Über die monotone Superposition der Wahrheitsfunktionen

Von ANDRÁS ÁDÁM in Szeged

§ 1

A. W. KUSNJEZOW faßt den Inhalt des Paragraphen 2 seiner Arbeit [2] in dem Satz zusammen: *Wenn eine Wahrheitsfunktion auf zwei Weisen durch wiederholungsfreie Superpositionen aus irreduziblen Funktionen dargestellt wird, dann sind diese Darstellungen fast übereinstimmend* (S. 202). Dieses Resultat kann folgenderweise etwas ausführlicher erläutert werden. Es existieren evidente Methoden, die, für eine (im allgemeinen mehrstufige) Superpositionsdarstellung angewandt, eine Darstellung derselben Funktion liefern, so daß die beiden Darstellungen „gleiche Tiefe" haben. Seien diejenigen Superpositionsdarstellungen einer Wahrheitsfunktion betrachtet, die „am tiefsten" sind im Sinne, daß die in ihnen auftretenden Funktionen durch Superposition nicht zerlegt werden können. Die Behauptung des Kusnjezowschen Satzes besteht darin, daß jede solche Darstellung in eine beliebige andere solcher Art durch die erwähnten evidenten Methoden umformt werden kann.

Die vorliegende Arbeit hat den Zweck, eine Variante der Theorie von KUSNJEZOW zu erbauen. Unsere Untersuchungen weichen aber in Gegenstand, Aufbau und Methode von denen von KUSNJEZOW beträchtlich ab. Was den Gegenstand anbetrifft, gebrauchen wir den Begriff der wiederholungsfreien Superposition in einer durch eine Monotonitäts-Erforderung beschränkten Form.[1]) Im Aufbau unserer Forschungen und in der Formulierung unserer Ergebnisse weichen wir besonders von [2] ab; in dieser Hinsicht ist unsere Arbeit mehr einigen Teilen des Artikels [3] von TRACHTENBROT ähnlich,[2]) und folgt den in [1] begonnenen Weg. Wir gehen in einige Einzelheiten der Theorie mehr ein, als KUSNJEZOW; die Technik unserer Beweise ist meistens ganz verschieden; der Begriff der Primimplikante[3]) wird in großen Maße benützt, und die Herleitung der tieferen Ergebnisse gründet sich auf dem zweiten Satze von [1].

Da unsere Betrachtung parallel zu den Untersuchungen von KUSNJEZOW und TRACHTENBROT geht, braucht der Leser nicht [2] und [3] zu kennen. Wir defi-

---

1) Dieser Umstand bedeutet, daß unsere Forschungen „nicht so tiefgehend" sind, wie die von KUSNJEZOW. Es ist bemerkenswert, daß obwohl sein Satz den analogen Satz im Falle unseres beschränkten Superpositionsbegriffes gewissermaßen plausibel macht, ihn doch nicht enthält.

2) Es besteht aber eine gewisse Dualität mit den Methoden von TRACHTENBROT: er betrachtet hauptsächlich die *maximalen* zweipoligen Teilgraphen, wir werden aber meistens die *minimalen* abtrennbaren Teilmengen untersuchen.

3) Es zeigt die Bedeutung dieses Begriffes, daß er auch im Beweis derartiger Sätze, die nicht über Primimplikanten reden, sehr wirksam verwendet werden kann.

nieren die ein- und mehrstufigen Superpositionsdarstellungen einer Funktion, doch ist es meistens genügend, die Untersuchungen auf die einstufigen Darstellungen einzuschränken. Um alle monotone Superpositionsdarstellungen zu beschreiben, macht nur die Erläuterung der Anlagen der monoton-abtrennbaren Teilmengen Schwierigkeiten (Satz 1). Darum beschäftigt sich die Arbeit hauptsächlich mit der mengentheoretischen Situation dieser Teilmengen: es wird im Satz 7 gezeigt, daß die Gesamtheit der monoton-abtrennbaren Teilmengen in Bezug auf die Vereinigung und die Differenzbildung der nicht-disjunkten Mengen abgeschlossen ist. Es wird eine kanonische Darstellung der Wahrheitsfunktionen so eingeführt, daß jede Funktion eine wohlbestimmte derartige Darstellung hat, und durch eine Kette derartiger Darstellungen aus solchen Funktionen aufgebaut werden kann, deren jede entweder zum vierten Typ gehört,[4]) oder Konjunktion oder Disjunktion ist. Die Sätze 2 und 11 geben (sukzessiv angewandt) eine Übersicht der monoton-abtrennbaren Teilmengen für eine Funktion f, wenn die iterierte kanonische Darstellung von f bekannt ist. Die Folgerung des Satzes 12 zeigt, daß unsere Forschungen im Falle einer monotonen Funktion „gleiche Tiefe" haben, wie die von KUSNJEZOW. Der letzte Paragraph zählt einige offene Probleme auf, deren Erläuterung (auch wegen des Zusammenhanges mit der Theorie der Relais-Kontakt-Schaltungen) wünschenswert scheint.

§ 2

Es wird vorausgesetzt, daß die Terminologie und die Ergebnisse der vorhergehenden Arbeit [1] dem Leser bekannt sind. Wir werden die Sätze von [1] als Satz 1*, 2*, 3* erwähnen. In den Beweisen wird der Satz 2* oft auch ohne Berufung angewandt werden.

Es wird immer angenommen werden, daß eine Wahrheitsfunktion von jeder ihrer Variablen effektiv abhängt.[5]) Wir bezeichnen die Implikation durch $\rightarrow$, das Zeichen $\Rightarrow$ wird einem anderen Zweck dienen.

Nun führen wir einige allgemeinere Superpositionsbegriffe ein, als der (in [1] grundlegende) Begriff der einfachen wiederholungsfreien Superposition. Betrachten wir eine Wahrheitsfunktion $f[\theta]$ $(\theta=\{x_1, x_2, \dots, x_n\})$. Seien $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(m)}$ $(m \geqq 1)$ paarweise disjunkte Teilmengen von θ, und werde die Vereinigungsmenge $\theta^{(1)} \cup \theta^{(2)} \cup \dots \cup \theta^{(m)}$ durch θ' bezeichnet. Im Falle, daß $n+1$ Wahrheitsfunktionen

$$f^*[(\theta-\theta') \cup \{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}\}], f^{(1)}[\theta^{(1)}], f^{(2)}[\theta^{(2)}], \dots, f^{(m)}[\theta^{(m)}]$$

existieren,[6]) derart, daß durch die Substitutionen $x^{(1)}=f^{(1)}$, $x^{(2)}=f^{(2)}$, ..., $x^{(m)}=f^{(m)}$ eine Funktion entsteht, die als Funktion von $x_1, x_2, \dots, x_n$ (in dieser Reihenfolge aufgefaßt) mit f übereinstimmt, sprechen wir über eine Darstellung von $f[\theta]$ in

[4]) D. h. sie hängt von keiner Variablen monoton abnehmend ab, und gestattet keine nichttriviale Superpositionsdarstellung.

[5]) Dies ist äquivalent mit der Aussage: ist x_i eine beliebige Variable von f, so hat f eine Primimplikante, die x_i (unnegiert oder negiert) enthält.

[6]) Die Anordnung der Menge θ auch auf ihre Teilmengen übertragen wird; die Variablen $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}$ kommen in θ nicht vor, und sie treten in $(\theta-\theta') \cup \{x^{(1)}, \dots, x^{(m)}\}$ — in der Reihenfolge der wachsenden Indizes — als letzte auf.

der Form einer *einstufigen wiederholungsfreien Superposition,* und schreiben wir

$$(2.1) \qquad f=(f^*;f^{(1)}\Rightarrow x^{(1)},f^{(2)}\Rightarrow x^{(2)},\dots,f^{(m)}\Rightarrow x^{(m)}).$$

Wir sagen, daß $x^{(i)}$ und jede Variable von $f^{(i)}$ einander entsprechen; eine Variable von f^*, die nicht substituiert wird, entspricht sich selbst.

Zunächst wollen wir die k-stufige wiederholungsfreie Superposition induktiv definieren. Es sei angenommen, daß die Begriffe der einstufigen, zweistufigen, ..., $(k-1)$-stufigen wiederholungsfreien Superpositionen bekannt sind. So sei eine Darstellung der Funktion f in der Form einer einstufigen wiederholungsfreien Superposition gegeben. Wir betrachten einige der inneren Funktionen $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(m)}$ in einer wiederholungsfreien Superpositionsdarstellung, wobei

jede dieser Darstellungen entweder einstufig, oder zweistufig, ..., oder $(k-1)$-stufig ist, und

mindestens eine der Darstellungen $(k-1)$-stufig ist.

In diesem Falle sprechen wir über eine *k-stufige wiederholungsfreie Superpositionsdarstellung* der Funktion f.

Wir bemerken, daß von der Mitte des Paragraphen 3 an diese Superpositionsbegriffe mit der Beschränkung gebraucht werden, daß f^* von jeder der Variablen $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}$ monoton wachsend abhängt.

Ist $f[\theta]$ eine monoton wachsende Funktion von x_i und x_j, und ist $\{x_i, x_j\}$ eine monoton-abtrennbare Teilmenge von θ für f, so heißen x_i und x_j *assoziierte Variablen.* Jede Variable ist mit sich selbst assoziiert genannt.

Betrachten wir die Funktionen, die von mindestens zwei Variablen abhängen und von der Konjunktion und Disjunktion (von zwei oder mehreren Variablen) verschieden sind. Wir führen vier Type dieser Wahrheitsfunktionen ein, so daß jede Wahrheitsfunktion zu genau einem dieser Type gehört. Hat $f[\theta]$ mindestens eine Variable, von deren sie monoton abnehmend abhängt, so gehört $f[\theta]$ zum *ersten Typ.* Ist $f[\theta]$ nicht vom ersten Typ, und hat sie mindestens ein Paar assoziierter Variablen, so gehört sie zum *zweiten Typ.* Die übrigen Wahrheitsfunktionen (d. h. diejenigen, die von jeder Variablen monoton wachsend oder nicht-monoton abhängen, und kein assoziiertes Variablenpaar haben) bilden den dritten und vierten Typ, und zwar eine derartige Funktion $f[\theta]$ gehört zum *dritten Typ* genau dann, wenn sie mindestens eine monoton-abtrennbare Teilmenge hat, die in θ echt enthalten wird und aus zwei oder mehreren Elementen besteht. Es ist klar, welche Funktionen zum *vierten Typ* gehören.

