ШРЕЙЕРОВО РАСШИРЕНИЕ МУЛЬТИОПЕРАТОРНЫХ ГРУПП

Ф. ГЕЧЕГ (Сегед)*)

Введение

В настоящей работе дается обобщение известных теорем о шрейеровых расширениях групп и колец в рамках теории мультиоператорных групп.

Множество G — следуя Хиггинсу — называем группой с системой мультиоператоров Ω, или короче Ω-группой, если G — группа по отношению к операторам $+$ и $-$, и всякий оператор $\omega\in\Omega$ является n-арной ($n\geqq 0$) алгебраической операцией, заданной на G, причем выполняется требование

$$00\ldots 0\omega=0.$$

Как известно, и группы и кольца содержатся в классе мультиоператорных групп.

Сейчас мы соберем основные понятия относящиеся к Ω-группам, которые будут применяться впоследствии.

Идеал A Ω-группы G есть такой нормальный делитель группы G, что для любых $\omega\in\Omega,\ a_1, a_2, \ldots, a_n\in G$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n\in A$ имеет место включение

$$(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n)\,\omega\in a_1a_2\ldots a_n\omega+A.$$

Мы говорим, что Ω-группа G' является Ω-гомоморфным образом Ω-группы G, если между их элементами можно установить соответствие $\Theta: b_i\to b_i'$ ($b_i\in G, b_i'\in G'$), в котором каждому элементу из G сопоставлен вполне определенный образ в G', в то время как всякий элемент из G' обладает одним или многими различными прообразами в G и которое обладает следующим свойством:

$$(b_1+b_2)\,\Theta=b_1'+b_2';\ \ (b_1b_2\ldots b_n\omega)\,\Theta=b_1'b_2'\ldots b_n'\omega,$$

для любых $\omega\in\Omega$ и $b_i\in G$. В том случае, когда Θ: $b_i\to b_i'$ является взаимно однозначным соответствием, оно называется Ω-изоморфизмом.

*) F. Gécseg (Szeged)

В случае Ω-групп основной проблемой теории шрейеровых расширений является следующая: Пусть даны Ω-группы G и $\mathfrak{G}$. Надо определить все Ω-группы Γ содержащие G в качестве идеала, причем Ω-факторгруппа Γ/G Ω-изоморфа Ω-группе $\mathfrak{G}$.

§ 1. Теорема о расширении

Пусть дано множество G. Мы говорим, что на G определена операция ω_0, если на G уже определена бинарная операция $+$ и существует такой элемент 0 множества G, что

$$a+0=0+a=a$$

для любого $a\in G$. Этот элемент 0 и есть результат 0-арной операции ω_0.

Операция $-$ определена на G, если к каждому элементу a множества G можно найти такой элемент a', что

$$a+a'=a'+a=0.$$

В этом случае мы говорим, что a' равно $-a$.

Операция ω_1 определена на G, если для любых $a_i, a_j, a_k\in G$ имеет место равенство

$$(a_i+a_j)+a_k=a_i+(a_j+a_k), \tag{1}$$

и мы говорим, что тогда $a_ia_ja_k\omega_1$ равно левой (или правой) стороне равенства (1).

Пусть даны множества G и $\mathfrak{G}$ с системой операторов $+, \omega_0, -, \omega_1$ и Ω. Элементы из G условимся обозначать буквами b_i, элементы из $\mathfrak{G}$ буквами a_i, нулевой элемент группы G через 0, а группы $\mathfrak{G}$ — через θ. Множество пар элементов (a_i, b_j) обозначим буквой Γ.

Теперь докажем, что имеет место следующая

Теорема. Множество Γ тогда и толко тогда является шрейеровым расширением Ω-группы G с помошью Ω-группы $\mathfrak{G}$, если

(α) на Γ определены операции $+, \omega_0, -, \omega_1$ и Ω;

(β) $(a_i, b_i)+(a_j, b_j)=(a_i+a_j, a_i^{a_j}+b_i^{a_j}+b_j)$ для любых $b_i\in G$, $a_i\in\mathfrak{G}$, где $a_i^{a_j}, b_i^{a_j}\in G$ и $\theta^{a_i}=a_i^{\theta}=0^{a_i}=0$, $b_i^{\theta}=b_i$;

