_o\gamma_{o[k})\|_{j]}\delta x^j dx^k.$$

ist.

O. VARGA gab in seinem Aufsatz [12] eine andere Charakterisierung der Finslerräume skalarer und konstanter Krümmung. Er führte das normierte Linienelement l^i um eine geschlossene doppelpunktfreie Kurve. Die Analoga dieser Untersuchungen können in erster Reihe in unseren affinskalaren $\mathfrak{B}_n$-Räumen bestimmt werden, da diese die Ausdrückbarkeit von $K^{*i}_{j\ k}$ durch $K^{*i}{}_k$ wesentlich benützen, während in den $\mathfrak{A}_n$-Räumen $R^{*i}_{o\ jk}$ im allgemeinen durch $R^{*i}_{o\ ok}$ nicht unmittelbar ausdrückbar ist, wie im Finslerschen Raum (vgl. [1] Formeln (13. 3) und (13. 5)). Wir werden im folgenden zeigen, daß *die Vargasche Charakterisierung der $\mathfrak{B}_n$-Räume von skalarer Krümmung für die affinskalaren $\mathfrak{B}_n$-Räume zweiter Art und vom Typ* (4. 2b) *gültig ist* (vgl. [12] Satz 2).

Die Parallelübertragung längs einer Kurve $x^i = x^i(t)$ des normierten Linienelementes l^i in einem metrisch-affinen $\mathfrak{B}_n$-Raum ist durch

$$\frac{dl^i}{dt} = -G^{*i}{}_k(x, l)\frac{dx^k}{dt} \tag{5. 8}$$

festgelegt. Ist C eine geschlossene doppelpunktfreie Kurve, die auf der zweidimensionalen Fläche:

$$x^i = x^i(u, v)$$

liegt, d. h. die Gleichungen

$$C: \quad x^i = x^i(u(t), v(t))$$

hat, so ist zwischen Anfangs- und Endlage von l^i nach einer Parallelverschiebung längs C der Differenzvektor

$$(5.9) \qquad \Delta l^i = \frac{1}{2F} \underset{(0)\,(0)}{K_j^{*i}{}_k(x, v)} \left(\frac{\partial (x^k, x^j)}{\partial (u, v)} \right)_{t=t_0} \Delta \bar{S} + O^i(\varepsilon^3),$$

wo $\Delta \bar{S}$ den von der Kurve C eingeschlossenen (euklidisch gemessenen) Flächeninhalt bedeutet. Die Relation (5. 9) kann dem Finslerschen Fall vollständig analog abgeleitet werden (Vgl. [12] (1, 23)—(1, 32).) [6]), da die Gleichung (5. 8) mit der entsprechenden Relation des Finslerraumes (vgl. [12] Gleichung (1, 19)) vollständig analog ist.

Nach der Bezeichnung

$$\frac{\partial x^i}{\partial u} \Delta \bar{S} = p^i, \quad \frac{\partial x^i}{\partial v} \Delta \bar{S} = q^i$$

bekommt man bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung in ε von der Gleichung (5. 9) die folgende Formel:

$$(5.10) \qquad \Delta l^i = \frac{1}{F} K_j^{*i}{}_k p^j q^k.$$

Berechnen wir nun $K_j^{*i}{}_k$ mittels (4. 2b) unter Beachtung von (1. 6) (a) von der Definitionsformel (2. 5), so bekommt man nach (5. 10) für Δl^i die Formel

$$\Delta l^i = A p^i + B q^i + C l^i,$$

wo A, B und C skalare Größen sind; wenn wir diese Formel wieder mit (5. 10) vergleichen, so wird:

$$(5.11) \qquad \frac{1}{F} K_j^{*i}{}_k p^j q^k = A p^i + B q^i + C l^i \text{ [7]}.$$

Wegen der schiefen Symmetrie von $K_j^{*i}{}_k$ in j, k, und wegen der Willkürlichkeit von p^i, q^i bekommt man von der Gleichung (5. 11), daß $\frac{1}{F} K_j^{*i}{}_k$ die Form:

$$(5.12) \qquad \frac{1}{F} K_j^{*i}{}_k = 2\delta^i_{[j} A_{k]} + B_{jk} l^i$$

hat, wo B_{jk} einen schiefsymmetrischen Tensor bedeutet. Wir beweisen jetzt den folgenden

Satz 7. *Die Formel* (5. 12) *ist für die affin-skalaren Räume zweiter Art und vom Typ* (4. 2b) *charakteristisch.*

---

[6]) $K_j^{*i}{}_k$ entspricht im Finslerraum $FR_0{}^i{}_{jk}$. Im [12] ist statt $R_0{}^i{}_{jk}$ die Bezeichnung $R_{kj}^{\cdot\cdot i}$ benützt. Auch die Bedeutung von $O^i(\varepsilon^3)$ befindet sich in [12], S. 148.

[7]) Diese Gleichung ist mit der Gleichung (2, 30) von [12] analog.

Beweis. Wir haben schon gezeigt, daß in den affin-skalaren Räumen vom Typ (4. 2b) die Relation (5. 12) gültig ist. Nehmen wir jetzt an, daß (5. 12) besteht, wir müssen zeigen, daß $K_{j\ k}^{*i}$ die Form (4. 2b) hat. Nach einer Kontraktion von (5. 12) mit l^j wird:

$$K^{*i}_{\ k} \equiv K_{j\ k}^{*i} l^j = F^2(l^i A_k - \delta^i_k A_o + B_{ok} l^i).$$

Nach der Bezeichnung

$$\gamma_{ok} \overset{\text{def}}{=} -A_k - B_{ok}$$

wird $K^{*i}_{\ k}$ die Form (4. 2b) haben, da B_{oo} wegen der schiefen Symmetrie von B_{ij} verschwindet, und somit $\gamma_{oo} = -A_o$ ist. Das beweist unsere Behauptung.

Der Typ (5. 12) charakterisiert auch die affin-skalaren Räume von dritter Art, wenn noch die Relation

$$A_k + B_{ok} = -K^* l_k$$

gültig ist. Das kann nach einer Kontraktion von (5. 12) mit l^j im Hinblick auf (4. 3) unmittelbar verifiziert werden.