Es sei eine Primimplikante $\mathfrak{A}$ der Funktion $f[\theta]$ gegeben. Sei die Relation $\varrho(\mathfrak{A}, \theta')$ wahr für $\mathfrak{A}$ und $\theta'(\subset\theta)$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{A}_{\theta'}$ nicht die leere Konjunktion ist (d. h. wenn mindestens ein Element von θ' in $\mathfrak{A}$ — unnegiert oder negiert — auftritt).

Sei f eine Wahrheitsfunktion, die von den Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ abhängt. Bezeichnen wir durch α eine Teilmenge der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$. Definieren wir eine Funktion $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ so, daß die Werte von g durch die Gleichheit

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n)=f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$$

bestimmt werden, wo $\tilde{x}_j$ im Fall $j\notin\alpha$ x_j, und im Fall $j\in\alpha$ $\bar{x}_j$ bedeutet. Dann sagen wir, den Negationsoperator N_α für f angewandt zu haben. Hat α nur ein Element i, dann schreiben wir statt $\mathsf{N}_{\{i\}}$ auch N_{x_i}.

§ 3

Wir erwähnen zuerst die triviale Tatsache, daß jede einstufige wiederholungsfreie Superpositionsdarstellung (2. 1) einer Wahrheitsfunktion f folgenderweise sukzessiv aufgebaut werden kann. Erstens betrachten wir selbst f, danach eine einfache Darstellung von f, in deren die innere Funktion eine der Funktionen $f^{(1)}$, $f^{(2)}, \ldots, f^{(m)}$ ist (die äußere Funktion wird durch die innere eindeutig bestimmt). Im nächsten Schritt kommen zwei innere Funktionen vor (die innere Funktion der vorhergehenden Superposition und eine andere, gewählt aus $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(m)}$). Die Fortsetzung des Verfahrens führt in m Schritten zur vorgegebenen Superpositionsdarstellung der Funktion f.

Hilfssatz 1. *Betrachten wir die Wahrheitsfunktion $f[\theta]$; sei θ' eine Teilmenge von θ. Wenn es eine einfache wiederholungsfreie Superpositionsdarstellung von f gibt, in deren die innere Funktion genau von den Elementen der Menge θ' abhängt, dann gibt es genau zwei derartige Darstellungen von f, und zwar kann die andere Darstellung folgenderweise aus der ersten gebildet werden: wir wenden den Negationsoperator $\mathsf{N}_{x'}$ auf f^* an, und wir ersetzen f' durch $\bar{f}'$.*[7])

Beweis. Es ist klar, daß unser Verfahren eine (von der gegebenen verschiedene) Superpositionsdarstellung von f gibt. Es ist zu beweisen, daß f keine übrige Darstellung erlaubt, in deren die innere Funktion von den Elementen von θ' abhängt. Nämlich sei

$$(f_1^*[(\theta-\theta')\cup\{x'\}];\ f_1'[\theta'] \Rightarrow x')$$

eine beliebige Darstellung von f.

Fall 1: Es gibt eine volle Elementarkonjunktion $\mathfrak{A}$ von f', bei deren die Werte von f' und f_1' übereinstimmen. Es ist (aus Symmetriegründen) genügend, den Fall zu untersuchen, daß dieser Wert $\uparrow$ ist. Es kann zuerst gezeigt werden, daß f^* und f_1^* immer gleich sind, wenn x' den Wert $\uparrow$ hat. In der Tat, sei $\mathfrak{B}\,\&\,x'$ eine volle Elementarkonjunktion für f^* (und f_1^*). So soll die Gleichheit

$$f^*(\mathfrak{B}\,\&\,x') = f(\mathfrak{B}\,\&\,\mathfrak{A}) = f_1^*(\mathfrak{B}\,\&\,x')$$

gelten.

Nun können wir beweisen, daß f' und f_1' identisch gleich sind. Da f^* und f_1^* effektiv von x' abhängen, besitzen diese Funktionen vier volle Elementarkonjunktionen von der Form $\mathfrak{D}\,\&\,x'$, $\mathfrak{D}\,\&\,\bar{x}'$, $\mathfrak{E}\,\&\,x'$, $\mathfrak{E}\,\&\,\bar{x}'$, so daß

$$f^*(\mathfrak{D}\,\&\,x') \neq f^*(\mathfrak{D}\,\&\,\bar{x}') \quad \text{und} \quad f_1^*(\mathfrak{E}\,\&\,x') \neq f_1^*(\mathfrak{E}\,\&\,\bar{x}')$$

gelten. Sei $\mathfrak{C}$ eine volle Elementarkonjunktion von f' (und f_1'). Wäre $f'(\mathfrak{C}) = \uparrow$ und $f_1'(\mathfrak{C}) = \downarrow$, so bekämen wir die Ungleichheit

$$f(\mathfrak{E}\,\&\,\mathfrak{C}) = f^*(\mathfrak{E}\,\&\,x') = f_1^*(\mathfrak{E}\,\&\,x') \neq f_1^*(\mathfrak{E}\,\&\,\bar{x}') = f(\mathfrak{E}\,\&\,\mathfrak{C}),$$

die ein Widerspruch ist. Die Gültigkeit der beiden Gleichheiten $f'(\mathfrak{C}) = \downarrow$ und

---

[7]) Der Leser kann wahrnehmen, daß die Zeitwörter „substituieren" und „ersetzen" nicht in demselben Sinne verwendet sind. „Substituieren" bezieht sich nämlich auf die Bildung einer Funktion durch Superposition; „ersetzen" bedeutet an dieser Stelle des Textes: $\bar{f}'$ spielt dieselbe Rolle in der neuen Darstellung, wie f' in der ursprünglichen. (Wir werden im § 6 auch über Substitution von Primimplikanten reden.)

$f_1'(\mathfrak{S})=\uparrow$ führt auf dieselbe Weise zu einem Widerspruch. Die so bewiesene Übereinstimmung von f' und f_1' impliziert auch die identische Gleichheit von f^* und f_1^*.

Fall 2: f_1' ist die Negation von f'. Es ist klar, daß f_1^* aus f^* durch die Anwendung von $\mathsf{N}_{x'}$ entsteht.

Satz 1. *Wir betrachten die Wahrheitsfunktion $f[\theta]$; seien $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(m)}$ paarweise disjunkte Teilmengen von θ. Wenn es eine einstufige wiederholungsfreie Superpositionsdarstellung von f gibt, in deren die inneren Funktionen $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(m)}$ (der Reihe nach) von den Mengen $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(m)}$ abhängen, dann gibt es genau 2^m derartige Darstellungen von f; und zwar kann jede Darstellung aus der angegebenen folgenderweise eindeutig gebildet werden: wir betrachten eine Teilmenge α der Menge $\{1, 2, \dots, m\}$, wir wenden den Negationsoperator N_α auf f^* an, und wir ersetzen $f^{(i)}$ durch $\bar{f}^{(i)}$ genau in denjenigen Fällen, daß $i \in \alpha$ gilt.*

Beweis. Der Spezialfall $m=1$ ist im Hilfssatz 1 bewiesen worden. Der allgemeine Fall wird daraus durch vollständige Induktion nach m leicht folgen, wenn wir das sukzessive Erbauen der gegebenen Darstellung (s. den Anfang dieses Paragraphen) betrachten. Wir dürfen annehmen, daß die inneren Funktionen so numeriert sind, daß in der ersten Darstellung nur $f^{(1)}[\theta^{(1)}]$, in der zweiten nur $f^{(1)}$ und $f^{(2)}[\theta^{(2)}]$, in der dritten nur $f^{(1)}, f^{(2)}$ und $f^{(3)}[\theta^{(3)}]$, ... als innere Funktionen auftreten. Sei der Satz für $m=i-1$ gültig angenommen. f erlaubt genau 2^{i-1} Darstellungen, in denen die Variablenmengen der inneren Funktionen genau $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(i-1)}$ sind. Für jede dieser Darstellungen hat die äußere Funktion (nach dem Hilfssatz 1) genau zwei einfache wiederholungsfreie Superpositionsdarstellungen, in denen die innere Funktion von den Elementen von $\theta^{(i)}$ abhängt. Die Substitution der Funktionen $f^{(1)}, \dots, f^{(i-1)}$ führt zu $2 \cdot 2^{i-1} = 2^i$ einstufigen wiederholungsfreien Darstellungen von f, in denen die Variablenmengen der inneren Funktionen $\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(i)}$ sind. Also gilt der Satz auch für $m=i$, womit der Beweis durch Induktion vollbracht wurde.

In den folgenden Teilen der Arbeit werden unsere sämtlichen Superpositionsbegriffe durch eine beschränkende Bedingung spezialisiert verwendet werden. Nämlich, es wird über die einstufigen wiederholungsfreien Superpositionen vorausgesetzt, daß die Funktion f^* monoton von jeder der Variablen $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}$ abhängt; in entsprechendem Sinne werden die mehrstufigen Superpositionen verstanden. Wir bringen diese Beschränkung dadurch zum Ausdruck, daß wir über *monotone* Superpositionen reden.

Eine einfache wiederholungsfreie Superposition heißt *wachsend*, wenn f^* monoton wachsend von x' abhängt.

