Bibliographie

János Surányi, Reduktionstheorie des Entscheidungsproblems im Prädikatenkalkül der ersten Stufe, 216 Seiten, Budapest und Berlin, Akadémiai Kiadó und VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1959.

Die Theorie des Entscheidungsproblems besteht aus zwei großen Zweigen. Der eine Teil der Untersuchungen strebt danach, für eine je umfassendere Klasse der Ausdrücke ein allgemein-rekursives Verfahren anzugeben, das entscheidet, ob ein Ausdruck erfüllbar ist oder nicht. Andere Forschungen haben den Zweck, das allgemeine Problem auf eine je engere Klasse von Ausdrücken durch ein allgemein-rekursives Verfahren zurückzuführen. Der berühmte Satz von CHURCH besagt, daß diese beiden „gegeneinander schreitenden" Forschungsrichtungen nie zusammentreffen können.

Die Ergebnisse des ersten Zweiges wurden vor einigen Jahren durch ACKERMANN zusammengefaßt.[1]) Das Buch von SURÁNYI ergänzt das Werk von ACKERMANN, indem es den ersten systematischen Überblick der gegenseitigen Untersuchungen: der Reduktionstheorie des Entscheidungsproblems gibt.

Obwohl das Buch hauptsächlich schon in Artikeln publizierte Resultate darstellt, enthält es auch einige früher nicht veröffentlichte Sätze von H. THIELE und dem Verfasser.

In Kap. I (Aufbau des Prädikatenkalküls der ersten Stufe) werden der Begriff des Ausdrucks (im engeren und weiteren Sinne) des betrachteten Kalküls sowie die Begriffe der Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit eines Ausdrucks eingeführt. Es wird bewiesen, daß jeder Ausdruck in einen äquivalenten pränexen Ausdruck umformt werden kann. (In den ferneren Reduktionssätzen werden meistens derartige Reduktionstypen (s. unten) vorkommen, die entweder nur pränexe Ausdrücke, oder solche und aus zwei pränexen Ausdrücken gebildete Konjunktionen enthalten.)

Kap. II (Das Entscheidungsproblem) formuliert zuerst das Entscheidungsproblem, das darin besteht, daß ein Verfahren angegeben werden soll, mit dessen Hilfe man für jeden Ausdruck entscheiden kann, ob dieser erfüllbar ist oder nicht, und ob er allgemeingültig ist oder nicht. Da ein Ausdruck genau dann erfüllt werden kann, wenn seine Negation nicht allgemeingültig ist, reicht es hin, nur die Erfüllbarkeit zu untersuchen. Eine Klasse **K** von Ausdrücken heißt ein *Reduktionstypus,* wenn es ein Verfahren gibt, welches einen beliebigen Ausdruck in ein Element von **K** umformt, so daß die beiden Ausdrücke für die Erfüllbarkeit gleichwertig sind. Es wird ferner festgesetzt, daß die Erfüllbarkeit eines Ausdrucks über einen Individuenbereich nur von der Mächtigkeit des Bereiches abhängt.

In Kap. III (Eliminationssätze) sind verschiedene einfach charakterisierbare Reduktionstypen angegeben.

In Kap. IV (Weitere Vereinfachungen des Präfixes) wird — neben einem naheliegenden Satz — ein (vorher unveröffentlicher) Satz des Verfassers bewiesen, laut dessen die Aus-

[1]) W. ACKERMANN, *Solvable cases of the decision problem* (Amsterdam, 1954).

drücke der Form

$$\forall x_1 x_2 x_3 \mathbf{M}_1 \wedge \forall y_1 y_2 \exists y_3 \mathbf{M}_2$$

einen Reduktionstypus bilden. ($\mathbf{M}_1$ und $\mathbf{M}_2$ haben hier eine im Satze beschriebene spezielle Form, sie sind u. a. quantorenfrei, und können — eventuell mit der Ausnahme einer zweistelligen — nur einstellige Prädikatenvariablen enthalten.)

Kap. V (Erfüllung in einem abzählbaren Individuenbereich) stellt zuerst den Satz von Löwenheim und Skolem dar, der besagt, daß ein erfüllbarer Ausdruck ohne Gleichheitszeichen schon in einem abzählbaren Bereich erfüllt werden kann. Nach einigen Verschärfungen dieses Satzes werden Reduktionstypen mit gegebenem speziellem Präfix, mit begrenzter Stellen-Anzahl der Prädikatenvariablen bestimmt.