Sind die Übertragungsparameter $L_{i\ k}^{*j}$ in i, k nicht symmetrisch, so bilden die Punkte:

$$P(x),\ Q(x+dx),\ R(x+\delta x),\ S(x+dx+\delta x+\delta dx),\ T(x+\delta x+dx+d\delta x)$$

ein infinitesimales Fünfeck. Da

$$\Delta x^i \overset{\text{def}}{=} (\delta d - d\delta)x^i = -\Omega_{k\ l}^{*i}[dx^k dx^l] \tag{5. 13}$$

besteht, falls dx^i parallel längs des infinitesimalen Fünfecks umgeführt wird, bekommt man auf Grund von (5. 1), (0. 10) und (1. 15) nach einer Parallelübertragung von l^i um das infinitesimales Fünfeck ebenso wie z. B. im Riemannschen Raum (vgl. [14], Chap. IV. § 8):

$$(\delta d - d\delta) l^i = -\tfrac{1}{2} R_{o\ jk}^{*i}[dx^j dx^k] + L_{o\ t}^{*i} \Delta x^t.$$

Ist also der $\mathfrak{A}_n$-Raum ein Raum von skalarer Krümmung, so kommt nach unserer letzten Formel zu den infinitesimalen Vektoren von den Sätzen 3 und 4 noch der durch (5. 13) *definierte Vektor Δx^i hinzu.*

§ 6. Relationen für den Krümmungsskalar. Der Schursche Satz

In den Räumen von skalarer Krümmung muß die kovariante Ableitung des Krümmungsskalars immer gewisse Relationen befriedigen, die aus den Bianchischen Identitäten d. h. in unserem Falle von den Gleichungen (1.23) und (2. 8) entstehen. Ist der Krümmungsskalar allein vom Orte x^i abhängig, so bekommt man aus diesen Identitäten im Finslerschen Fall den Schurschen

Satz, nach dem *der Krümmungsskalar eine Konstante ist, falls sie von den* x^i *unabhängig und die Dimension* $n>2$ *ist.* (Vgl. [1] § 16.)

In unseren $\mathfrak{A}_n$-Räumen von skalarer Krümmung und in unseren affinskalaren Räumen ist zwar der Schursche Satz nicht gültig, wir wollen aber kurz zeigen, wie die charakteristische Relation für den Krümmungsskalar ableitbar ist.

Im Falle der $\mathfrak{A}_n$-Räume von skalarer Krümmung müssen wir in die Gleichung (1.23) die entsprechende Form von $R^{*i}_{o\;kl}$ von den Gleichungen (3.1)—(3.3) einsetzen, dann mit l^k eine Kontraktion und auf i, l eine Verjüngung durchführen. Wir bekommen auf diese Weise für den Krümmungsskalar R^* eine Gleichung von der Form:

$$\overset{*}{\nabla}_j R \varphi^j_k + \overset{*}{\nabla}_j R^* \|_r \chi^{rj}_{\;\;k} + R^* \psi_k = 0 \tag{6.1}$$

wo φ^j_k, $\chi^{rj}_{\;\;k}$ und ψ_k durch $A_i{}^j{}_k$ und g_{ij} bestimmt sind.

Aus dieser Formel folgt leicht der folgende

Satz 8. *Ist* $\psi_k \equiv 0$ *und* $\det(\varphi^j_k) \neq 0$, *so folgt aus der Unabhängigkeit des Krümmungsskalars* R^* *von* v^i, *daß* $R^* =$ konst. *ist. Bestehen die Relationen*

$$\varphi^j_k = \delta^j_k - l^j l_k, \quad \psi_k = 0, \tag{6.2}$$

so ist die Behauptung bezüglich R^* *wieder gültig.*

Beweis. Aus $\psi_k = 0$ und $R^*\|_k = 0$ folgt nach (6.1):

$$\varphi^j_k \partial_j R^* = 0, \tag{6.3}$$

da für einen Skalar: $\overset{*}{\nabla}_j = \partial_j$ ist, falls der Skalar von den v^i unabhängig ist. Aus der Annahme: $\det(\varphi^j_k) \neq 0$ folgt somit nach (6.3): $\partial_j R^* = 0$, und mit $R^*\|_k = 0$ zusammen beweist das die erste Hälfte des Satzes 8.

Die zweite Hälfte kann ebenso bewiesen werden, wie im Finslerschen Fall (vgl. [1] (16.7) und die nachfolgenden Zeilen). Nach (6.2) und nach der Bedingung $R^*\|_j = 0$ wird aus (6.1):

$$\partial_j R^* (\delta^j_k - l^j l_k) = 0, \tag{6.4}$$

woraus nach der Operation: $\|_m g^{km}$ die Relation $\partial_o R^* = 0$ folgt und das beweist nach (6.4) die zweite Behauptung des Satzes 8.

Für die affin-skalaren Räume bekommen wir aus (2.8) und aus den entsprechenden Formeln (4.1)—(4.3) in ähnlicher Weise eine zur (6.1) analoge Relation für den Krümmungsskalar K^*. *Der Satz 8 wird dann auch für die affin-skalaren Räume gültig sein.*

§ 7. Grundzüge der Theorie der Hyperflächen. Theorie von Davies und Wegener

Eine Hyperfläche

$$\mathfrak{H}_{n-1}:\quad x^i = x^i(u^1, u^2, \ldots, u^{n-1})$$

kann in einem metrischen Linienelementraum in zwei Besichtspunkten behandelt werden. Erstens kann man $\mathfrak{H}_{n-1}$ als eine Mannigfaltigkeit der tangenten Linienelemente, zweitens als die Transversalfläche einer durch die Punkte von $\mathfrak{H}_{n-1}$ hindurchgehenden Schar von autoparallelen Linien betrachten. Für die Finslerräume hat die erste Auffassung E. T. DAVIES in seiner Arbeit [3], die zweite J. M. WEGENER in der Arbeit [15] ausführlich behandelt. Wir werden im folgenden die Bezeichnungen von E. T. DAVIES benützen mit dem Unterschied daß wir die Raumkomponenten der Tensoren durch lateinische, die Flächenkomponenten aber durch griechische Indizes bezeichnen werden. Dementsprechend bedeuten

$$B^i_\alpha \overset{\text{def}}{=} \partial_\alpha x^i, \quad \partial_\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-1)$$

die Tangentenvektoren[8]) und C^i den Einheitsnormalenvektor der Hyperfläche $\mathfrak{H}_{n-1}$.

Die Grundgrößen g_{ij} und $A^{\;j}_{i\;k}$ induzieren eine Flächenübertragung der Vektoren auf $\mathfrak{H}_{n-1}$, wir benötigen aber nur das induzierte invariante Differential des normierten Linienelementes l^α. Das invariante Differential eines Flächenvektors ξ^α könnte ebenso, wie im Finslerraum bestimmt werden (vgl. [3] und [5]).