Satz 2. *Es sei eine Darstellung der Wahrheitsfunktion f in der Form einer einfachen wiederholungsfreien wachsenden Superposition gegeben. Eine Teilmenge θ^+ von $\theta - \theta'$ ist dann und nur dann monoton-abtrennbar für f^*, wenn θ^+ monoton-abtrennbar für f ist. Eine Teilmenge θ^+ von θ' ist dann und nur dann monoton-abtrennbar für f', wenn θ^+ monoton-abtrennbar für f ist.*

Beweis. Der Teil „nur dann" der ersten Behauptung kann leicht eingesehen werden. Umgekehrt, sei $\theta^+(\subseteq \theta - \theta')$ monoton-abtrennbar für f. Nach Satz 1* sind die Primimplikanten von f^* genau

$$\mathfrak{A}^{(1)}_{\theta-\theta'} \,\&\, x', \dots, \mathfrak{A}^{(k)}_{\theta-\theta'} \,\&\, x', \mathfrak{A}^{(k+1)}, \dots, \mathfrak{A}^{(m)}, \tag{3.1}$$

wobei $\mathfrak{A}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{A}^{(m)}$ sämtliche Primimplikanten von f bedeuten, so numeriert, daß $\mathfrak{A}^{(i)}_{\theta'}(1 \leqq i \leqq m)$ genau in den Fällen $k < i \leqq m$ die leere Konjunktion ist. Dieselbe Primimplikante von f^* kann in (3. 1) auch in mehreren Exemplaren auftreten. Seien $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ zwei beliebige Primimplikanten von f^*, so daß keine von $\mathfrak{B}_{\theta^+}$ und $\mathfrak{C}_{\theta^+}$ die leere Konjunktion ist. Sei $\mathfrak{B}$ das j_1-te und $\mathfrak{C}$ das j_2-te Glied in der Aufzählung (3. 1). Die Konjunktionen $\mathfrak{A}^{(j_1)}_{\theta^+}$ und $\mathfrak{A}^{(j_2)}_{\theta^+}$ sind offenbar nicht leer; dies impliziert (durch die Annahme für θ^+ und den Satz 2*), daß $\mathfrak{A}^{(j_1)}_{\theta-\theta^+} \,\&\, \mathfrak{A}^{(j_2)}_{\theta^+}$ eine Primimplikante von f ist. Wir sondern nun zwei Fälle ab, je nachdem

$$(\mathfrak{A}^{(j_1)}_{\theta-\theta^+} \,\&\, \mathfrak{A}^{(j_2)}_{\theta^+})_{\theta'} = \mathfrak{A}^{(j_1)}_{\theta'}$$

leer ist oder nicht. Ist es leer, so gilt offenbar die Gleichheit

$$\mathfrak{A}^{(j_1)}_{\theta-\theta^+} \,\&\, \mathfrak{A}^{(j_2)}_{\theta^+} = \mathfrak{B}_{((\theta-\theta')\cup\{x'\})-\theta^+} \,\&\, \mathfrak{C}_{\theta^+}, \tag{3.2}$$

und im entgegengesetztem Falle stimmt ersichtlich $(\mathfrak{A}^{(j_1)}_{\theta-\theta^+} \,\&\, \mathfrak{A}^{(j_2)}_{\theta^+})_{\theta-\theta'} \,\&\, x'$ mit dem an der rechten Seite von (3. 2) vorkommenden Ausdruck überein. Dieser Ausdruck ist also eine Primimplikante von f^*, und θ^+ ist monoton-abtrennbar für f^*.

Um die zweite Behauptung in der Richtung „nur dann" zu beweisen, sei die innere Funktion f' in der Form

$$(g_1[(\theta'-\theta^+)\cup\{x''\}];\quad g_2[\theta^+]\Rightarrow x'')$$

dargestellt. So gestattet f die Darstellung

$$f = ((f^*; g_1 \Rightarrow x'); g_2 \Rightarrow x'').$$

Es folgt aus dem Satze 1*, daß die äußere Funktion der letzten Darstellung monoton von x'' abhängt, wenn sowohl g_1 von x'' wie f^* von x' monoton abhängt. So soll θ^+ auch für f monoton-abtrennbar sein.

Umgekehrt, sei $\theta^+(\subset\theta')$ für f monoton-abtrennbar. Seien $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ beliebige Primimplikanten von f', für die $\mathfrak{B}_{\theta^+}$ und $\mathfrak{C}_{\theta^+}$ nicht leer sind. Es gibt nach Satz 1* zwei Primimplikanten $\mathfrak{A}^{(1)}, \mathfrak{A}^{(2)}$ von f, die $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{(1)}_{\theta'}$ und $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}^{(2)}_{\theta'}$ genügen; $\mathfrak{A}^{(1)}_{\theta-\theta^+} \,\&\, \mathfrak{A}^{(2)}_{\theta^+}$ ist dann auch eine Primimplikante von f. Wegen des Satzes 1* und der monotonen Abhängigkeit der Funktion f^* von x' ist dann

$$(\mathfrak{A}^{(1)}_{\theta-\theta^+} \,\&\, \mathfrak{A}^{(2)}_{\theta^+})_{\theta'} = \mathfrak{B}_{\theta'-\theta^+} \,\&\, \mathfrak{C}_{\theta^+}$$

eine Primimplikante von f'.

§ 4

Satz 3.[8]) *Es seien θ' und θ'' monoton-abtrennbare Teilmengen von θ für die Wahrheitsfunktion $f[\theta]$. Wir nehmen an, daß jede der Mengen θ' und θ'' mindestens zwei Elemente enthält, und ihr Durchschnitt aus einer Variablen x_i besteht.*[9]) *Dann gilt entweder*

$$\varrho(\mathfrak{A}, \theta'-\{x_i\}) = \varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\}) = \varrho(\mathfrak{A}, \theta''-\{x_i\})$$

[8]) Wir werden später die Sätze 3 und 4 verallgemeinern (Sätze 6, 7).
[9]) Es ist klar, daß die Funktion f monoton von x_i abhängt.

für jede Primimplikante von f, oder erfüllt jede Primimplikante höchstens eine der Relationen

$$\varrho(\mathfrak{A}, \theta' - \{x_i\}), \quad \varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\}), \quad \varrho(\mathfrak{A}, \theta'' - \{x_i\}).$$

Wir werden den Satz 3 in den Hilfssätzen 2–6 beweisen. Die Hilfssätze 4, 5, 6 geben die Behauptung des Satzes. Es wird in jedem Hilfssatz die Annahme des Satzes erfordert.

Hilfssatz 2. *Gilt*

$$\varrho(\mathfrak{B}, \theta' - \{x_i\}) \,\&\, \varrho(\mathfrak{B}, \{x_i\})$$

für eine Primimplikante $\mathfrak{B}$, so gibt es eine Primimplikante $\mathfrak{C}$, die

$$\varrho(\mathfrak{C}, \theta'' - \{x_i\}) \,\&\, \varrho(\mathfrak{C}, \{x_i\})$$

erfüllt.

Beweis. Betrachten wir eine beliebige Primimplikante $\mathfrak{D}$, für die $\varrho(\mathfrak{D}, \theta'' - \{x_i\})$ wahr ist. (Es gibt immer eine Primimplikante von dieser Beschaffenheit.) Dann ist

$$(\mathfrak{D}_{\theta''} \,\&\, \mathfrak{B}_{\theta-\theta''})_{\theta-\theta'} \,\&\, \mathfrak{B}_{\theta'} = \mathfrak{C}$$

eine Primimplikante, die $\varrho(\mathfrak{C}, \theta'' - \{x_i\})$ und $\varrho(\mathfrak{C}, \{x_i\})$ genügt.

Hilfssatz 3. *Es existiere eine Primimplikante $\mathfrak{B}$, für die*

$$\varrho(\mathfrak{B}, \theta' - \{x_i\}) \,\&\, \varrho(\mathfrak{B}, \{x_i\})$$

gilt. Dann ist

$$\varrho(\mathfrak{A}, \theta') \rightarrow \varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\})$$

wahr für jede Primimplikante $\mathfrak{A}$.

Beweis. Angenommen, der Hilfssatz sei falsch, erhält man durch iterierte Anwendung des Satzes 2* in jedem Falle einen Widerspruch zur Tatsache, daß eine Primimplikante keine Teil-Konjunktion einer anderen Primimplikante sein kann.

In der Tat, betrachten wir eine Primimplikante $\mathfrak{A}$, die die Konklusion des Satzes nicht erfüllt (d. h. für den $\varrho(\mathfrak{A}, \theta') = \uparrow$ und $\varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\}) = \downarrow$ gelten).

Fall 1: $\varrho(\mathfrak{A}, \theta'' - \{x_i\}) = \uparrow$. Dann sind

$$\mathfrak{B}_{\theta'} \,\&\, \mathfrak{A}_{\theta-\theta'} \quad \text{und} \quad (\mathfrak{B}_{\theta-\theta''} \,\&\, \mathfrak{A}_{\theta''})_{\theta'} \,\&\, \mathfrak{A}_{\theta-\theta'}$$

Primimplikanten; die zweite ist eine echte Teil-Konjunktion der ersten.

Fall 2: $\varrho(\mathfrak{A}, \theta'' - \{x_i\}) = \downarrow$ und $\varrho(\mathfrak{B}, \theta'' - \{x_i\}) = \uparrow$. Dann wird der Widerspruch durch $\mathfrak{B}$ und die Primimplikante

$$(\mathfrak{B}_{\theta'} \,\&\, \mathfrak{A}_{\theta-\theta'})_{\theta''} \,\&\, \mathfrak{B}_{\theta-\theta''} = \mathfrak{B}_{\theta-(\theta''-\{x_i\})}$$

geliefert.

Fall 3: $\varrho(\mathfrak{A}, \theta'' - \{x_i\}) = \varrho(\mathfrak{B}, \theta'' - \{x_i\}) = \downarrow$. Dann ist $\mathfrak{A}$ ein echter Teil der Primimplikante

$$\mathfrak{A}_{\theta'} \,\&\, (\mathfrak{C}_{\theta''} \,\&\, (\mathfrak{B}_{\theta'} \,\&\, \mathfrak{A}_{\theta-\theta'})_{\theta-\theta''})_{\theta-\theta'} = \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{C}_{\theta''-\{x_i\}},$$

wobei $\mathfrak{C}$ eine Primimplikante ist, die

$$\varrho(\mathfrak{C}, \theta'' - \{x_i\}) \,\&\, \varrho(\mathfrak{C}, \{x_i\})$$

genügt (der Hilfssatz 2 sichert die Existenz einer Primimplikanten von dieser Beschaffenheit).

Hilfssatz 4. *Entweder gilt*

$$\varrho(\mathfrak{A}, \theta' \cup \theta'') \rightarrow \varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\})$$

für jede Primimplikante $\mathfrak{A}$, *oder genügt jede Primimplikante höchstens einer der Relationen*

$$\varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\}), \quad \varrho(\mathfrak{A}, (\theta' \cup \theta'') - \{x_i\}).$$

Beweis. Wir nehmen an, der Hilfssatz sei falsch, d. h. daß es zwei Primimplikanten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ gibt, für die

$$\varrho(\mathfrak{A}, \theta' \cup \theta'') = \varrho(\mathfrak{B}, \{x_i\}) = \varrho(\mathfrak{B}, (\theta' \cup \theta'') - \{x_i\}) = \uparrow$$

und

$$\varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\}) = \downarrow$$

gelten.