In Kap. VI und VII (Reduktionstypen mit einer einzigen Prädikatenvariablen) sind Reduktionstypen mit einer einzigen, und zwar zweistelligen Prädikatenvariablen angegeben. Die Form des Präfixes kann in diesen Typen nicht so genau vorgeschrieben werden, wie in den Sätzen des Kapitels V.[1])

Kap. VIII (Reduktion des Entscheidungsproblems auf den Fall beliebiger endlicher Bereiche. Die rekursive Unlösbarkeit des Entscheidungsproblems) enthält den Satz von Kalmár, laut dessen zu jedem Ausdruck $\mathfrak{A}$ ein Ausdruck $\mathfrak{B}$ sich derart konstruieren läßt, daß $\mathfrak{A}$ genau dann nicht erfüllbar ist, wenn $\mathfrak{B}$ in irgendeinem endlichen Bereich erfüllt werden kann; ferner den schon erwähnten Churchschen Satz über die Unlösbarkeit des Entscheidungsproblems mit einem allgemein-rekursiven Verfahren. (Auch der letztgenannte Satz wird durch eine von Kalmár stammende Methode bewiesen.)

Unter den im Anhang betrachteten Hilfsmitteln ist insbesondere der Skolem—Herbrandsche Satz zu erwähnen, der die Erfüllbarkeit eines Ausdrucks auf die Widerspruchsfreiheit eines geeigneten axiomatischen Systems zurückführt.

Die offenen Probleme, die im Buche an verschiedenen Stellen erwähnt sind, werden unter dem Titel „Nachbemerkungen" zusammenfassend wieder aufgezählt. Das Buch schließt sich mit einem 50 Angaben enthaltenden Literaturverzeichnis.

A. Ádám (Szeged)

Ákos Császár, Fondements de la topologie générale, 229 pages, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1960.

Il y a quelques années M. Császár a introduit un nouveau type d'espaces dans la Topologie générale qui généralise simultanément les espaces topologiques, uniformes et de proximité (voir *Revue Math. Pures Appl.*, **2** (1957), 399—407). Dans le présent ouvrage, il se propose de développer la théorie de ces espaces, dits espaces syntopogènes[2]) en vue de les appliquer aux fondements des espaces topologiques, uniformes et de proximité. Non seulement les fondements de ces derniers espaces se déduisent de la théorie des espaces st simplement par spécialisation, mais encore les relations qui les relient entre eux deviennent plus claires et se prêtent à un traitement systématique lorsqu'on les étudie dans le cadre des espaces st. Le domaine d'application des espaces st s'étend approximativement sur les deux premiers chapitres de la „Topologie générale" de Bourbaki ainsi que sur le mémoire de Yu. M. Smirnov sur les espaces de proximité (voir *Mat. Sbornik*, **31** **(73)** (1952), 543–574).

---

[1]) $\exists\forall\exists\forall^2$, $\exists^n\forall^3\exists$ und $\exists^n\forall\exists^a\forall$ sind typische Beispiele für die Form der Präfixe, die in den Ergebnissen der Kapitel V, VI und VII (der Reihe nach) auftreten. (a und n sind nichtnegative Zahlen, a ist dabei universell beschränkt.)

[2]) Pour abréger nous écrirons dans la suite „st" pour „syntopogène (s)" et „str" pour „structure (s)".

Les §§ 1 à 7 donnent les fondements de la théorie. E étant un ensemble quelconque (ensemble fondamental), on entend par „*ordre topogène sur E*" une relation binaire $<$ entre les parties de E qui vérifie les axiomes suivants:

$$0<0;\ E<E;$$
$$A<B \text{ implique } A\subset B;\ A\subset A'<B'\subset B \text{ implique } A<B;$$
$$A<B \text{ et } A'<B' \text{ impliquent } A\cap A'<B\cap B' \text{ et } A\cup A'<B\cup B'.$$

L'ordre topogène $<$ est dit *symétrique* lorsque $A<B$ entraîne toujours $E-B<E-A$. Il est *parfait* si les relations $A_\gamma<B_\gamma$ $(\gamma\in\Gamma)$ entraînent toujours $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma<\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$. Si les mêmes relations entraînent $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma<\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$ et $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma<\bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$, on dit que $<$ est *biparfait.*

Une *str st* $\mathfrak{S}$ sur E est une classe non vide d'ordres topogènes sur E qui satisfait aux axiomes suivants:

A deux éléments quelconques $<_1$ et $<_2$ de $\mathfrak{S}$ il correspond un $<_3\in\mathfrak{S}$ tel qu'on ait $A<_3B$ toutes les fois qu'on a $A<_1B$ ou $A<_2B$.