Betrachten wir erstens die Hyperfläche $\mathfrak{H}_{n-1}$ als die Mannigfaltigkeit der tangenten Linienelemente, dann ist:

$$\mathfrak{H}_{n-1}:\quad x^i = x^i(u), \quad v^i = B^i_\alpha \dot{u}^\alpha,$$

wenn $(u^\varrho, \dot{u}^\varrho)$ die Linienelemente der Hyperfläche $\mathfrak{H}_{n-1}$ bedeuten. Die zum Linienelement $(u^\alpha, \dot{u}^\alpha)$ gehörige Einheitsnormale C^i ist jetzt aus den Gleichungen

$$g_{ij}(x^k(u), B^k_\alpha \dot{u}^\alpha) B^i_\varrho C^j = 0, \qquad (\varrho = 1, \ldots, n-1)$$

zu bestimmen. Nach der Formel (0. 10) bekommt man auf Grund der Identität (vgl. [3], Gleichungen (12) (e), (f), (g), oder [13] § 2, insbesondere Gleichung (2. 8))

$$B^i_\gamma B^\gamma_r + C^i C_r = \delta^i_r$$

die Relation:

$$(7.\,1)\qquad \overset{*}{\omega}{}^i(d) = B^i_\gamma dl^\gamma + (B^i_\gamma B^\gamma_r + C^i C_r)(B^r_{\alpha\beta} + \overset{*}{L}{}^{\,r}_{j\;k} B^j_\alpha B^k_\beta) l^\alpha du^\beta,$$

---

[8]) Im folgenden werden die griechischen Indizes immer die Zahlen $1, \ldots, n-1$ durchlaufen, während die lateinischen Indizes, wie vorher, die Zahlen $1, \ldots, n$ bedeuten.

wo

$$B^{\gamma}_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \partial^2_{\alpha\beta} x^{\gamma}, \quad \partial^2_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}$$

bedeutet. Nach den Bezeichnungen

$$\text{(7. 2)} \qquad \overset{*}{\omega}{}^{\gamma}(d) \stackrel{\text{def}}{=} dl^{\gamma} + B^{\gamma}_{r}(B^{r}_{\alpha\beta} + L^{*r}_{j\ k} B^{j}_{\alpha} B^{k}_{\beta}) l^{\alpha} du^{\beta}$$

$$\text{(7. 3)} \qquad b_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} C_r(B^{r}_{\alpha\beta} + L^{*r}_{j\ k} B^{j}_{\alpha} B^{k}_{\beta})\ ^{9)}$$

wird aus (7. 1)

$$\text{(7. 4)} \qquad \omega^{*i}(d) = B^{i}_{\gamma} \overset{*}{\omega}{}^{\gamma}(d) + C^i b_{o\beta} du^{\beta}.$$

(7. 4) stimmt formal mit der Formel (2. 15) von [5] überein, die benützten Übertragungsparameter sind aber von den unsrigen selbstverständlich verschieden, da KIKUCHI in seiner Arbeit [5] nur den Finslerschen Fall behandelt hat.

Wir wollen nun in den Punkten einer Hyperfläche $\mathfrak{H}^*_{n-1}$ diejenigen Linienelemente auszeichnen, die auf $\mathfrak{H}^*_{n-1}$ normal stehen. Wenn wir zu diesen Linienelementen als Anfangselemente die autoparallelen Kurven konstruieren, so bekommen wir $\mathfrak{H}^*_{n-1}$ als die Transversalfläche einer Schar von autoparallelen Kurven. Dieser Wegenerschen Auffassung entsprechend, wollen wir auch in diesem Falle das induzierte invariante Differential $\overset{*}{\omega}{}^{\alpha}$ von l^{α} bestimmen. Die Hyperflächen in dieser Auffassung werden wir immer durch einen Stern kennzeichnen.

Es ist jetzt $C^i = l^i$. Wir wollen die Zerlegung des Vektors $\overset{*}{\omega}{}^{i}$ nach dem n-Bein B^{i}_{ϱ}, l^i bestimmen. Diese Zerlegung hat die Form:

$$\text{(7. 5)} \qquad \overset{*}{\omega}{}^{i}(d) = -\pi^{\varrho} B^{i}_{\varrho} + \pi l^i$$

(vgl. [14] Gleichung (10)), wo π^{ϱ} und π die Formen

$$\text{(7. 6a)} \qquad \pi^{\varrho} \stackrel{\text{def}}{=} c^{\varrho}{}_{\sigma} du^{\sigma} \qquad\qquad \text{(7. 6b)} \qquad \pi \stackrel{\text{def}}{=} c_{\sigma} du^{\sigma}$$

bedeuten. Da nach der Wegenerschen Auffassung B^{i}_{ϱ} und l^i zueinander orthogonal sind, bekommt man aus der Gleichung (7. 5) nach einer Kontraktion mit l_i auf Grund der Identität (1. 8)

$$\pi = A_{oot} dx^t = A_{oot} B^{t}_{\sigma} du^{\sigma},$$

d. h. nach (7. 6b):

$$c_{\varrho} = A_{oot} B^{t}_{\varrho}.$$

---

9) Unsere $b_{\alpha\beta}$ ist nicht direkt die zweite Grundform der Fläche (vgl. z. B. [9] (2. 9)). Doch sind schon $b_{o\beta}$ mit den entsprechenden Größen identisch, da die Abweichung unserer $b_{\alpha\beta}$ von der zweiten Grundform von $M^{*\beta}_{\alpha\ \gamma}$ abhängig ist, und $M^{*\beta}_{o\ \gamma} = 0$ besteht.

Für die Berechnung der expliziten Formel der $c^{\varrho}{}_{\sigma}$ beachten wir, daß wegen $l_j B^j_\varrho = 0$ die Relation

$$-B^j_\varrho \overset{*}{D} l_j = l_j \overset{*}{D} B^j_\varrho$$

besteht. Aus (7. 5) bekommt man somit nach einer Kontraktion mit B^σ_i:

$$\pi_\varrho \overset{\text{def}}{=} a_{\varrho\tau}\pi^\tau = -B^j_\varrho g_{ij} \overset{*}{D} l^i = l_j \overset{*}{D} B^j_\varrho + l^i(\overset{*}{D} g_{ij}) B^j_\varrho \tag{7.8}$$

wo

$$B^\varrho_i \overset{\text{def}}{=} a^{\varrho\beta} g_{ij} B^j_\beta, \qquad a_{\varrho\beta} \overset{\text{def}}{=} g_{ij} B^i_\varrho B^j_\beta$$

bedeuten und die $a^{\varrho\beta}$ die kontravarianten Komponenten des metrischen Grundtensors $a_{\alpha\beta}$ von $\mathfrak{H}^*_{n-1}$ sind. Der Unterschied vom Finslerschen Falle besteht darin, daß in den $\mathfrak{A}_n$-Räumen im allgemeinen $\overset{*}{D} g_{ij} \neq 0$ ist. Nach (1. 1), (1. 4) und (1. 5) ist

$$\overset{*}{D} g_{ij} = -2(A_{ijt} \Lambda_0{}^t{}_k + \Lambda_{(ij)k}) dx^k - 2\mu_{(ij)k} \overset{*}{\omega}{}^k(d).$$