Die Gleichheit

$$\varrho(\mathfrak{B}, (\theta' \cup \theta'') - \{x_i\}) = \uparrow$$

kann auch in der Form

$$\varrho(\mathfrak{B}, \theta' - \{x_i\}) \vee \varrho(\mathfrak{B}, \theta'' - \{x_i\}) = \uparrow$$

geschrieben werden. Wir können (aus Symmetriegründen) ohne wesentliche Einschränkung annehmen, daß $\varrho(\mathfrak{B}, \theta' - \{x_i\})$ gilt. Nach Hilfssatz 2 wird auch die Gleichheit

$$\varrho(\mathfrak{C}, \theta'' - \{x_i\}) \,\&\, \varrho(\mathfrak{C}, \{x_i\}) = \uparrow$$

durch eine passende Primimplikante $\mathfrak{C}$ erfüllt.

Andererseits impliziert die Gültigkeit von $\varrho(\mathfrak{A}, \theta' \cup \theta'')$, daß entweder $\varrho(\mathfrak{A}, \theta')$ oder $\varrho(\mathfrak{A}, \theta'')$ wahr ist. Wir können den Hilfssatz 3 anwenden (eventuell soll in ihm θ' durch θ'' und $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{C}$ ersetzt werden); dieser behauptet, daß $\varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\})$ wahr ist. Dieser Widerspruch beweist den Hilfssatz 4.

Hilfssatz 5. *Gilt die erste Alternative des Hilfssatzes 4, so sind*

$$\varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\}) \rightarrow \varrho(\mathfrak{A}, \theta' - \{x_i\})$$

und

$$\varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\}) \rightarrow \varrho(\mathfrak{A}, \theta'' - \{x_i\})$$

für jede Primimplikante wahr.

Beweis. Aus Symmetriegründen genügt es, die erste Implikation zu beweisen. Betrachten wir eine Primimplikante $\mathfrak{B}$, der $\varrho(\mathfrak{B}, \theta' - \{x_i\})$ genügt. Wäre $\varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\}) = \uparrow$ und $\varrho(\mathfrak{A}, \theta' - \{x_i\}) = \downarrow$ für irgendwelche Primimplikante $\mathfrak{A}$, so wäre auch

$$\mathfrak{B}_{\theta - \theta'} \,\&\, \mathfrak{A}_{\theta'} = \mathfrak{B}_{\theta - (\theta' - \{x_i\})}$$

eine Primimplikante. Diese ist aber eine echte Teil-Konjunktion von $\mathfrak{B}$ und so kann keine Primimplikante sein. Dieser Widerspruch beweist den Hilfssatz.

Hilfssatz 6. *Gilt die zweite Alternative des Hilfssatzes 4, so genügt jede Primimplikante höchstens einer der Relationen*

$$\varrho(\mathfrak{A}, \theta' - \{x_i\}), \quad \varrho(\mathfrak{A}, \theta'' - \{x_i\}).$$

Beweis. Es seien

$$\varrho(\mathfrak{A}, \theta' - \{x_i\}), \quad \varrho(\mathfrak{A}, \theta'' - \{x_i\}) \quad \text{und} \quad \varrho(\mathfrak{B}, \{x_i\})$$

wahr für zwei passende Primimplikanten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$. Dann erfüllt die Primimplikante $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}_{\theta-\theta'} \& \mathfrak{B}_{\theta'}$ beide der Relationen

$$\varrho(\mathfrak{C}, \{x_i\}) \quad \text{und} \quad \varrho(\mathfrak{C}, \theta'' - \{x_i\}).$$

Dies widerspricht der angenommenen zweiten Alternative des Hilfssatzes 4.

Satz 4.[8]) *Es seien θ' und θ'' monoton-abtrennbare Teilmengen von θ, deren jede mindestens zwei Elemente enthält, und deren Durchschnitt aus einer Variablen x_i besteht. Dann sind auch*

$$\theta' \cup \theta'', \quad \theta' - \{x_i\}, \quad \theta'' - \{x_i\} \quad \textit{und} \quad (\theta' \cup \theta'') - \{x_i\}$$

monoton-abtrennbare Teilmengen von θ.

Beweis.

A) Wir zeigen erstens die Behauptung für $\theta' - \{x_i\}$. Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Primimplikanten von f, so daß $\mathfrak{A}_{\theta' - \{x_i\}}$ und $\mathfrak{B}_{\theta' - \{x_i\}}$ nicht leer sind. Wir sollen zeigen, daß auch

$$\mathfrak{A}_{\theta' - \{x_i\}} \& \mathfrak{B}_{(\theta - \theta') \cup \{x_i\}}$$

eine Primimplikante ist. Wir werden zwei Fälle danach absondern, welche der Alternativen des Satzes 3 gilt.

Fall 1. Beide von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ enthalten die Variable x_i. Dann ist

$$\mathfrak{A}_{\theta' - \{x_i\}} \& \mathfrak{B}_{(\theta - \theta') \cup \{x_i\}} = \mathfrak{A}_{\theta' - \{x_i\}} \& \mathfrak{B}_{\theta - \theta'} \& \tilde{x}_i = \mathfrak{A}_{\theta'} \& \mathfrak{B}_{\theta - \theta'}$$

wahrlich eine Primimplikante. ($\tilde{x}_i$ bedeutet die Variable x_i unnegiert oder negiert danach, ob die Funktion f von x_i monoton wachsend oder monoton abnehmend abhängt.)

Fall 2. $\mathfrak{A}_{\{x_i\}}$ und $\mathfrak{B}_{\{x_i\}}$ sind beide leer. Dann gilt ersichtlich die Gleichheit

$$\mathfrak{A}_{\theta' - \{x_i\}} \& \mathfrak{B}_{(\theta - \theta') \cup \{x_i\}} = \mathfrak{A}_{\theta'} \& \mathfrak{B}_{\theta - \theta'}.$$

B) Die Richtigkeit der Behauptung für $\theta'' - \{x_i\}$ kann durch eine der vorhergehenden analoge Gedankenfolge bewiesen werden.

C) Wir wollen beweisen, daß $\theta' \cup \theta''$ monoton-abtrennbar ist. Dafür genügt es zu zeigen, daß auch

$$\mathfrak{A}_{\theta' \cup \theta''} \& \mathfrak{B}_{\theta - (\theta' \cup \theta'')}$$

eine Primimplikante ist, wenn die Primimplikanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$

$$\varrho(\mathfrak{A}, \theta' \cup \theta'') = \varrho(\mathfrak{B}; \theta' \cup \theta'') = \uparrow$$

erfüllen. Ersichtlich ist $\varrho(\mathfrak{A}, \theta' \cup \theta'')$ äquivalent mit

$$\varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\}) \vee \varrho(\mathfrak{A}, \theta' - \{x_i\}) \vee \varrho(\mathfrak{A}, \theta'' - \{x_i\}).$$

Wir unterscheiden fünf Fälle.

Fall 1: Es gilt die erste Alternative des Satzes 3. Dann ist

$$\mathfrak{A}_{\theta' \cup \theta''} \,\&\, \mathfrak{B}_{\theta - (\theta' \cup \theta'')} = \mathfrak{A}_{\theta'' - \{x_i\}} \,\&\, (\mathfrak{A}_{\theta'} \,\&\, \mathfrak{B}_{\theta - \theta'})_{(\theta - \theta'') \cup \{x_i\}}$$

eine Primimplikante.

Wir werden in jedem der übrigen vier Fälle die Gültigkeit der zweiten Alternative des Satzes 3 annehmen.

Fall 2:

$$\varrho(\mathfrak{A}, \theta' - \{x_i\}) = \varrho(\mathfrak{B}, \theta' - \{x_i\}) = \downarrow.$$

Dann wird die Gleichheit

$$\mathfrak{A}_{\theta' \cup \theta''} \,\&\, \mathfrak{B}_{\theta - (\theta' \cup \theta'')} = \mathfrak{A}_{\theta''} \,\&\, \mathfrak{B}_{\theta - \theta''}$$

erfüllt.

Fall 3:

$$\varrho(\mathfrak{A}, \theta' - \{x_i\}) = \varrho(\mathfrak{B}, \theta'' - \{x_i\}) = \uparrow.$$

Dann haben wir die Gleichheit

$$\mathfrak{A}_{\theta' \cup \theta''} \,\&\, \mathfrak{B}_{\theta - (\theta' \cup \theta'')} = \mathfrak{A}_{\theta'} \,\&\, (\mathfrak{B}_{\theta - \theta''} \,\&\, \mathfrak{C}_{\theta''})_{\theta - \theta'},$$

wo $\mathfrak{C}$ eine beliebige Primimplikante ist, die $\varrho(\mathfrak{C}, \{x_i\})$ genügt.

Die Fälle 4 und 5 stammen aus den Fällen 2 bzw. 3 durch den Vertausch der Rollen von θ' und θ''.

Offenbar enthalten die Fälle 2–5 alle Möglichkeiten, wenn die zweite Alternative des Satzes 3 gilt.

D) Der letzte Teil dient zum Beweis der Tatsache, daß $(\theta' \cup \theta'') - \{x_i\}$ monoton-abtrennbar ist. Wir wollen zeigen, daß

$$\mathfrak{A}_{(\theta' \cup \theta'') - \{x_i\}} \,\&\, \mathfrak{B}_{(\theta - (\theta' \cup \theta'')) \cup \{x_i\}} \tag{4.1}$$

eine Primimplikante ist, wenn

$$\varrho(\mathfrak{A}, \theta' - \{x_i\}) \vee \varrho(\mathfrak{A}, \theta'' - \{x_i\}) = \varrho(\mathfrak{B}, \theta' - \{x_i\}) \vee \varrho(\mathfrak{B}, \theta'' - \{x_i\}) = \uparrow$$

gilt. Der Ausdruck (4.1) ist in allen möglichen Fällen gleich mit $\mathfrak{A}_{\theta' \cup \theta''} \,\&\, \mathfrak{B}_{\theta - (\theta' \cup \theta'')}$, der Gedankengang des Teils C) impliziert also unsere Aussage. (Die erwähnte Gleichheit ist durch eine Diskussion leicht verifizierbar; man soll den Satz 3 in Betracht nehmen.)