A tout $<\in\mathfrak{S}$ il correspond un $<'\in\mathfrak{S}$ tel que $A<B$ entraîne l'existence d'un ensemble C qui satisfait à la relation $A<'C<'B$.

Un *espace st* est un couple $[E,\mathfrak{S}]$ ou $\mathfrak{S}$ est une str st sur E.

$\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ étant deux str st sur E, on dit que $\mathfrak{S}_1$ *est plus fin que* $\mathfrak{S}_2$ lorsque à chaque $<_2\in\mathfrak{S}_2$ il correspond un $<_1\in\mathfrak{S}_1$ tel que $A<_2B$ entraîne $A<_1B$. Lorsque $\mathfrak{S}_1$ est plus fin que $\mathfrak{S}_2$ et inversement, on dit que ces deux str st sont *équivalentes*.

Lorsque tous les éléments d'une str st sont symétriques, resp. parfaits, resp. biparfaits, on dit qu'elle est *symétrique*, resp. *parfaite*, resp. *biparfaite*. Les str st, formées d'un seul ordre topogène, sont dites *simples*.

Les str topologiques, uniformes et de proximité peuvent être identifiées à certaines str st de la façon suivante.

A toute str st simple et parfaite $\mathfrak{S}=\{<\}$ sur E on fait correspondre une topologie sur E, en considérant un ensemble A ouvert lorsque $A<A$. Inversement, toute topologie sur E correspond de cette façon à une str st simple et parfaite sur E et à une seule.

$\mathfrak{S}=\{<\}$ étant une str st simple et symétrique sur E, on lui fait correspondre une str de proximité δ sur E, en posant $A\delta B$ si et seulement si $A<E-B$ n'a pas lieu. Inversement, toute str de proximité sur E correspond de cette façon à une str st simple et symétrique sur E et à une seule.

$\mathfrak{S}$ étant une str st symétrique et biparfaite sur E, les ensembles $\mathbf{U}_<=\{(x,y)$: non $\{x\}<E-\{y\}\}$ forment un système fondamental d'entourages d'une str uniforme sur E qu'on fait correspondre à $\mathfrak{S}$. Inversement, toute str uniforme sur E peut être déduite, suivant cette formule, d'une str st symétrique et biparfaite sur E et, à équivalence près, d'une seule.

Le § 8 est consacré à l'étude de certaines opérations sur les str st. $\{\mathfrak{S}^\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ étant une famille de str st sur E, on définit une str st $\mathfrak{S}=\bigvee_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{S}^\lambda$ sur E qui est plus fine que chacune des $\mathfrak{S}^\lambda$ mais moins fine que toute str st ayant la même propriété. $\mathfrak{S}$ étant une str st sur E, on définit de façon explicite quatre str st $\mathfrak{S}^s$, $\mathfrak{S}^p$, $\mathfrak{S}^b$ et $\mathfrak{S}^t$ sur E, plus fines que $\mathfrak{S}$ dont $\mathfrak{S}^s$ est symétrique, $\mathfrak{S}^p$ est parfait, $\mathfrak{S}^b$ est biparfait et $\mathfrak{S}^t$ est simple et qui sont minimales dans le sens que toute str st, plus fine que $\mathfrak{S}$, est aussi plus fine que $\mathfrak{S}^s$ ou $\mathfrak{S}^p$ ou $\mathfrak{S}^b$ ou $\mathfrak{S}^t$, suivant qu'elle est symétrique, parfaite, biparfaite ou simple.

Si $\mathfrak{S}$ est une str st biparfaite et symétrique, c'est-à-dire qu'il correspond à une str uniforme $\mathfrak{U}$, alors $\mathfrak{S}^t$, resp. $\mathfrak{S}^{tp}$ correspond à la str de proximité, resp. à la topologie déduite de $\mathfrak{U}$.

Les opérateurs $^s, ^p, ^b, ^t$ obéissent à certaines régles de calcul, on a p. e. $\mathfrak{S}^{sb} = \mathfrak{S}^{bsp}$, $\mathfrak{S}^{tp} = \mathfrak{S}^{tp}$. Le calcul sur ces opérateurs fournit un outil très efficace et très maniable pour déduire certaines propriétés des str topologiques, uniformes et de proximité et pour établir les liens qui existent entre ces structures.

Les §§ 9 à 11 se groupent autour des notions suivantes: image réciproque d'une str st (par une application dans l'ensemble fondamental de cette str), sous-espaces d'un espace st, application continue d'un espace st dans un autre, produit d'espaces st.

Les deux premières de ces notions se réduisent à leurs significations habituelles lorsqu'on envisage des str st correspondant à une topologie ou à une str uniforme ou à une str de proximité.