Mit Hilfe dieser Formel bekommen wir von den Formeln (7. 8) und (7. 6a) im Hinblick auf (0. 7a):

$$c_{\varrho\sigma} = a_{\varrho\tau} c^\tau{}_\varrho = l_j(\partial^2_{\varrho\sigma} x^j + L^{*}_i{}^j{}_k B^i_\varrho B^k_\sigma) - 2\Lambda_{(0j)k} B^j_\varrho B^k_\sigma. \tag{7.9}$$

Im folgenden benötigen wir noch die Zerlegung von $\overset{*}{D} B^i_\varrho$ nach dem n-Bein B^i_ϱ, l^i. Der Vektor $\overset{*}{D} B^i_\varrho$ hat die Form:

$$\overset{*}{D} B^i_\varrho = \pi^\tau{}_\varrho B^i_\tau + \varphi_\varrho l^i. \tag{7.10}$$

Nach einer Kontraktion mit l_i bekommt man für φ_ϱ:

$$\varphi_\varrho = l_j \overset{*}{D} B^j_\varrho = l_j(\partial^2_{\varrho\sigma} x^j + L^{*}_i{}^j{}_k B^i_\varrho B^k_\sigma) du^\sigma \tag{7.11}$$

und nach einer Kontraktion der Gleichung (7. 10) mit B^σ_i wird im Hinblick auf (7. 5) und (7. 6a):

$$\pi^\sigma{}_\varrho \overset{\text{def}}{=} B^\sigma_i \overset{*}{D} B^i_\varrho = \gamma_\varrho{}^\sigma{}_\iota du^\iota \tag{7.12}$$

mit

$$\gamma_\varrho{}^\sigma{}_\iota \overset{\text{def}}{=} B^\sigma_i(\partial^2_{\varrho\iota} x^i + L^{*}_j{}^i{}_k B^j_\varrho B^k_\iota) - M^{*}_\varrho{}^\sigma{}_\varkappa c^\varkappa{}_\iota, \tag{7.12a}$$

wo $M^{*}_\varrho{}^\sigma{}_\varkappa$ selbstverständlich die Projektion des Tensors $M^{*}_i{}^j{}_k$ auf $\mathfrak{H}^*_{n-1}$ ist.

Jetzt werden wir die Hyperfläche $\mathfrak{H}^*_{n-1}$ durch zwei Differentialgleichungssysteme charakterisieren. Ein Vergleich der Formeln (7. 11) und (7. 9) gibt:

$$\varphi_\varrho = (c_{\varrho\sigma} + 2\Lambda_{(0j)k} B^j_\varrho B^k_\sigma) du^\sigma. \tag{7.13}$$

Beachten wir jetzt, daß l^i von den $u^1, \ldots, u^{n-1}$ abhängig ist, so bekommt man die beiden charakteristischen Differentialgleichungssysteme der Hyperflächen durch Gleichsetzen der Koeffizienten von du^α von (7.5), (7.6a) und (7.6b) einerseits, und von (7.10), (7.12) und (7.13) anderseits. Es wird:

$$\partial_\sigma l^i + \overset{*}{L}{}^i_{0\,k} B^k_\sigma = -c^\varrho{}_\sigma B^i_\varrho + c_\sigma l^i, \tag{7.14}$$

$$\partial^2_{\varrho\sigma} x^i + \overset{*}{L}{}^i_{j\cdot k} B^j_\varrho B^k_\sigma = (\gamma_\varrho{}^\iota{}_\sigma + \overset{*}{M}_\varrho{}^\iota{}_\varkappa c^\varkappa{}_\sigma) B^i_\iota + l^i (c_{\varrho\sigma} + 2 A_{(0j)k} B^j_\varrho B^k_\sigma). \tag{7.15}$$

Diese beiden Formeln entsprechen den Gleichungen (13) von [15].

Mit der Bestimmung der charakteristischen Gleichungen (7.14) und (7.15) haben wir die Grundgleichungen der Hyperflächen auch in der Wegenerschen Auffassung festgelegt. Diesen zwei Auffassungen entsprechend können in den $\mathfrak{A}_n$-Räumen zwei verschiedene Type der autoparallelen Hyperflächen — die im Finslerschen Fall eben die Hyperebenen sind — bestimmt werden. Für die autoparallelen Hyperflächen geben wir die folgende

Definition 5. *Ist eine Hyperfläche $\mathfrak{H}_{n-1}$ die Mannigfaltigkeit der tangenten-Linienelemente (Daviessche Auffassung) und sind die autoparallelen Linien von $\mathfrak{H}_{n-1}$ auch im Sinne der Übertragung des $\mathfrak{A}_n$-Raumes autoparallel, so ist $\mathfrak{H}_{n-1}$ eine autoparallele Hyperfläche A_{n-1} erster Art.*

Ist die Hyperfläche $\overset{*}{\mathfrak{H}}_{n-1}$ die Mannigfaltigkeit der normalen Linienelemente (Wegenersche Auffassung), und sind diese Linienelemente entlang der Hyperfläche parallel, so ist $\overset{*}{\mathfrak{H}}_{n-1}$ eine autoparallele Hyperfläche $\overset{*}{A}_{n-1}$ zweiter Art.