§ 5

Es sei $f(x_1, \ldots, x_n)$ eine Wahrheitsfunktion ersten Typs; seien $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$ diejenigen Variablen, von denen f monoton abnehmend abhängt ($i_1 < i_2 < \ldots < i_m$). Dann bedeute die *kanonische Darstellung* von f die Superpositionsdarstellung

$$f = (f^*; \bar{x}_{i_1} \Rightarrow x^{(1)}, \bar{x}_{i_2} \Rightarrow x^{(2)}, \ldots, \bar{x}_{i_m} \Rightarrow x^{(m)}).$$

Die Funktion f^* ist durch f eindeutig bestimmt, sie gehört zum zweiten, dritten oder vierten Typ.

Nun betrachten wir eine Wahrheitsfunktion f zweiten Typs. Dann haben wir den

Satz 5. *Die Assoziiertheit ist eine Äquivalenzrelation in der Menge der Variablen von f. Die sämtlichen Variablen einer Äquivalenzklasse, die wenigstens zwei Elemente enthält, bilden eine monoton-abtrennbare Teilmenge.*

Beweis. Wir wollen zuerst die Transitivität der Assoziiertheit zeigen. Seien x_1 und x_2, ferner x_2 und x_3 assoziiert. So sind $\{x_1, x_2\}$ und $\{x_2, x_3\}$ monoton-abtrennbar. Wegen des Satzes 4 ist auch $\{x_1, x_3\}$ monoton-abtrennbar, also sind auch x_1 und x_3 miteinander assoziiert.

Die zweite Aussage des Satzes wird durch Induktion bewiesen. Es sei angenommen, daß $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ eine Klasse assoziierter Variablen ist, und die Variablen $x_1, \ldots, x_l$ $(1 \leqq l < k)$ eine monoton-abtrennbare Menge bilden. (Die Anordnung der Variablen ist beliebig.) Wegen der Assoziiertheit von x_l und x_{l+1} ist auch $\{x_l, x_{l+1}\}$ monoton-abtrennbar. So ist durch den Satz 4 auch $\{x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}\}$ monoton-abtrennbar.

Der so bewiesene Satz 5 gibt uns die Möglichkeit den Begriff der *kanonischen Darstellung* einer Wahrheitsfunktion f von zweitem Typ einzuführen. Seien $\theta^{(1)}, \ldots$ $\ldots, \theta^{(m)}$ die mindestens zwei Elemente enthaltenden Äquivalenzklassen. Die Darstellung

$$f = (f^*; f^{(1)} \Rightarrow x^{(1)}, \ldots, f^{(m)} \Rightarrow x^{(m)})$$

heißt die *kanonische Darstellung* von f, wenn f^* von jeder der Variablen $x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}$ monoton *wachsend* abhängt, und die Variablenmengen von $f^{(1)}, \ldots, f^{(m)}$ (der Reihe nach) genau $\theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(m)}$ sind. Diese kanonische Darstellung ist bis auf Permutationen von $x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}$ als Variablen von f^* (und bis auf die entsprechende Permutation von $f^{(1)}, \ldots, f^{(m)}$) eindeutig bestimmt.

§ 6

Hilfssatz 7. *In der kanonischen Darstellung einer Wahrheitsfunktion von zweitem Typ ist jede innere Funktion entweder eine Konjunktion oder eine Disjunktion (von zwei oder mehreren Variablen).*

Beweis. Sei $f^{(i)}[\theta^{(i)}] = f^{(i)}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_l})$ eine innere Funktion in der kanonischen Darstellung der Funktion $f[\theta]$ vom zweitem Typ. Nach Satz 1* sind die Primimplikanten von $f^{(i)}$ genau die (verschiedenen) nicht-leeren Elementarkonjunktionen der Form $\mathfrak{A}_{\theta^{(i)}}$, wo $\mathfrak{A}$ die Primimplikanten von f durchläuft, und kommen die Variablen $x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}$ nur unnegiert in den Primimplikanten von $f^{(i)}$ vor. (Die letzte Behauptung folgt daraus, daß f von $x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}$ monoton wachsend abhängt, und dasselbe auch für f^* und $x^{(i)}$ gilt.) Es ist nun genügend die folgende Aussage zu beweisen: enthält eine Primimplikante von f zwei verschiedene Variablen aus $\theta^{(i)}$, so enthält sie (und hiermit jede Primimplikante von f, für die $\mathfrak{A}_{\theta^{(i)}}$ nicht-leer ist) alle Elemente von $\theta^{(i)}$.

In der Tat, enthalte eine Primimplikante $\mathfrak{A}$ von f die Variablen x_{i_p}, x_{i_q}, und sei x_{i_r} eine beliebige weitere Variable aus $\theta^{(i)}$. Da aber sowohl $\{x_{i_p}, x_{i_q}\}$ als auch $\{x_{i_p}, x_{i_r}\}$ monoton-abtrennbare Teilmengen für f sind, nach Satz 3 enthält $\mathfrak{A}$ auch x_{i_r}.

Hilfssatz 7 ermöglicht die folgende Definition. Zwei assoziierte Variablen x_j, x_k der Funktion f (von zweitem Typ) heißen *konjunktiv-assoziiert* (bzw. *disjunktiv-assoziiert*), wenn diejenige Funktion $f^{(i)}[\theta^{(i)}]$ der kanonischen Darstellung von f, für die $x_j \in \theta^{(i)}$, $x_k \in \theta^{(i)}$ gelten, eine Konjunktion (bzw. eine Disjunktion) ist.

Aus den Definitionen und aus dem Satze 1* folgt ersichtlich der

Hilfssatz 8. *Sei die Wahrheitsfunktion f monoton wachsend von x_i und von x_j abhängig. Die Variablen x_i und x_j sind dann und nur dann disjunktiv-assoziiert, wenn jede Primimplikante höchstens eine dieser Variablen enthält und diese Variablen in den Primimplikanten miteinander austauschbar sind. x_i und x_j sind dann und nur dann konjunktiv-assoziiert, wenn in jeder Primimplikanten von f entweder keine oder beide von ihnen enthalten sind.*

Hilfssatz 9. *Sei $f[\theta]$ eine Wahrheitsfunktion von viertem Typ. Ist x_i eine Variable von f, von der f monoton wachsend abhängt, dann gibt es*

a) *eine Primimplikante von f, die x_i enthält und die eine Konjunktion mit mindestens zwei Gliedern ist, und*

b) *eine Primimplikante von f, die x_i nicht enthält.*

Beweis. Ist a) falsch, so ist x_i selbst eine Primimplikante und so kommt x_i in den übrigen Primimplikanten nicht vor. Dies bedeutet, daß $\theta - \{x_i\}$ eine monoton-abtrennbare Teilmenge ist, weil f eine Darstellung in der Form $x_i \vee g[\theta - \{x_i\}]$ erlaubt (g ist die Disjunktion der übrigen Primimplikanten).

Wenn die zweite Aussage nicht gilt, so ist f offenbar in der Form $x_i \& h[\theta - \{x_i\}]$ darstellbar, was die monotone Abtrennbarkeit von $\theta - \{x_i\}$ bedeutet.

Hilfssatz 10. *Seien $x^{(i)}$ und $x^{(j)}$ disjunktiv-assoziierte Variablen der Wahrheitsfunktion f^* von zweiten Typ. Seien diese Variablen durch die Funktionen $f^{(i)}[\theta^{(i)}]$ bzw. $f^{(j)}[\theta^{(j)}]$ substituiert. Es sei zugelassen, daß höchstens eine dieser Variablen nicht substituiert wird. Dann gilt Folgendes für die entstehende Funktion f:*

a) *wenn $f^{(i)}$ und $f^{(j)}$ beide Disjunktionen sind, dann ist jedes Paar von Variablen aus $\theta^{(i)} \cup \theta^{(j)}$ disjunktiv-assoziiert, und*

b) *wenn von $f^{(i)}$ und $f^{(j)}$ mindestens die eine entweder eine Konjunktion oder eine Funktion vierten Typs ist, dann ist kein Paar von Variablen x_{i_k}, x_{j_l} ($x_{i_k} \in \theta^{(i)}$, $x_{j_l} \in \theta^{(j)}$) assoziiert.*[10])

---

[10]) Es ist vorteilhaft die Konklusion des Satzes in demjenigen Falle, daß die eine der Variablen von $x^{(i)}$ und $x^{(j)}$ — z. B. $x^{(i)}$ — nicht substituiert wird, auch explizit zu formulieren. Sie lautet folgenderweise:

a) wenn $f^{(j)}$ eine Disjunktion ist, so ist $x^{(i)}$ disjunktiv-assoziiert zu jedem Element von $\theta^{(j)}$, und

b) wenn $f^{(j)}$ entweder eine Konjunktion oder eine Funktion vierten Typs ist, so ist $x^{(i)}$ zu keinem Element von $\theta^{(j)}$ assoziiert.

Beweis. a) folgt leicht (durch den Satz 1*) aus dem Hilfssatz 8. Um b) zu zeigen, sei es angenommen, daß z. B. $f^{(i)}$ entweder eine Konjunktion oder eine Funktion von viertem Typ ist. Betrachten wir ein Paar von Variablen der gegebenen Form. Da $x^{(i)}$ und $x^{(j)}$ in keiner Primimplikante von f^* zusammen auftreten, versichert der Satz 1*, daß für jede Primimplikante $\mathfrak{A}$ von f mindestens eine der Konjunktionen $\mathfrak{A}_{\theta^{(i)}}$, $\mathfrak{A}_{\theta^{(j)}}$ leer ist. So sind x_{i_k}, x_{j_l} offenbar nicht konjunktiv-assoziiert. Wir wollen beweisen, daß sie auch nicht disjunktiv-assoziiert sein können. x_{i_k} kommt in einer passenden Primimplikante $\mathfrak{B}$ von $f^{(i)}$ vor, die eine Konjunktion mit mindestens zwei Gliedern ist. Sei $\mathfrak{B} \,\&\, x^{(i)}$ eine $x^{(i)}$ enthaltende Primimplikante von f^*. Dann soll $\mathfrak{C} \,\&\, \mathfrak{B}$ eine Primimplikante von f sein. Wären x_{i_k}, x_{j_l} disjunktiv-assoziiert, so sollte

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C} \,\&\, \mathfrak{B}_{\theta^{(i)} - \{x_{i_k}\}} \,\&\, x_{j_l}$$

eine Primimplikante von f wegen des Hilfssatzes 8 sein, dies widerspricht aber der Tatsache, daß eine der Konjunktionen $\mathfrak{A}_{\theta^{(i)}}$ und $\mathfrak{A}_{\theta^{(j)}}$ leer sein muß.