Les applications continues d'une espace st $[E, \mathfrak{S}]$ dans un espace st $[E', \mathfrak{S}']$ coïncident avec les applications continues (dans le sens usuel), resp. uniformes, resp. δ-continues de E dans E', suivant que $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$ correspondent chacune à une topologie ou á une str uniforme ou à une str de proximité.

Le produit $[\underset{\lambda\in\Lambda}{\times} E^\lambda, \underset{\lambda\in\Lambda}{\times} \mathfrak{S}^\lambda]$ d'une famille $\{[E^\lambda, \mathfrak{S}^\lambda]: \lambda \in \Lambda\}$ d'espaces st est défini de telle sorte qu'au cas où les $\mathfrak{S}^\lambda$ correspondent chacune à une topologie, resp. à une str uniforme, le produit de ces topologies, resp. str uniformes correspond à $(\underset{\lambda\in\Lambda}{\times} \mathfrak{S}^\lambda)^{tp}$, resp. $(\underset{\lambda\in\Lambda}{\times} \mathfrak{S}^\lambda)^b$. Lorsque chacune des $\mathfrak{S}^\lambda$ correspond à une str de proximité δ^λ, la str de proximité correspondant à $(\underset{\lambda\in\Lambda}{\times} \mathfrak{S}^\lambda)^t$ sert de définition pour le produit des δ^λ.

Toute str st sur E peut être construite, à équivalence près, à l'aide de certaines familles, convenablement choisies, de fonctions réelles, définies sur E (§ 12). Les théorèmes générales sur la construction des str st (établis avec la collaboration du rapporteur) permettent de déduire de façon élégante des théorèmes sur la représentation des str uniformes et de proximité à l'aide de fonctions réelles, en particulier le théorème sur la génération des str uniformes par un système d'écarts (§ 13).

Les derniers §§ sont consacrés aux notions d'espace st compact et complet. La première de ces notions est définie de façon analogue comme on définit l'espace uniforme complet à l'aide de filtres et équivaut à celle-ci lorsqu'il s'agit d'une str st symétrique et biparfaite. La compacité d'un espace st $\mathfrak{S}$ équivaut à la compacité de la topologie associée à $\mathfrak{S}^{tp}$. Tout espace st peut être plongé dans un espace st complet, de plus on peut assurer que les propriétés „symétrique", „parfait" et „biparfait" soient conservées lors de la complétion. Il s'ensuit que tout espace uniforme peut être plongé dans un espace uniforme complet. Par un raisonnement subtil, l'Auteur ramène la compactification des espaces st à str simple à la complétion des espaces st à str biparfaite et parvient au résultat que tout espace st à structure simple peut être plongé dans un espace compact du même type. Il conclut avec le théorème de Smirnov sur les compactifications hausdorffiennes des espaces topologiques complètement réguliers.

A côté des str uniformes, l'Auteur considère aussi une str analogue mais plus générale, dite str quasi-uniforme qu'on obtient des str uniformes essentiellement en supprimant l'axiome qui exige l'existence d'un système fondamental d'entourages symétriques. (Ces str furent introduites par L. Nachbin sous le nom de str semi-uniformes; voir *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris,* **226** (1948), 774—775.) Les str quasi-uniformes ont maintes propriétés analogues à celles des str uniformes; ces deux str sont étudiées parallèlement dans l'ovrage.

Le style et l'exposé de l'ouvrage sont à tout point exemplaires. Le langage clair et précis, les démonstrations soigneusement élaborées, la terminologie et les notations rigoureusement conséquentes rendent la lecture facile et agréable.

En terminant cette analyse, il convient d'observer qu'en général une str st n'est ni simple, ni parfait, ni symétrique, elle ne se laisse donc identifiée ni à une topologie, ni à une str quasi-uniforme, ni à une str de proximité. L'ouvrage ne fournit pas d'exemples aux applications de ces str st générales. Toutefois nous espérons que les str st générales ne tarderont pas à trouver des applications dans l'Analyse.

J. Czipszer (Budapest)

H. Lebesgue, Notices d'Histoire des Mathématiques (Monographies de L'Enseignement Mathématique, No. 4), 116 pages, Genève, L'Enseignement Mathématique, 1958.