Wir geben jetzt die analytische Kennzeichnung der autoparallelen Hyperflächen erster und zweiter Art. Die autoparallelen Linien einer Hyperfläche $\mathfrak{H}_{n-1}$ sind durch die Differentialgleichungen

$$\overset{*}{\omega}{}^\alpha(d) = 0, \qquad l^\alpha = \frac{1}{F}\,\frac{du^\alpha}{dt} \tag{7.16}$$

bestimmt. Im Falle einer autoparallelen Hyperfläche A_{n-1} folgt aber aus $\overset{*}{\omega}{}^\alpha = 0$ die Relation $\overset{*}{\omega}{}^i = 0$, da die autoparallelen Linien von A_{n-1} auch in Bezug auf die Übertragung des $\mathfrak{A}_n$-Raumes autoparallel sind. Nach der Gleichung (7.4) wird aber dann

$$b_{00} = 0 \tag{7.17}$$

bestehen, wo $b_{\alpha\beta}$ durch (7.3) bestimmt ist. Umgekehrt, es folgt aus (7.17) nach (7.16) auf Grund der Gleichung (7.4) die Relation $\overset{*}{\omega}{}^i = 0$. Wir können also behaupten:

Die Gleichung (7.17) *ist die charakteristische Relation der autoparallelen Hyperflächen A_{n-1} erster Art.*

Für eine autoparallele Hyperfläche zweiter Art ist $\overset{*}{\omega}{}^i = 0$, falls die Kurve $x^i = x^i(t)$ auf der Hyperfläche $\overset{*}{A}_{n-1}$ liegt, d. h. $x^i = x^i(u^\alpha(t))$ besteht. Es wird nach (0. 10)

$$\partial_\sigma l^i + L^{*i}_{o\ k} B^k_\sigma = 0. \tag{7. 18}$$

Nach (7. 14) bekommt man aber auf Grund dieser Gleichung $c^\varrho_{\ \sigma} = 0$ und $c_\sigma = 0$ und somit wird aus (7. 15)

$$\partial^2_{\varrho\sigma} x^i + L^{*\,i}_{j\ k} B^j_\varrho B^k_\sigma = \gamma_\varrho{}^\tau{}_\sigma B^i_\tau + 2 l^i A_{(oj)k} B^j_\varrho B^k_\sigma. \tag{7. 19}$$

Wir können somit wieder behaupten:

Die Differentialgleichungen (7. 18) *und* (7. 19) *charakterisieren die autoparallelen Hyperflächen* A^*_{n-1} *zweiter Art.*

Wir bemerken noch, daß für die A^*_{n-1}-Räume wegen $c_\sigma = 0$ immer

$$A_{ook} B^k_\sigma = 0 \tag{7. 20}$$

gültig ist, was wir im folgenden noch benützen werden. Wir verweisen noch darauf, daß aus der Definition 5 noch nicht gefolgert werden kann, daß A_{n-1}- bzw. A^*_{n-1}-Flächen in jedem Raume existieren. Wir werden sehen, daß die Existenz dieser Fläche die Form der Krümmungstensoren bestimmt.

Im Finslerraum $\mathfrak{F}_n$ charakterisierte J. M. Wegener die Hyperebenen auch durch die Eigenschaft, daß die Hyperebenen jeden in ihr gelegenen Vektor bei Parallelverschiebung dauernd enthalten (vgl. [15] § 3). Für die A^*_{n-1}-Flächen ist diese Eigenschaft nur dann gültig, falls die Übertragung metrisch, d. h. $\overset{*}{D} g_{ik} = 0$ ist. In diesem Falle ist nämlich für einen Vektor ξ^i

$$g_{ik} \xi^i \overset{*}{\omega}{}^k + g_{ik} l^i \overset{*}{D} \xi^k = 0, \tag{7. 21}$$

wenn für ξ^i

$$g_{ik} l^i \xi^k = 0$$

besteht. Ist nun

$$g_{ik} l^i \overset{*}{D} \xi^k = 0,$$

d. h.: erfolgt die Änderung des Vektors in der Tangentenrichtung von A^*_{n-1}, so bekommt man aus (7. 21) die Relation:

$$g_{ik} \xi^i \overset{*}{\omega}{}^k (d) = 0. \tag{7. 22}$$

Da im Falle einer metrischen Übertragung $l_k \overset{*}{\omega}{}^k = 0$, folgt aus (7. 22) $\overset{*}{\omega}{}^k = 0$, da ξ^i einen beliebigen Vektor von A^*_{n-1} bedeuten kann.

§ 8. Charakterisierung der Räume von skalarer Krümmung mit Hilfe der autoparallelen Hyperflächen

Bekanntlich können die Riemannschen Räume von skalarer Krümmung auch dadurch charakterisiert werden, daß in diesen Räumen in jedem Punkte eine Hyperebene gelegt werden kann, deren Normalenvektor eine vorgegebene

Richtung hat. Diese Eigenschaft kann auch in den Erweiterungen der Riemannschen Räume von skalarer Krümmung übertragen werden, nur muß man statt der Hyperebenen die autoparallelen Hyperflächen in Betracht ziehen. In unserem Aufsatz [8] haben wir die Räume von skalarer Krümmung vierter Gattung eben durch diese Eigenschaft charakterisiert (vgl. [8] letzte Definition im Paragraphen 2). Auch in den Finslerraumen ist das gültig, d. h. der $\mathfrak{F}_n$-Raum ist ein Raum von skalarer Krümmung, falls zu jedem Linienelement (x^i, v^i) eine Hyperebene gelegt werden kann (vgl. der Hauptsatz I von [9], S. 12), wo v^i die Richtung des Normalenvektors ist.

Durch die Existenz der autoparallelen Hyperflächen bekommen wir einen neuen Typ der Räume von skalarer Krümmung. Wir definieren diese Räume durch die folgende

D e f i n i t i o n 6. *Der $\mathfrak{A}_n$-Raum ist ein Raum von skalarer Krümmung vierter Art, falls in jedem Punkte eine autoparallele Hyperfläche erster Art A_{n-1} existiert, deren Normalenvektor C_i eine beliebig vorgegebene Richtung hat.*

Da für eine A_{n-1}-Fläche (7. 17) immer gültig ist, muß in einem $\mathfrak{A}_n$-Raum von skalarer Krümmung vierter Art die Gleichung (7. 17) vollständig integrabel sein. Auf Grund der Definitionsformel (7. 3) bekommt man aus (7. 17):

$$C_r(B^r_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta + L^{*r}_{o\ o}) = 0.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit C^i, beachten wir dann die Relation

$$C^i C_r = \delta^i_r - B^i_\gamma B^\gamma_r$$

so bekommen wir:

$$B^i_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta - 2B^i_\alpha G^{*\alpha}(u, \dot{u}) + 2G^{*i}(x, v) = 0, \tag{8. 1}$$

wo G^{*i} durch (2. 3) und $G^{*\alpha}$ durch die Formeln

$$G^{*\alpha} \overset{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2} B^\alpha_r (B^r_{\beta\gamma} \dot{u}^\beta \dot{u}^\gamma + L^{*r}_{i\ j}(x, v) v^i v^j)$$

bestimmt sind und $v^i = B^i_\varrho \dot{u}^\varrho$ gültig ist. Nach zweimaliger Ableitung nach $\dot{u}^\varrho$ folgt aus (8. 1)

$$B^i_{\varrho\sigma} - B^i_\alpha G^{*\alpha}_{\varrho\ \sigma}(u, \dot{u}) + G^{*i}_{j\ k} B^j_\varrho B^k_\sigma = 0, \tag{8. 2}$$

wo

$$G^{*\alpha}_{\varrho\ \sigma} \overset{\text{def}}{=} \partial^2_{\dot{u}^\varrho \dot{u}^\sigma} G^{*\alpha}, \qquad \partial^2_{\dot{u}^\varrho \dot{u}^\sigma} = \frac{\partial^2}{\partial \dot{u}^\varrho \partial \dot{u}^\sigma}$$

bedeutet.