Hilfssatz 11. *Seien $x^{(i)}$ und $x^{(j)}$ konjunktiv-assoziierte Variablen der Wahrheitsfunktion f^* von zweitem Typ. Seien diese Variablen durch die Funktionen $f^{(i)}[\theta^{(i)}]$ bzw. $f^{(j)}[\theta^{(j)}]$ substituiert. Es sei zugelassen, daß höchstens eine dieser Variablen nicht substituiert wird. Dann gilt für die entstehende Funktion f Folgendes:*

a) *wenn $f^{(i)}$ und $f^{(j)}$ beide Konjunktionen sind, dann ist jedes Paar von Variablen aus $\theta^{(i)} \cup \theta^{(j)}$ konjunktiv-assoziiert, und*

b) *wenn von $f^{(i)}$ und $f^{(j)}$ mindestens die eine entweder eine Disjunktion oder eine Funktion vierten Typs ist, so ist kein Paar von Variablen x_{i_k}, x_{j_l} ($x_{i_k} \in \theta^{(i)}$, $x_{j_l} \in \theta^{(j)}$) assoziiert.*[11])

Beweis. a) folgt aus Hilfssatz 8. Es sei nun angenommen, daß z. B. $f^{(i)}$ entweder eine Disjunktion oder eine Funktion vierten Typs ist. Da $x^{(i)}$ und $x^{(j)}$ in den Primimplikanten von f^* zusammen auftreten (Hilfssatz 8), so folgt aus dem Satz 1*, daß, für jede Primimplikante $\mathfrak{A}$ von f, $\mathfrak{A}_{\theta^{(i)}}$ und $\mathfrak{A}_{\theta^{(j)}}$ entweder beide leer sind, oder beide existieren. Betrachten wir ein Paar von Variablen der gegebenen Form. Ist z. B. $f^{(i)}$ entweder eine Disjunktion oder eine Funktion vierten Typs, so hat $f^{(i)}$ eine die Variable x_{i_k} nicht enthaltende Primimplikante $\mathfrak{A}$. Ist $\mathfrak{B}$ eine x_{j_l} enthaltende Primimplikante von $f^{(j)}$, so gibt es eine Primimplikante $\mathfrak{C}$ von f, für die

$$\mathfrak{C}_{\theta^{(i)} \cup \theta^{(j)}} = \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$$

gilt (wegen des Satzes 1*), also können x_{i_k} und x_{j_l} nicht konjunktiv-assoziiert sein. Ferner sei $\mathfrak{D}$ eine x_{i_k} enthaltende Primimplikante von $f^{(i)}$; die Existenz einer passenden Primimplikante $\mathfrak{E}$ von f, die

$$\mathfrak{E}_{\theta^{(i)} \cup \theta^{(j)}} = \mathfrak{D} \,\&\, \mathfrak{B}$$

genügt, zeigt, daß x_{i_k} und x_{j_l} auch nicht disjunktiv-assoziiert sein können.

Hilfssatz 12. *Betrachten wir eine einfache wachsende wiederholungsfreie Superpositionsdarstellung der Funktion f. Ist θ^* eine Teilmenge von θ, die $\theta^* \supset \theta'$*

---

[11]) Wird z. B. $x^{(i)}$ nicht substituiert, so ist die explizite Form der Konklusion dieselbe, wie in der Fußnote [10]) ausgesprochene Aussage, sollen aber „Konjunktion" mit „Disjunktion", „konjunktiv" mit „disjunktiv" vertauscht werden.

und $\theta^* - \theta' \neq \emptyset$ genügt und für f monoton-abtrennbar ist, dann ist $(\theta^* - \theta') \cup \{x'\}$ für f^* monoton-abtrennbar.

Beweis. Seien $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$ Primimplikanten von f^*, die $\varrho(\mathfrak{A}, (\theta^* - \theta') \cup \{x'\})$ und $\varrho(\mathfrak{B}^*, (\theta^* - \theta') \cup \{x'\})$ genügen. Wählen wir eine Primimplikante $\mathfrak{C}$ von f' aus, bilden wir die Elementarkonjunktionen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{A}^*$ $\mathfrak{B}^*$ durch die Substitution von $\mathfrak{C}$ für x'. Nach Satz 1* sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ Primimplikanten von f, die $\varrho(\mathfrak{A}, \theta^*)$ und $\varrho(\mathfrak{B}, \theta^*)$ genügen. So ist auch $\mathfrak{A}_{\theta^*} \& \mathfrak{B}_{\theta - \theta^*}$ eine Primimplikante von f; dies impliziert (durch den Satz 1*), daß

$$(\mathfrak{A}_{\theta^*} \& \mathfrak{B}_{\theta - \theta^*})_{\theta - \theta'}[\& x']$$

eine Primimplikante von f^* ist (x' soll hier genau dann vorkommen, wenn es in $\mathfrak{A}$ auftritt). Diese Primimplikante ist gleich mit

$$\mathfrak{A}^*_{(\theta^* - \theta') \cup \{x'\}} \& \mathfrak{B}^*_{\theta - \theta^*}.$$

§ 7

In diesem Paragraphen wollen wir die Superpositionsdarstellungen der Funktionen von drittem Typ zu untersuchen und die kanonische Darstellung dieser Funktionen zu definieren. Wir beginnen die Betrachtung mit der Verallgemeinerung der Sätze 3 und 4.

Seien θ' und θ'' monoton-abtrennbare Teilmengen für die Wahrheitsfunktion $f[\theta]$, wo $\theta' \cap \theta''$, $\theta' - \theta''$, $\theta'' - \theta'$ all nicht-leer sind. Betrachten wir die einfache wiederholungsfreie Superpositionsdarstellung

$$f = (f^*; f' \Rightarrow x'),$$

wo f' von den Elementen der Variablenmenge $\theta' \cap \theta''$ abhängt. Die Sätze 3 und 4 sind anwendbar für f^*; $(\theta' - \theta'') \cup \{x'\}$ bzw. $(\theta'' - \theta') \cup \{x'\}$ spielen die Rollen von θ' bzw. θ'' (diese sind monoton-abtrennbar wegen des Hilfssatzes 12). Wenn wir nun durch die Substitution von f' für x' die Funktion f bilden, dann führen die Sätze 3, 4 zu den folgenden zwei Sätzen (man soll auch die Sätze 1* und 2 in Betracht nehmen):

Satz 6. *Es seien θ' und θ'' monoton-abtrennbare Teilmengen für $f[\theta]$, so daß $\theta' \cap \theta''$, $\theta' - \theta''$ und $\theta'' - \theta'$ nicht leer sind. Dann gilt die folgende Alternative:*

a) *entweder wird die Gleichheit*

$$\varrho(\mathfrak{A}, \theta' - \theta'') = \varrho(\mathfrak{A}, \theta' \cap \theta'') = \varrho(\mathfrak{A}, \theta'' - \theta')$$

von jeder Primimplikanten von f genügt, oder

b) *erfüllt jede Primimplikante höchstens eine der Relationen*

$$\varrho(\mathfrak{A}, \theta' - \theta''), \quad \varrho(\mathfrak{A}, \theta' \cap \theta''), \quad \varrho(\mathfrak{A}, \theta'' - \theta').$$

Satz 7. *Es seien θ' und θ'' monoton-abtrennbare Teilmengen wie im Satze 6. Dann sind auch $\theta' \cup \theta''$, $\theta' - \theta''$, $\theta'' - \theta'$ und $(\theta' - \theta'') \cup (\theta'' - \theta')$ monoton-abtrennbar.*

In den folgenden Teilen des Paragraphen untersuchen wir eine Funktion $f[\theta]$ von drittem Typ. Eine monoton-abtrennbare Teilmenge $\theta^*(\subset\theta)$ heißt eine *kanonische Teilmenge* (für f), wenn
θ^* mindestens zwei Elemente enthält, und

$$x_i\in\theta^{**}\subseteqq\theta^* \quad \text{entweder} \quad \theta^{**}=\{x_i\} \quad \text{oder} \quad \theta^{**}=\theta^*$$

für jedes Paar einer monoton-abtrennbaren Menge θ^{**} und einer Variablen x_i impliziert.

Satz 8. *Die kanonischen Teilmengen von θ (für f) sind paarweise disjunkt.*

Beweis. Betrachten wir die kanonischen Teilmengen θ' und θ''. Gilt $\theta'\subset\theta''$ oder $\theta''\subset\theta'$, so haben wir sofort einen Widerspruch mit der Definition der kanonischen Teilmenge. Wir wollen noch zeigen, daß mindestens eine der Mengen $\theta'\cap\theta''$, $\theta'-\theta''$, $\theta''-\theta'$ leer ist. In der Tat, können wir im Falle, daß sie alle nichtleer sind, die Sätze 3* und 7 anwenden; es folgt aus der Definition der kanonischen Teilmengen, daß jedes von $\theta'\cap\theta''$, $\theta'-\theta''$ und $\theta''-\theta'$ aus einem Element besteht; seien diese Elemente durch x_i, x_j, x_k bezeichnet. So ist $\theta'=\{x_i, x_j\}$ und $\theta''=\{x_i, x_k\}$. Dies bedeutet, daß f ein Paar verschiedener Variablen hat, die zueinander assoziiert sind, dies aber widerspricht der Definition der Wahrheitsfunktionen dritten Typs.

Auf dem Grund des Satzes 8 definieren wir die *kanonische Darstellung* einer Wahrheitsfunktion $f[\theta]$ von drittem Typ als die Superpositionsdarstellung

$$f=(f^*;\, f^{(1)}\Rightarrow x^{(1)}, \dots, f^{(m)}\Rightarrow x^{(m)}),$$

wo die Variablenmengen von $f^{(1)}, \dots, f^{(m)}$ genau die kanonischen Teilmengen für f sind, und f^* monoton *waschend* von $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$ abhängt. Diese Darstellung ist eindeutig im demselben Sinne, wie die kanonische Darstellung der Funktionen von zweitem Typ.