Après une introduction écrite par M[lle] L. Félix, le livre reproduit 6 notices de H. Lebesgue: Commentaires sur l'oeuvre de F. Viète; L'oeuvre mathématique de Vandermonde; Notice sur la vie et les travaux de Camille Jordan; Notice sur René-Louis Baire; Un travail mathématique de André-Marie Ampère; Les professeurs mathématiques du Collège de France: Humbert, et Jordan, Roberval et Ramus; enfin on y trouve des extraits de la correspondance de H. Lebesgue. Dans l'une des lettres il exprime sa confession sur ses principes en historien: "l'histoire de l'acquisition d'un fait mathématique... est toujours l'histoire d'un lent et long travail collectif.... Un renseignement historique se compose d'un nom, d'un titre de Mémoire... et c'est tout,... comme si la vérité sortait de l'onde dans sa claire beauté. Mais non, la vérité ne brille qu'aux yeux qui l'ont cherchée assez longtemps pour avoir mérité de la voir.... On peut, dans les anciens écrits, suivre les travaux d'approche, voir les succès, les défaites.... Essayer de faire cela pour une notion primordiale serait, je crois, essayer de faire de la vraie histoire des sciences..."

T. Bakos (Budapest)

J. Aczél, Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen, 331 Seiten, Berlin—Basel—Stuttgart, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften—Birkhäuser Verlag, 1961.

Obwohl die Funktionalgleichungen seit lange Gegenstand verschiedener Untersuchungen waren, fehlte bis zu den letzten Zeiten eine „Theorie" dieser Gleichungen im strengen Sinne des Wortes, d. h. Klassifikationsprinzipe sowie allgemeine Lösungsmethoden. Es fehlte ja sogar eine strenge Definition, durch die die „echten" Funktionalgleichungen von den Differentialgleichungen, Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen unterschieden werden könnten. Erst in der letzten Zeit ist die Theorie der Funktionalgleichungen in ein solches Stadium getreten, daß man sich um eine wahre Theorie bewerben mochte. Das Hauptverdienst dieser Tatsache gebührt eben dem Verfasser der vorliegenden Monographie, der durch eine lange Reihe von originellen Arbeiten in diesem Gebiete selbst den Boden zur Entstehung einer Monographie vorbereitet hatte. Der Verfasser hat vor kurzem zwei größere Berichte über diesen Gegenstand veröffentlicht, sein vorliegendes Buch, das nach den Worten des Verfassers selbst ein Zwischenglied zwischen Lehrbuch, Monographie und Nachschlagewerk ist, bringt eine fast vollkommene Synthese des bisherigen Materials in dieser Richtung. Das Buch enthält eine Bibliographie mit über ein Tausend Titel.

Der Verfasser fängt mit einer Definition der Funktionalgleichungen im engen Sinne des Wortes an. Es werden dann der Reihe nach die Funktionalgleichungen für Funktionen von einer Veränderlichen und für Funktionen mehrerer Veränderlichen betrachtet. Die Funktionalgleichungen der Stufe 1 wurden in dieser Monographie im allgemeinen außer acht gelassen. Innerhalb dieser zwei Teile besteht die Einteilung nach verschiedenen Ordnungsprinzipen, wie z. B. nach der Anzahl der Gleichungen (eines Systems von Gleichungen), nach der Anzahl der gesuchten Funktionen u. s. w. Das Problem einer endgültigen Einteilung der Funktionalgleichungen nach verschiedenen Typen ist bis heute eine offene Frage. Der Text enthält nicht nur die Ergebnisse, sondern meistens auch die Beweise. Charakteristisch für das ganze Buch ist das Bestreben, in allen Fällen, womöglich mit geringsten Regularitätsannahmen oder sogar ohne irgendwelche solche Annahmen, zu den Lösungen zu gelangen. Das Buch gibt außerdem eine große Menge von verschiedenen Anwendungen und zwar nicht nur in verschiedenen Zweigen der Mathematik (wie Geometrie, Gruppentheorie, Wahrscheinlichkeitsrechnung), aber auch in der Mechanik und Physik.

Man kann behaupten, daß die bisherige Lücke durch diese Monographie ausgefüllt wurde und sogar in einer ausgezeichneten Weise. Nichtdestoweniger kann man vermuten, daß nach einigen Jahren infolge einer schnellen Entwicklung dieser Disziplin eine neue vervollständigte Herausgabe dieser Monographie notwendig sein wird.

S. Gołąb (Kraków)

W. Meyer-Eppler, Grundlagen und Anwendungen der Informationstheorie (Kommunikation und Kybernetik in Einzeldarstellungen, Herausgeben von W. Meyer-Eppler, Band 1), XVII + 446 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1959.

Seit dem Erscheinen der grundlegenden Arbeiten von Shannon wird der Informationstheorie ein immer stärkeres Interesse entgegengebracht, womit sich ein gesteigerter Anspruch auf Literatur über bisherige Ergebnisse, sowie neueren Probleme und Anwendungsmöglichkeiten der Informationstheorie meldet. Diesem Anspruch wünscht das Buch von Meyer-Eppler umfassend zu entsprechen, indem er Lesern der verschiedensten Interessengebiete und Vorkenntnisse in die Fragen der Informationstheorie Einsicht verschafft.