Die Integrabilitätsbedingungen von (8. 2) bekommt man ebenso, wie im Finslerraum durch partielle Ableitungen von (8. 1) und darauffolgende Vertauschung der Indizes (vgl. z. B. [9] Formeln (3. 7), oder [5], Formeln (5. 6)):

$$B^j_\varrho B^k_\sigma B^l_\tau G^{*i}_{j\ kl}(x, v) = B^i_\alpha G^{*\alpha}_{\varrho\ \sigma\tau}(u, \dot u), \qquad v^i = B^i_\beta \dot u^\beta, \tag{8. 3a}$$

$$C_i B^j_\varrho B^k_\sigma B^l_\tau G^{*i}_{j\ kl}(x, v) = 0, \tag{8. 3b}$$

$$B^j_\varrho B^k_\sigma B^l_\tau K^{*i}_{j\ kl}(x, v) = B^i_\alpha K^{*\alpha}_{\varrho\ \sigma\tau}(u, \dot u), \qquad v^i = B^i_\beta \dot u^\beta, \tag{8. 3c}$$

$$C_i B^j_\varrho B^k_\sigma B^l_\tau K^{*i}_{j\ kl}(x, v) = 0, \tag{8. 3d}$$

wo

$$G^{*\alpha}_{\varrho\ \sigma\tau} \overset{\text{def}}{=} \partial_{\dot u^\tau} G^{*\alpha}_{\varrho\ \sigma}, \qquad G^{*i}_{j\ kl} \overset{\text{def}}{=} \partial_{v^l} G^{*i}_{j\ k}$$

bedeuten und $K^{*i}_{j\ kl}$ durch (2. 6) angegeben ist; $K^{*\alpha}_{\varrho\ \sigma\tau}$ ist der aus $G^{*\alpha}$ gebildete entsprechende Berwaldsche Krümmungstensor. Die Gleichungen (8. 3b) bzw. (8. 3d) bestimmen je eine Forderung für die Raumtensoren $G^{*i}_{j\ kl}$ bzw. $K^{*i}_{j\ kl}$.

Es ist der folgende Satz gültig:

Satz 9. *Notwendig und hinreichend dafür, daß der Raum ein $\mathfrak{A}_n$-Raum von skalarer Krümmung vierter Art sei, ist das Bestehen der Relationen* (8. 3) *für jedes n-Bein C^i, B^i_ϱ, in dem C^i auf dem Vektor l^i immer senkrecht steht.*

Beweis. Da in einem $\mathfrak{A}_n$-Raum von skalarer Krümmung vierter Art die charakteristischen Gleichungen (7. 17) der autoparallelen Hyperflächen, bzw. die mit (7. 17) gleichwertigen Gleichungen (8. 2) vollständig integrierbar sein müssen, sind die Gleichungen (8. 3) notwendig.

Nehmen wir jetzt an, daß die Relationen (8. 3) bestehen. Die Gleichungen (8. 2) sind dann vollständig integrierbar. Nehmen wir noch zu (8. 2) die Differentialgleichungen

$$\partial_\varrho x^i = B^i_\varrho$$

hinzu, so ist auch dieses erweiterte System vollständig integrierbar, da nach (8. 2)

$$\partial^2_{[\varrho\sigma]} x^i = 0$$

bestehen wird. Es existiert somit eine Hyperfläche

$$\mathfrak{H}_{n-1}: \quad x^i = x^i(u^1, u^2, \ldots, u^{n-1}), \qquad v^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\varrho} \dot u^\varrho, \tag{8. 4}$$

die im Punkte $\overset{(0)}{x^i}$ die beliebig vorgegebenen Tangentenvektoren $\overset{(0)}{B^i_\varrho}$ hat. Das beweist eben den Satz 9, da diese Hyperfläche dann notwendig eine A_{n-1}-Fläche ist.

Bezüglich der Form des Tensors $G^{*i}_{j\ kl}$ können ähnliche Untersuchungen durchgeführt werden, wie im Finslerschen Fall (vgl. [9], § 3). Der Krümmungstensor $K^{*i}_{o\ kl}$ wird aber eine andere Form haben, da die speziellen Eigenschaften dieses Tensors anders sind, wie im Finslerraum $\mathfrak{F}_n$.

Nach einer Kontraktion von (8. 3d) mit l^ϱ und mit l^σ wird:

(8. 5) $$K_{o\ ok}^{*i} C_i B_\tau^k = 0$$

Nach einem Lemma von A. RAPCSÁK (vgl. [9] Formel (3. 8), Seite 9) hat dann $K_{o\ ok}^{*i}$ die Form

(8. 6) $$K_{o\ ok}^{*i} = A_k l^i + \delta_k^i B,$$

wo A_k einen kovarianten Vektor, bzw. B einen Skalar bedeutet. Eine Überschiebung von (8. 6) mit l^k gibt wegen $K_{o\ oo}^{*i} = 0$

(8. 7) $$B = -A_o.$$

Führen wir jetzt die Bezeichnung

(8. 8) $$\gamma_{ok} \stackrel{\text{def}}{=} -A_k, \quad \text{bzw.} \quad \gamma_{ik} \stackrel{\text{def}}{=} -l_i A_k$$

ein, so wird nach (8. 7)

$$\gamma_{oo} = -A_o = B$$

bestehen, und (8. 6) geht in der Form (4. 2b) über.

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

S a t z 10. *Ein $\mathfrak{A}_n$-Raum von skalarer Krümmung vierter Art ist immer ein affin-skalarer Raum vom Typ* (4. 2b).

Jetzt wollen wir diejenigen $\mathfrak{A}_n$-Räume betrachten, in denen autoparallele Hyperflächen zweiter Art (vgl. die Definition 5) existieren. Wir geben die folgende

D e f i n i t i o n 7. *Ein $\mathfrak{A}_n$-Raum ist von skalarer Krümmung fünfter Art, wenn in jedem Punkte P_0 eine autoparallele Hyperfläche A_{n-1}^* zweiter Art existiert, und die Normale von A_{n-1}^* in P_0 eine beliebig vorgegebene Richtung hat.*

Die autoparallelen Hyperflächen zweiter Art sind durch (7. 18) und (7. 19) charakterisiert. In einem $\mathfrak{A}_n$-Raum von skalarer Krümmung fünfter Art sind diese Differentialgleichungssysteme vollständig integrierbar, und die Integrabilitätsbedingungen von (7. 18) bestimmen die Form des Krümmungstensors $R_{o\ jk}^{*i}$.