§ 8

Offenbar ist eine einstufige wiederholungsfreie Superpositionsdarstellung der Wahrheitsfunktion f ersten Typs dann und nur dann die kanonische Darstellung von f, wenn f^* zum zweiten, dritten oder vierten Typ gehört, und jede innere Funktion die Negation einer derartigen Variablen ist, von deren f^* monoton wachsend abhängt. Wir wollen in diesem Paragraphen analoge Ergebnisse für die Funktionen von zweitem und drittem Typ erzielen.

Wir definieren zunächst die *allgemein-kanonischen Teilmengen* für die Funktionen zweiten und dritten Typs auf induktive Weise. Eine kanonische Teilmenge einer Funktion von drittem Typ ist auch allgemein-kanonisch. Ist $f[\theta]$ eine Funktion zweiten Typs, werden die Elemente einer Teilmenge θ^* von θ' in der kanonischen Darstellung von f nicht substituiert, und bilden diese Elemente eine allgemein-kanonische Teilmenge für f^*, so ist θ^* auch für f allgemein-kanonisch.

Satz 9. *Die Darstellung*

$$f=(f^*;\, f^{(1)}\Rightarrow x^{(1)}, \dots, f^{(m)}\Rightarrow x^{(m)}) \tag{8.1}$$

ist dann und nur dann die kanonische Darstellung der Wahrheitsfunktion f von zweitem Typ, wenn die Bedingungen $\alpha) - \delta)$ erfüllt sind:

$\alpha)$ f^* nicht zum ersten Typ gehört;

$\beta)$ die Funktionen $f^{(1)}, \ldots, f^{(m)}$ Konjunktionen oder Disjunktionen (von zwei oder mehreren Variablen) sind;

$\gamma)$ im Falle, daß (f^* zum zweiten Typ gehört oder eine Disjunktion ist und) gewisse Variablen von f^* eine vollständige Klasse von disjunktiv-assoziierten Variablen bilden, und die Anzahl der Variablen in dieser Klasse durch l bezeichnet ist, so werden mindestens $l-1$ dieser Variablen durch Konjunktion substituiert;

$\delta)$ im Falle, daß gewisse Variablen von f^* eine vollständige Klasse von konjunktiv-assoziierten Variablen bilden, und die Anzahl der Variablen in dieser Klasse durch l bezeichnet ist, so werden mindestens $l-1$ dieser Variablen durch Disjunktion substituiert.

Beweis. Betrachten wir die kanonische Darstellung von f. Die Erfüllung von $\alpha)$ ist evident, $\beta)$ folgt aus dem Hilfssatz 7. $\gamma)$ kann indirekt bewiesen werden: ist es falsch, so gibt es zwei disjunktiv-assoziierte Variablen von f^*, so daß jede dieser Variablen entweder eine Variable von f ist, oder durch Disjunktion substituiert wird. Betrachten wir nun die entsprechenden Variablen von f. Diese Variablen sind paarweise disjunktiv-assoziiert nach Hilfssatz 10. Darum sollten sie einer einzigen Variablen von f^* entsprechen (laut der Definition der kanonischen Darstellung der Funktionen zweiten Typs), und dieser Widerspruch beweist die Aussage $\gamma)$. Die Gültigkeit von $\delta)$ folgt mit einem analogen Schluß (mit der Anwendung des Hilfssatzes 11.)

Umgekehrt, sei es angenommen, daß $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ und $\delta)$ erfüllt sind. Wir haben zu beweisen, daß f zum zweiten Typ gehört, und die Variablenmengen der Funktionen $f^{(i)}$ genau die nicht aus einem Element bestehenden maximalen Teilmengen von θ sind, die paarweise assoziierte Elemente enthalten. Die erste dieser Aussagen folgt aus $\alpha)$ und $\beta)$ unmittelbar, die andere aber folgt aus den Hilfssätzen 10, 11 auf Grund von $\gamma)$ und $\delta)$.

Satz 10. *Die Darstellung* (8. 1) *ist dann und nur dann die kanonische Darstellung der Wahrheitsfunktion f von drittem Typ, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

$\alpha)$ f^* nicht zum ersten Typ gehört;

$\beta)$ jede $f^{(i)}$ zum vierten Typ gehört;

$\gamma)$ im Falle, daß gewisse Variablen von f^* eine allgemein-kanonische Teilmenge bilden, wird mindestens eine dieser Variablen substituiert;

$\delta)$ im Falle, daß gewisse Variablen von f^* eine vollständige Assoziiertheitsklasse bilden, die aus l Elementen besteht, werden mindestens $l-1$ dieser Variablen substituiert.

Beweis. Betrachten wir die kanonische Darstellung von f. Die Erfüllung von $\alpha)$ ist evident, $\beta)$ folgt aus dem Satze 2. Sei es angenommen, daß $\gamma)$ nicht gilt. Dies bedeutet, daß eine allgemein-kanonische Teilmenge für f^* existiert, so daß jedes Element dieser Teilmenge ohne Substitution bleibt. Dann ist diese Teilmenge kanonisch für f. Die Annahme, daß $\gamma)$ nicht gilt, führt somit zu einem Widerspruch. $\delta)$ kann (auch dies auf indirekter Weise) leicht bewiesen werden: wird es nicht genügt, dann hat f zwei Variablen, die zueinander assoziiert sind.

Umgekehrt, seien $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$, $\delta)$ erfüllt. Es soll bewiesen werden, daß f zum dritten Typ gehört, und die Variablenmengen der Funktionen $f^{(i)}$ genau die mindestens zwei Elemente enthaltenden minimalen monoton-abtrennbaren Teilmengen für f sind. In der Tat, gehört f nach $\alpha)$ und $\beta)$ nicht zum ersten Typ. Wenn man auch $\delta)$ in Betracht zieht, dann machen die Hilfssätze 10 und 11 klar, daß f kein Paar assoziierter Variablen hat. Die Minimalitäts-Eigenschaft der Variablenmengen der Funktionen $f^{(i)}$ ist evident auf Grund von $\beta)$, $\gamma)$ und Satze 2.

§ 9

Sei $f[\theta]$ eine Wahrheitsfunktion zweiten oder dritten Typs. Wir werden nun die Konjunktiv- und Disjunktiv-Assoziiertheit für die Paare von Teilmengen von θ (induktiv) definieren.

Sind x_i und x_j konjunktiv-assoziierte Variablen der Funktion f, dann sind auch $\{x_i\}$ und $\{x_j\}$ konjunktiv-assoziiert. Betrachten wir die kanonische Darstellung von f; seien die Mengen θ^* und θ^{**} konjunktiv-assoziiert für f^*. Bezeichnet θ^+ (bzw. θ^{++}) die Menge der (sämtlichen) Variablen von f, die den Elementen von θ^* (bzw. θ^{**}) entsprechen, so sind θ^+ und θ^{++} *konjunktiv-assoziierte Teilmengen* für f.

Seien $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(l)}$ $(l \geqq 2)$ paarweise (disjunkte und) konjunktiv-assoziierte Teilmengen für f. Wir sagen dann, daß die Relation

$$\sigma_k^f(\theta^{(1)}, \theta^{(2)} \cup \dots \cup \theta^{(l)})$$

gilt.

Der Begriff der *disjunktiv-assoziierten Teilmengen* und die Relation σ_d werden analog definiert.

Satz 11. *Betrachten wir eine einfache wiederholungsfreie Superpositionsdarstellung der Funktion $f[\theta]$, sei f' entweder eine Funktion vierten Typs, oder eine Konjunktion oder eine Disjunktion. Eine Teilmenge θ^*, die $\theta^* - \theta' \neq \emptyset$ und $\theta^* \cap \theta' \neq \emptyset$ genügt, ist dann und nur dann monoton-abtrennbar für f, wenn $(\theta^* - \theta') \cup \{x'\}$ für f^* monoton-abtrennbar ist, und eine der folgenden Aussagen* A, B), C) *erfüllt wird:*

A) $\theta^* \supset \theta'$;

B) $\sigma_k^{f^*}(\{x'\}, \theta^* - \theta')$ *und f' ist eine Konjunktion;*

C) $\sigma_d^{f^*}(\{x'\}, \theta^* - \theta')$ *und f' ist eine Disjunktion.*

Beweis. Es kann leicht gezeigt werden, daß die Abtrennbarkeit von $(\theta^* - \theta') \cup \cup \{x'\}$ notwendig ist. Im Falle $\theta^* \supset \theta'$ wurde diese Tatsache schon im Hilfssatz 12 bewiesen. Sei nun $\theta' - \theta^* \neq \emptyset$ angenommen. Nach Satz 7 ist $\theta^* \cup \theta'$ für f monoton-abtrennbar, also können wir den Hilfssatz 12 anwenden.

Im Beweis der Notwendigkeit der Bedingungen haben wir noch zu zeigen, daß eine der Aussagen A), B), C) gelten muß, wenn θ^* für f monoton-abtrennbar ist. Sei $\theta' - \theta^*$ nicht leer; wir wollen zuerst beweisen, daß f' nicht zum vierten Typ gehören kann. $\theta^* \cap \theta'$ und $\theta' - \theta^*$ sind beide monoton-abtrennbar für f (Satz 7), und so auch für f' (Satz 2). Gehört f' zum vierten Typ, so sollen diese Mengen aus je einem Element x_i, x_j bestehen. Dies impliziert entweder $f' = x_i \& x_j$ oder $f' = x_i \vee x_j$, und damit einen Widerspruch zur letzten Annahme für f'.

Die behauptete Notwendigkeit kann nur in demjenigen Falle falsch sein, wenn es ein Gegenbeispiel von folgendem Charakter existiert: die Funktion $f[\theta]$ ist in der Form

$$f=(f^*;f'[\theta']\Rightarrow x')$$

dargestellt, wo f' eine Konjunktion (bzw. Disjunktion) ist, ferner ist θ^* eine monoton-abtrennbare Teilmenge für f, so daß $\theta^*-\theta'$, $\theta^*\cup\theta'$ und $\theta'-\theta^*$ nicht leer sind, aber $\sigma_k^{f^*}(\{x'\}, \theta^*-\theta')$ (bzw. $\sigma_d^{f^*}(\{x'\}, \theta^*-\theta')$) nicht gilt. Wir dürfen dieses Gegenbeispiel so erwählen, daß die Anzahl der Variablen von f minimal ist. Dieser Auswahl impliziert, daß jede von $\theta^*-\theta'$, $\theta^*\cup\theta'$ und $\theta'-\theta^*$ aus einem Elemente besteht. (Im entgegengesetztem Falle führte die einstufige Darstellung von f, in deren die Variablenmengen der inneren Funktionen genau diese drei Mengen sind, zu einem Beispiel, in dem die dargestellte Funktion von wenigeren Variablen abhängt.) Seien diese Elemente (der Reihe nach) x_i, x_j, x_k. Wir können den Satz 3 für θ^* und θ' anwenden; er behauptet, daß x_i, x_j und x_k paarweise konjunktiv- (bzw. disjunktiv)-assoziiert sind.