Verfasser stand vor einer nicht leichten Aufgabe, als er in seinem Buche einerseits den Inhalt des Wortes „Information" im ursprünglichen Sprachgebrauch berücksichtigen, anderseits jedoch jeden mit der Information zusammenhängenden Begriff in mathematischer Form behandeln wollte.

Obwohl das Buch in seinen Betrachtungen sich in großem Maße auf die Mathematik, in erster Linie auf die wichtigsten Begriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie anlehnt, werden die Leser durch lange Beweisführungen nicht in Anspruch genommen, und es ist auch jenen verständlich, die in den entsprechenden Gebieten der Mathematik nicht über vertiefte Kenntnisse verfügen. — Die Orientierung zwischen den eingeführten neuen Begriffen wird durch praktische — in erster Linie sprachliche — Beispiele, welche gleichzeitig auch auf die Anwendungsmöglichkeiten hinweisen, in großem Maße erleichtert.

Das Buch gliedert sich in 11 Kapitel. Verf. selbst faßt den Inhalt des Buches kurz folgendermaßen zusammen: „Zentrales anliegen aller Betrachtungen ist die menschliche Kommunikationskette (Kap. 1) und der in ihr stattfindende Zeichenverkehr, der von Signalen getragen wird, die den Sinnesorganen zugänglich sind. Die meßbaren Eigenschaften dieser Signale bilden die Grundlage für alle weiteren Untersuchungen (Kap. 2), wie etwa für die Frage nach den zur Signalübermittlung geeigneten Übertragungssystemen (Kap. 3), die Statistik der hierbei verwendeten stereotypen Signalformen („Symbole") (Kap. 4) und den Einfluß von Störungen auf die Signalübermittlung (Kap. 5) sowie die mögliche Sicherung gegen Übertragungsfehler (Kap. 6). In Kap. 7 tritt der informationsempfangende Kommunikationspartner mit seinen Sinnesorganen in Erscheinung, zunächst als Empfänger von Signalen und von Kap. 8 ab als Empfänger von Zeichen. Als die wichtigsten Zeichenträger werden in Kap. 9 die akustischen und optischen Valenzklassen behandelt. Von hier aus ergibt sich ein unmittelbarer Zugang zur höchsten Stufe menschlicher Kommunikation, zur sprachlichen

Kommunikation. Im Anschluß an die Probleme und Methoden der strukturellen Linguistik (Kap. 10) ist das letzte Kapitel der realen Sprachübermittlung gewidmet, d. h. dem Schicksal der Sprachzeichen in einem zwischen dem sende- und dem empfangsseitigen Kommunikationspartner etablierten gestörten Übertragungskanal." *Katalin Bognár* (Budapest)

Lothar Heffter, Begründung der Funktionentheorie auf alten und neuen Wegen, zweite, wesentlich verbesserte Auflage, VIII + 64 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1960.

Der Inhalt der ersten Auflage wurde im Wesentlichen beibehalten; die in der Besprechung derselben (*Acta Sci. Math.*, **16** (1955), 275—276) bemängelten Einzelheiten wurden berichtigt. *Ákos Császár* (Budapest)

Th. Schneider, Introduction aux nombers transcendants. Traduit par Pierre Eymard. VIII + 152 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1959.

Traduction de l'original allemand, publié en 1957 aux éditions Springer.*) — Espérons que l'ouvrage excellent, qui attirait l'attention sur les méthodes générales récentes dans la théorie des nombres transcendants, animera par sa version française des nouveaux recherches dans ce beau domaine des mathématiques. *M. Mikolás* (Budapest)

W. J. Trjitzinsky, Théorie métrique dans les espaces où il y a une mesure (Mémorial des sciences mathématiques, fasc. 143), 120 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1960.

Dans la théorie classique de l'intégrale de Lebesgue, une des plus importantes et en même temps plus difficiles questions est l'étude des liaisons entre les opérations d'intégration et de dérivation, c'est-à-dire de la dérivation des intégrales indéfinies et, plus généralement, des fonctions additives d'ensemble. Les propriétés particulières des espaces euclidiens et de la mesure de Lebesgue jouent un rôle tellement essentiel dans les démonstrations des résultats qui s'y rattachent que la possibilité d'une généralisation de cette théorie pour des mesures abstraites paraît surprenante à première vue. Tout de même, plusieures théories abstraites de la dérivation des fonctions d'ensemble ont été créées, parmi lesquelles celle due à A. Denjoy (*Amer. J. Math.*, **73** (1951), 314—356), fondée sur une extension du théorème de recouvrement de Vitali. L'auteur du présent ouvrage a pour but d'aller plus loin et d'affaiblir, d'une part, les hypothèses admises par A. Denjoy, de l'autre de trouver des extènsions analogues d'autres résultats concernant la dérivation des fonctions d'ensemble.