Diese Integrabilitätsbedingungen können im Hinblick auf (7. 20) in der Form

(8. 9) $$R_{o\ kl}^{*i} B_\varrho^k B_\sigma^l = 0,$$

bestimmt werden. Da

$$\delta_m^i = B_\varkappa^i B_m^\varkappa + l^i l_m$$

besteht, folgt aus (8. 9) die Relation

(8. 10) $$R_{o\ \varrho\sigma}^{*\tau} B_\tau^i + R_{o\ \varrho\sigma}^{*o} l^i = 0$$

wo

$$R_{o\ \varrho\sigma}^{*\varkappa} \overset{\text{def}}{=} R_{o\ kl}^{*i} B_i^{\varkappa} B_\varrho^k B_\sigma^l, \qquad R_{o\ \varrho\sigma}^{*o} \overset{\text{def}}{=} R_{o\ kl}^{*o} B_\varrho^k B_\sigma^l$$

bedeuten. Eine Kontraktion von (8. 10) mit l_i bzw. mit $B_i^{\varkappa}$ gibt

$$R_{o\ \varrho\sigma}^{*o} = 0, \qquad R_{o\ \varrho\sigma}^{*\varkappa} = 0. \tag{8. 11}$$

Aus (8. 9) und (8. 11) wollen wir nun die Form von $R_{o\ kl}^{*i}$ bestimmen. Die Beindarstellung von $R_{o\ ij}^{*o}$ nach dem n-Bein B_ϱ^i, l^i (bezüglich der Methode vgl. [15], § 1) ist

$$R_{o\ ij}^{*o} = R_{o\ o\varrho}^{*o}(B_j^\varrho l_i - B_i^\varrho l_j). \tag{8. 12}$$

B e m e r k u n g. Unsere nachfolgende Methode ist im Wesentlichen mit der von A. Rapcsák benützten Methode (vgl. [10] § 3) identisch, nur müssen wir auch $R_{o\ oj}^{*o}$ bestimmen, da dieser Tensor im $\mathfrak{A}_n$-Raum im allgemeinen nicht verschwindet.

Eine Kontraktion mit l^i von (8. 12) gibt

$$R_{o\ oj}^{*o} = R_{o\ o\varrho}^{*o} B_j^\varrho. \tag{8. 13}$$

In ähnlicher Weise bekommt man für $R_{o\ jk}^{*i}$ unter Beachtung von (8. 11) und der schiefen Symmetrie von $R_{o\ jk}^{*i}$ in j, k:

$$R_{o\ jk}^{*i} = 2 R_{o\ o\sigma}^{*\varrho} B_\varrho^i B_{[k}^\sigma l_{j]} + 2 l^i R_{o\ o\varrho}^{*o} B_{[k}^\varrho l_{j]}. \tag{8. 14}$$

Eine Kontraktion mit l^j gibt auf Grund von (8. 13):

$$R_{o\ o\sigma}^{*\varrho} B_\varrho^i B_k^\sigma = R_{o\ ok}^{*i} - R_{o\ ok}^{*o} l^i.$$

Setzen wir diese Werte in (8. 14), so wird wegen (8. 13):

$$R_{o\ jk}^{*i} = 2 R_{o\ o[k}^{*i} l_{j]}. \tag{8. 15}$$

In den $\mathfrak{A}_n$-Räumen von skalarer Krümmung fünfter Art ist der folgende Satz gültig:

S a t z 11. *Die Relation* (8. 15) *charakterisiert die $\mathfrak{A}_n$-Räume von skalarer Krümmung fünfter Art.*

B e m e r k u n g. Es kann leicht verifiziert werden, daß die Type (3. 2a) und (3. 3) für $R^* = konst.$ die charakteristische Gleichung (8. 15) befriedigen.

B e w e i s d e s S a t z e s 11. Die Notwendigkeit von (8.15) folgt daraus, daß (8. 15) die Integrabilitätsbedingungen von (7. 18) sind. Aus (7. 18) und (7. 14) folgt schon $c^\varrho{}_\sigma = 0$, $c_\varrho = 0$, die für die Hyperebenen zweiter Art charakteristisch sind. Die Integrabilitätsbedingungen von (7. 19) bestimmen keine weitere Bedingungen für den $\mathfrak{A}_n$-Raum. Das bedeutet, daß die Bedingung (8. 15) hinreichend ist, da aus (7. 18) und (0. 10) längs der Hyperfläche immer $\overset{*}{\omega}{}^i(d)=0$ folgt (vgl. [15] § 3).

§ 9. Zusammenhang mit anderen Untersuchungen

Wir wollen zunächst den Zusammenhang unserer $\mathfrak{A}_n$- und $\mathfrak{B}_n$-Räume von skalarer Krümmung mit den entsprechenden Punkträumen untersuchen. Nehmen wir an, daß

$$(9.1)\qquad \Lambda_i{}^j{}_k(x,v)\overset{\text{def}}{=}L_i{}^j{}_k(x)-\Gamma_i^{*j}{}_k(x,v),\qquad M_j^{*i}{}_k=0$$

ist, d. h. $L_i{}^j{}_k$ soll von den v^i unabhängig sein. Der $\mathfrak{A}_n$-Raum ist bezüglich der Übertragung nach der Formel (1. 1) ein Punktraum. Nehmen wir noch an, daß auch der durch (0. 1) definierte metrische Grundtensor von den v^i unabhängig ist, so bekommen wir die in unserem Aufsatz [8] behandelten affinen Erweiterungen des Riemmannschen Raumes.