Umgekehrt, sei $(\theta^*-\theta')\cup\{x'\}$ monoton-abtrennbar für f^*; seien $f^{**}[(\theta-(\theta^*\cup\theta'))\cup\{x''\}]$ und $f''[(\theta^*-\theta')\cup\{x'\}]$ derartige Funktionen, daß

$$f^*=(f^{**};\ f''\Rightarrow x'')$$

gilt. Dann gestattet

$$f=((f^{**};\ f''\Rightarrow x'');\ f'\Rightarrow x')$$

auch in der Form

$$(f^{**};\ (f'';\ f'\Rightarrow x')\Rightarrow x'')=(f^{**};\ g[\theta^*\cup\theta']\Rightarrow x'')$$

eine Darstellung. Gilt A), so hängt g genau von den Elementen der Menge θ^* ab.

Sei nun B) als gültig, A) als ungültig angenommen. Es ist hinreichend die Monoton-Abtrennbarkeit von θ^* für $g=(f'';f'\Rightarrow x')$ zu zeigen. Weil $\sigma_k^{f^*}(\{x'\}, \theta^*-\theta')$ wahr ist, gilt

$$\varrho(\mathfrak{A}, \{x'\})=\varrho(\mathfrak{A}, \theta^*-\theta')$$

für jede Primimplikante von f^* (Satz 1*). So soll jede Primimplikante von f'' die Variable x', und jede Primimplikante von g die sämtlichen Elemente von θ' (unnegiert) enthalten. Dies bedeutet, daß $\mathfrak{A}_{\theta^*}\,\&\,\mathfrak{B}_{\theta'-\theta^*}=\mathfrak{A}$ für jedes Paar $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ von Primimplikanten der Funktion g gilt.

Ist C) gültig (A) aber nicht), so beginnt der Gedankengang ähnlich. $\sigma_d^{f^*}(\{x'\}, \theta^*-\theta')$ impliziert, daß x' eine Primimplikante von f'', ein jedes Element von θ' eine Primimplikante von g ist, also kann g ersichtlich in der Form $h_1[\theta^*]\vee h_2[\theta'-\theta^*]$ dargestellt werden.

§ 10

Der letzte Satz der Arbeit besagt die Umkehrung einer evidenten Tatsache.

Satz 12. *Sei eine Darstellung der Wahrheitsfunktion $f[\theta]$ in der Form einer einfachen wiederholungsfreien (nicht notwendig monotonen) Superposition gegeben. Hängt f von einer in θ' enthaltenen Variablen x_i monoton ab, so ist sowohl f^* von x' wie f' von x_i monoton abhängig.*

Beweis. Sei es angenommen, daß der Satz nicht erfüllt wird.

Fall 1: f' ist eine nicht-monotone Funktion von x_i. Betrachten wir eine Primimplikante von f^*, der x' enthält. Auf Grund der Symmetrie können wir voraussetzen, daß er die Form $\mathfrak{C} \& x'$ hat. Wegen der Annahme des Falles gibt es zwei Primimplikanten von f', die die Form $\mathfrak{A} \& x_i$ bzw. $\mathfrak{B} \& \bar{x}_i$ haben. Nach Satz 1* sind sowohl $\mathfrak{C} \& \mathfrak{A} \& x_i$ als auch $\mathfrak{C} \& \mathfrak{B} \& \bar{x}_i$ Primimplikanten von f; f kann also keine monotone Funktion von x_i sein.

Fall 2: f' ist eine monotone Funktion von x_i, und f^* eine nicht-monotone Funktion von x'. Die erste dieser Bedingungen ist damit äquivalent, daß auch $\bar{f}'$ monoton von x_i abhängt, und zwar eine von f' und $\bar{f}'$ hängt von x_i monoton wachsend, die andere monoton abnehmend ab. f^* hat zwei Primimplikanten in der Form $\mathfrak{C} \& x'$, $\mathfrak{B} \& \bar{x}'$. f' (bzw. $\bar{f}'$) hat eine Primimplikante in der Form $\mathfrak{C} \& \tilde{x}_i$ (bzw. $\mathfrak{D} \& \bar{\tilde{x}}_i$). ($\tilde{x}_i$ bedeutet die Variable x_i entweder unnegiert oder negiert). Durch den Satz 1* sind dann $\mathfrak{A} \& \mathfrak{C} \& \tilde{x}_i$ und $\mathfrak{B} \& \mathfrak{D} \& \bar{\tilde{x}}_i$ Primimplikanten von f.

Folgerung. *Hängt die Wahrheitsfunktion $f[\theta]$ von jeder ihrer Variablen monoton ab, so ist eine Teilmenge von θ dann und nur dann abtrennbar, wenn sie monoton-abtrennbar (für f) ist.*

§ 11

Die kanonische Darstellung einer gegebenen Wahrheitsfunktion von erstem Typ kann leicht konstruiert werden. Auch die Konstruktion der kanonischen Darstellung einer Funktion zweiten Typs macht keine Schwierigkeiten, denn die matrixhafte Veranschaulichung des Enthaltenseins der Variablen in den Primimplikanten gibt eine gut behandelbare Methode um die Assoziiertheitsklassen zu bestimmen (Hilfssatz 8). Im Gegensatz dazu, erfordert die Konstruktion der kanonischen Darstellung einer Funktion von drittem Typ die Bestimmung der engsten nicht-trivialen monoton-abtrennbaren Teilmengen, die eine nicht leicht lösbare Aufgabe zu sein scheint.

Problem 1. Sei ein möglichst konstruktives Verfahren für die Bestimmung der kanonischen Teilmengen von θ für eine zum dritten Typ gehörende Wahrheitsfunktion $f[\theta]$ angegeben.

Es wird z. B. in [3] definiert (S. 230—231), was unter der wiederholungsfreien Realisation einer (monotonen) Wahrheitsfunktion durch einen zweipoligen Graphen verstanden wird.[12]) Zu dieser Zeit fehlt eine genügend explizite kennzeichnende Eigenschaft dafür, daß eine Wahrheitsfunktion eine derartige Realisation gestattet. Es folgt aus dem Satze von Kusnjezow ([2], S. 197), daß eine Funktion genau dann (derartig) realisierbar ist, wenn alle Funktionen realisierbar sind, die in ihrer kanonischen Darstellung auftreten. Das allgemeine Problem der Realisation wurde damit auf das Realisationsproblem der Funktionen vierten Typs reduziert.

Problem 2. Sei eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß eine Wahrheitsfunktion von viertem Typ, die von jeder ihrer Variablen mono-

12) Auch der ebenda definierte Begriff der Realisation mit Wiederholung wird im Problem 4 eine Rolle haben.

ton wachsend abhängt, durch einen zweipoligen Graphen ohne Wiederholung realisiert werden kann[13] [14].

In den Untersuchungen dieser Arbeit wurde der (von KUSNJEZOW benutzte) allgemeine Superpositionsbegriff durch eine Monotonitätsbedingung eingeschränkt. Die weitergehende Einschränkung, daß die äußeren Funktionen wiederholungsfrei realisierbar sein müssen, führt zum

Problem 3. Kann ein Analogon der in der vorliegenden Arbeit dargestellten Theorie erbaut werden, wenn wir von jeder äußeren Funktion der Superpositionen erfordern, daß sie von ihren Variablen monoton wachsend abhängt, und durch einen zweipoligen Graphen ohne Wiederholung realisierbar ist?

Wie üblich, nennen wir eine (im allgemeinen nicht wiederholungsfreie) Realisation der Wahrheitsfunktion f durch den l Kanten enthaltenden Graphen *optimal*, wenn jeder Graph, der f realisiert, mindestens l Kanten hat. Wenn die Antwort auf das Problem 3 bejahend ist, tritt auf auch das

Problem 4. Betrachten wir die kanonische Darstellung einer Wahrheitsfunktion f laut der analogen Theorie, auf die wir im Problem 3 verwiesen haben. Es sei $\mathfrak{G}^*$ ein zweipoliger Graph, der die äußere Funktion der kanonischen Darstellung von f ohne Wiederholung realisiert. Seien die inneren Funktionen $f^{(1)}, \ldots, f^{(m)}$ derselben Darstellung durch die Graphen $\mathfrak{G}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{G}^{(m)}$ (der Reihe nach) optimal realisiert. Substituieren wir jeden Graphen $\mathfrak{G}^{(i)}$ $(1 \leqq i \leqq m)$ für die der Variablen $x^{(i)}$ entsprechende Kante von $\mathfrak{G}^*$, so ergibt sich damit offenbar ein Graph, der f realisiert. Das Problem besteht darin, die Funktionen zu kennzeichnen, bei denen dieses Verfahren zu einer optimalen Realisation führt.

Wir bemerken zum Schluß, daß das in der Fußnote 1 von [1] erwähnte Problem schon in der Arbeit [2] von KUSNJEZOW gelöst wurde (in der Folgerung des Hilfssatzes 2.5, S. 208).

Literaturverzeichnis

[1] A. ÁDÁM, Zur Theorie der Wahrheitsfunktionen, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 47—52.

[2] А. В. Кузнецов, О бесповторных контактных схемах и бесповторных суперпозициях функций алгебры логики, Труды Мат. Инст. им. Стеклова, **51** (1958), 186—225.

[3] Б. А. Трахтенброт, К теории бесповторных контактных схем, Труды Мат. Инст. им. Стеклова, **51** (1958), 226—269.

(Eingegangen am 5. Oktober 1960)

---

[13]) Es folgt aus dem erwähnten Satze von KUSNJEZOW, daß der realisierende Graph notwendig irreduzibel ist (im Sinne gegeben am Ende der Seite 232 von [3]).

[14]) L. LÖFGREN beschäftigt sich in mehreren neueren Artikeln mit diesem und naheliegenden Problemen. *(Nachträgliche Bemerkung am 14. Juni 1961.)*