Soit $(E, \mathfrak{S}, \mu)$ un espace mesuré complet et désignons, pour une famille $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$, par $\Delta(\mathfrak{T})$ l'ensemble des $x \in E$ contenus dans des ensembles $T \in \mathfrak{T}$ de mesure $\mu(T)$ aussi petite que l'on veut, et par $\mu_e(X) = \inf\{\mu(S) : S \in \mathfrak{S},\ S \supset X\}$ la mesure extérieure associée à μ. Une famille $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{S}$ est dite *régulière* si $0 < \mu(G) < +\infty$ pour $G \in \mathfrak{G}$, $\mu_e(D) < +\infty$ pour $D = \cup\, \mathfrak{G}$, $\mu_e(\varrho(G)) \leqq \alpha(\mu(G))$ pour $G \in \mathfrak{G}$ et $\varrho(G) = \Delta(\{G' : G' \in \mathfrak{G},\ G' \cap G \neq 0\})$, où $\alpha(u)$ est une fonction positive croissante de $u > 0$, tendant vers 0 pour $u \to +0$ et telle qu'on puisse choisir, pour un $\varepsilon > 0$ donné, une suite $\eta_n \to 0$ $(\eta_n > 0)$ de sorte que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(u_{in}) < \varepsilon \text{ dès que } 0 < u_{in} < \eta_n,\ \sum_{i=1}^{\infty} u_{in} \leqq u_e(D)$$

(par exemple $\alpha(u) = u^c$ satisfait pour $c > 1$ à ces conditions), enfin s'il existe des nombres a et b tels que $1 < a < b$ et $\mu_e(\cup\{G' : G' \in \mathfrak{G},\ G' \cap G \neq 0,\ \mu(G') < a\mu(G)\}) < b\mu(G)$. (Dans

*) Cf. *Acta Sci. Math.*, **20** (1959), 97—98.

l'ouvrage cité d'A. DENJOY, on suppose $\alpha(u)\equiv 0$.) Dans ces hypothèses, l'auteur démontre que si $\mathcal{G}$ est une famille régulière, alors $\Delta(\mathcal{G})\in\mathfrak{S}$ et, $\varepsilon>0$ étant donné, il existe une suite $\{G_i\}$ d'ensembles $G_i\in\mathcal{G}$ disjoints telle que $\mu\left(\Delta(\mathcal{G})-\bigcup_1^\infty G_i\right)<\varepsilon$, $\left|\mu\left(\bigcup_1^\infty G_i\right)-\mu(\Delta(\mathcal{G}))\right|<\varepsilon$. Il montre que presque tous les résultats du mémoire cité d'A. DENJOY restent valables en généralisant de cette manière la définition de famille régulière. Il appelle ensuite *simplement régulière* une famille $\mathfrak{F}\subset\mathfrak{S}$ si $0<\mu(F)<+\infty$ pour $F\in\mathfrak{F}$ et si $\mathfrak{F}=\bigcup_1^\infty\mathfrak{F}_n$, $\mathfrak{F}_n\subset\mathfrak{F}_{n+1}$, enfin, pour $\mathfrak{F}'\subset\mathfrak{F}_n$ $(n=1,2,\ldots)$, $\bigcup\mathfrak{F}'\in\mathfrak{S}$ et $\mu(\bigcup\mathfrak{F}')<+\infty$. Pour des familles simplement régulières, l'auteur donne plusieurs extensions des résultats de H. BUSEMANN et W. FELLER (*Fundamenta Math.*, **22** (1934), 226—261) sur le théorème de densité. Il examine en particulier le cas important, généralisation immédiate du cas classique de la mesure de Lebesgue, où $\mathfrak{F}$ est invariante par rapport à un groupe de transformations. Il donne ensuite, pour des familles simplement régulières, une extension abstraite du théorème d'A. ZYGMUND (*Fundamenta Math.*, **23** (1934), 143—149) sur la dérivabilité forte des intégrales indéfinies de fonctions $f\in L^p$ $(p>1)$, en remarquant que les résultats plus précis de B. JESSEN, J. MARCINKIEWICZ et A. ZYGMUND (*Fundamenta Math.*, **25** (1935), 217—234) paraissent à être liés très étroitement aux espaces euclidiens. Il présente ensuite une sorte d'extension du théorème de LUSIN sur la continuité des fonctions mesurables, ainsi qu'une généralisation des théorèmes intéressants d'A. J. WARD (*Fundamenta Math.*, **26** (1936), 167—182; **28** (1937), 265—279) sur les nombres dérivés des fonctions additives d'intervalle.