Bestimmen wir nun aus den Formeln (0. 8) und (9. 1) die Übertragungsparameter $G_j^{*i}{}_k$, so wird:

$$G_j^{*i}{}_k=L_{(j}{}^i{}_{k)}\equiv L_j{}^i{}_k-\Omega_j{}^i{}_k,\qquad \Omega_j{}^i{}_k\overset{\text{def}}{=}L_{[j}{}^i{}_{k]}\,.$$

Die Berechnung von $K_j^{*i}{}_{kl}$ gibt aus (2. 5) und (2. 6) im Hinblick auf (1. 15a)

$$(9.2)\qquad K_j^{*i}{}_{kl}=R_j^{*i}{}_{kl}+2\overset{*}{\nabla}_{[l}\Omega_{k]}{}^i{}_j-2\Omega_j{}^t{}_{[k}\Omega_{l]}{}^i{}_t-2\Omega_k{}^t{}_l\Omega_j{}^i{}_t\,.$$

Ist der Raum ein $\mathfrak{A}_n$-Raum von skalarer Krümmung vierter Art, so besteht die charakteristische Gleichung (8. 3d), wo jetzt die Funktionen alle allein von x^i abhängig sind. In diesem Falle muß aber $C_iK_j^{*i}{}_{kl}$ die Form:

$$C_iK_j^{*i}{}_{kl}=C_jA_{kl}+C_k\beta_{jl}+C_l\gamma_{jk}$$

haben (vgl. [4] Gleichung (17. 7)). Beachten wir jetzt die schiefe Symmetrie von $K_j^{*i}{}_{kl}$ in k,l, so folgt, daß

$$A_{(kl)}=0,\qquad \gamma_{jl}=-\beta_{jl}$$

bestehen. Wegen der Willkürlichkeit von C_i wird dann $K_j^{*i}{}_{kl}$ die Form

$$(9.3)\qquad K_j^{*i}{}_{kl}=2\gamma_{j[k}\delta^i_{l]}+\delta^i_jA_{kl},\qquad A_{(kl)}=0$$

haben. Für $R_j^{*i}{}_{kl}$ bekommen wir aus (9. 2) die Formel:

$$(9.4)\qquad \tfrac{1}{2}R_j^{*i}{}_{kl}=\gamma_{j[k}\delta^i_{l]}+\tfrac{1}{2}\delta^i_jA_{kl}-\overset{*}{\nabla}_{[l}\Omega_{k]}{}^i{}_j+\Omega_j{}^t{}_{[k}\Omega_{l]}{}^i{}_t+\Omega_k{}^t{}_l\Omega_j{}^i{}_t\,.$$

Diese Formel ist mit dem Formel (4. 1) von [8] identisch, wenn $A_{kl}=0$ gesetzt wird. γ_{jk} und A_{kl} sind durch die Forderung, daß der $\mathfrak{A}_n$-Raum ein

Raum von skalarer Krümmung vierter Art sei, nicht eindeutig bestimmt. Eben deshalb war in [8] möglich, außer (4. 1) noch die weitere Forderung (4. 2) zu stellen. Ist also dieser $\mathfrak{A}_n$-Raum ein Punktraum, so werden wir ihn, nach der in [8] verwendeten Terminologie, einen $\mathfrak{R}_n^*$-Raum von skalarer Krümmung vierter Gattung nennen. Statt Satz 9 besteht jetzt der

Satz 12. *Notwendig und hinreichend dafür, daß der $\mathfrak{R}_n^*$-Raum von skalarer Krümmung vierter Gattung sei, ist das Bestehen der Relationen* (9. 4) *und* (8. 3c).

Beweis. In einem Punktraum sind die Bedingungen (8. 3a) und (8. 3b) immer identisch erfüllt, da hier $G_j^{*i}{}_{kl}=0$ ist. Aus (9. 4) folgt auf Grund von (9. 2) die Relation (9. 3), und aus der Formel (9. 3) folgt die Gültigkeit von (8. 3d). Nach Satz 9 folgt dann die Richtigkeit des Satzes 12.

Zuletzt wollen wir noch den Zusammenhang der $\mathfrak{A}_n$-Räume von skalarer Krümmung mit unseren früheren Untersuchungen [7] bestimmen. Unser Basisraum war ein Finslerraum, die durch (0. 6) bestimmte Übertragung enthält aber wegen der Willkürlichkeit von $A_{i\ k}^{\ j}$ auch die in [6] und [7] benützten Übertragungen. Ziehen wir in unserer Formel (3. 2b) den Index i herauf, so kann unmittelbar verifiziert werden, daß der $\mathfrak{A}_n$-Raum in den in unserem Aufsatz [7] als $\mathfrak{L}_n$-Raum skalarer Krümmung von erster Gattung bezeichneten Raum übergeht, wo γ_{0j} jetzt den Vektor l_j des $\mathfrak{L}_n$-Raumes bedeuten wird. Der Vektor l_j des $\mathfrak{L}_n$-Raumes ist aber im allgemeinen vom entsprechenden Vektor $\partial_{\dot{v}j}F$ des $\mathfrak{F}_n$-Raumes verschieden.

Literatur

[1] L. Berwald, Über Finslersche und Cartansche Geometrie. IV, *Annals of Math.*, **48** (1947), 755 - 781.

[2] E. Cartan, Les espaces de Finsler, *Actualités scientifiques et industrielles*, **79** (Paris, 1934).

[3] E. T. Davies, Subspaces of a Finsler space, *Proc. London Math. Soc.*, **49** (1947), 19—39.

[4] L. P. Eisenhart, Non Riemannian Geometry, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, VIII (New York, 1927).

[5] S. Kikuchi, On the theory of subspaces in a Finsler space, *Tensor* (new series), **2** (1952), 67—79.

[6] A. Moór, Entwicklung einer Geometrie der allgemeinen metrischen Linienelementräume, *Acta Sci. Math.*, **17** (1956), 85—120.

[7] A. Moór, Über den Schurschen Satz in allgemeinen metrischen Linienelementräumen, *Proc. Acad. Amsterdam* (series A), **60** (1957), 290—301.

[8] A. Moór, Erweiterung des Begriffs der Räume skalarer und konstanter Krümmung, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 53—77.

[9] A. Rapcsák, Eine neue Charakterisierung Finslerscher Räume skalarer und konstanter Krümmung und projektiv-ebene Räume, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957), 1—18.

[10] A. Rapcsák, Metrische Charakterisierung der Finslerschen Räume mit verschwindender projektiver Krümmung, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 192—204.

[11] O. Varga, Über affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Linienelementen, insbesondere deren Äquivalenz, *Publ. Math. Debrecen*, **1** (1949), 7—17.

[12] O. Varga, Eine geometrische Charakterisierung der Finslerschen Räume skalarer und konstanter Krümmung, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **2** (1951), 143—156.

[13] O. Varga, Die Differentialgeometrie der Hyperflächen in Finslerschen Räumen, *Deutsche Math.*, **6** (1941), 192 212.

[14] G. Vrănceanu, *Leçons de Géométrie différentielle.* Vol. I (Bucarest, 1957).

[15] J. M. Wegener, Hyperflächen in Finslerschen Räumen als Transversalflächen einer Schar von Extremalen, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **44** (1936), 115—130.

(Eingegangen am 26. Mai 1960)