Á. Császár (Budapest)

Proceedings of symposia in applied mathematics, Volume X. **Combinatorial analysis.** Edited by RICHARD BELLMAN and MARSHALL HALL, JR., VI + 311 pages, Providence, R. I., American Mathematical Society, 1960.

In the last years the interest of mathematicians toward combinatorial analysis is in steady growing. One of the reasons of recent development in the field is the availability of fast electronic computers with the aid of which exact numerical solutions can be attained in a series of problems. It seems, however, that the only common characteristic of the problems of combinatorial analysis is that they involve finite sets, but otherwise they are of very different nature. Thus one meets on this field problems of practical as well as theoretical aspects which in very many cases could hardly be separated.

The present volume contains four papers dealing with finite projective geometry which has also a great practical importance in the design of experiments.

In another group of papers extremal problems are considered which can be called integer or discrete programming. Techniques for the solution are given, based on the theory of linear inequalities and functional equations. The reader also finds algorithms for constructing optimal networks, solving large scale transportation problems and enumerating the feasible solutions for special combinatorial problems. There are papers dealing with minimax theorems related to the graph-theoretical theorem of D. KÖNIG.

In a paper a brief account is made for the permanents (sums of diagonal products) of doubly stochastic matrices.

There are some papers included in the volume on number theory and algebra as well as on the numerical analysis of special discrete problems.

The reader finds a list of well-known names among the authors of the volume which contributes a great deal to the progress of this branch of mathematics.

András Prékopa (Budapest)

LIVRES REÇUS PAR LA RÉDACTION

M. Barner, Differential- und Integralrechnung. I (Sammlung Göschen, Bd. 86/86a), 176 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1961. — DM 3,60

R. R. Goldberg, Fourier Transform (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 52), VIII+76 pages, Cambridge, University Press, 1961. — 21 s.

K. Jacobs, Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, neue Folge, Heft 29), VI+214 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1960. — DM 49,80

A. Kratzer—W. Franz, Transzendente Funktionen (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe A, Bd. 28), XIII+375 Seiten, Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft, 1960. — DM 39,—

O. Perron, Irrationalzahlen (Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe, Reine und angewandte Mathematik, Bd. 1), VIII+202 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1960. — DM 28.—

Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Providence, American Mathematical Society, 1961.

Vol. 11. **Nuclear Reactor Theory.** Edited by **G. Birkhoff** and **E. P. Wigner,** VI+339 pages, — $ 8,60

Vol. 12. **Structure of Language and its Mathematical Aspects.** Edited by **R. Jakobson,** VI+279 pages. — $ 7,80

Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Providence, American Mathematical Society, 1961.

Vol. 2. **Lattice Theory.** Edited by **R. P. Dilworth,** VIII+208 pages. — $ 6,30

Vol. 3. **Differential Geometry.** Edited by **C. B. Allendoerfer,** VIII+200 pages. — $ 7,60

W. Rinow, Die innere Geometrie der metrischen Räume (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 105), XVI+520 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1961. — DM 83,—

R. Schatten, Norm Ideals of Completely Continuous Operators (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, neue Folge, Heft 27), VIII+81 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1960. — DM 23,60

B. Segre, Lectures on Modern Geometry (Consiglio Nazionale delle Ricerche, Monografie Matematiche, 7), XV+479 pages, Roma, Edizioni Cremonese, 1961.

S. Valentiner, Vektoren und Matrizen (Sammlung Göschen, Bd. 354/354a), 2. Aufl., 202 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1960. — DM 5,80

Mémorial des sciences mathématiques, fascicules 144—146, 148—149, Paris, Gauthier-Villars, 1960—61.

144. M. J. L. Walsh, Approximation by bounded analytic functions, IV+66 pages.

145. G. Belardinelli, Fonctions hypergéométriques de plusieurs variables et résolution analytique des équations algébriques générales, IV+74 pages.

146. P. Jaffard, Théorie de la dimension dans les anneaux de polynomes, 79 pages.

148. H. Delavault, Les transformations intégrales à plusieurs variables et leurs applications, 95 pages.

149. A. Dinghas, Minkowskische Summen und Integrale. Superadditive Mengenfunktionale. Isoperimetrische Ungleichungen, 101 pages.