(γ) $(a_1, b_1)(a_2, b_2)\ldots(a_n, b_n)\omega =$
$=(a_1a_2\ldots a_n\omega, \omega^{a_1a_2\ldots a_n} + {}^{b_1b_2\ldots b_n}\omega^{a_1a_2\ldots a_n}+b_1b_2\ldots b_n\omega)$
для любых $b_1, b_2, \ldots, b_n\in G$, $a_1, a_2, \ldots, a_n\in\mathfrak{G}$ и $\omega\in\{\Omega, \omega_0, \omega_1\}$, где

$\omega^{a_1a_2\ldots a_n}$, ${}^{b_1b_2\ldots b_n}\omega^{a_1a_2\ldots a_n}\in G$ и $\omega^{\theta\theta\ldots\theta}={}^{b_1b_2\ldots b_n}\omega^{\theta\theta\ldots\theta}=0$, и обе эти функции равны 0, если $n=0$.[1])

Доказательство. Для доказательства необходимости пусть дана Ω-группа Γ содержащая в качестве идеала Ω-группу G, причем Ω-фактор-группа Γ/G Ω-изоморфна Ω-группе $\mathfrak{G}$.

Тогда

$$\Gamma/G\cong\mathfrak{G}(a_i'+G\to a_i,\ (a_1'+G)(a_2'+G)\ldots(a_n'+G)\,\omega\to a_1a_2\ldots a_n\omega),$$

для любой $\omega\in\{\omega_0,\omega_1,\Omega\}$, где a_i' является произволным элементом из смежного класса, являющегося прообразом элемента a при данном изоморфизме. Для однозначного выбора системы вычетов выберем заранее в каждом смежном классе по подгруппе G фиксированный элемент a_i', и так получаем взаимно однозначное отображение Ω-группы $\mathfrak{G}$ в Ω-группу Γ. Можно принять, что $\theta'=0$.

Так как $\mathfrak{G}=\Gamma/G$, то $(a_1+a_2)'+G=a_1'+G+a_2'+G$. Таким образом существует такой элемент $b_k(\in G)$, что $(a_1+a_2)'+b_k=a_1'+a_2'$. Элемент b_k зависит лишь от элементов a_1 и a_2. Поэтому можно писать: $b_k=a_1^{a_2}$.

Итак $(a_1+a_2)'+a_1^{a_2}=a_1'+a_2'$.

Пусть a_i' произвольный элемент из Γ. Так как G является идеалом в Γ, то

$$G+a_i'=a_i'+G.$$

Таким образом к произвольному элементу $b_j\in G$ существует такой элемент $b_l\in G$, что

$$b_j+a_i'=a_i'+b_l.$$

Так как b_l зависит лишь от элементов b_j и a_i', т. е. из-за взаимной однозначности отображения от b_j и a_i, то можно писать: $b_l=b_j^{a_i}$.

Отсюда следует

$$(a_1'+b_1)+(a_2'+b_2)=a_1'+a_2'+b_1^{a_2}+b_2=(a_1+a_2)'+a_1^{a_2}+b_1^{a_2}+b_2.$$

Левая сторона есть не что иное, как результат операции $+$, применительно к двум произвольным элементам группы Γ.

В дальнейшем пусть ω произвольный элемент множества $\{\omega_0,\omega_1,\Omega\}$. Так как G — идеал в группе Γ, то

$$(a_1'+G)(a_2'+G)\ldots(a_n'+G)\,\omega=a_1'a_2'\ldots a_n'\omega+G.$$

---

[1]) Вместо условия (γ) можно потребовать просто выполнение равенства $(a_1,b_1)\ldots\ldots(a_n,b_n)\,\omega=(a_1\ldots a_n\,\omega,b)$, где $b\in G$. Приведенная в тексте более сложная форма этого условия нужна нам потому, что из такой его формы будет непосредственно вытекать теорема о расширении групп с обычными операторами (см. § 2).

Итак, для произвольных элементов $b_1, b_2, \ldots, b_n \in G$ можно найти такой $b \in G$, что

$$(a'_1+b_1)(a'_2+b_2)\ldots(a'_n+b_n)\,\omega = a'_1a'_2\ldots a'_n\omega + b.$$

Если $a'_1=a'_2=\ldots=a'_n=\theta'(=0)$, тогда

$$(0+b_1)(0+b_2)\ldots(0+b_n)\,\omega = 0+b_1b_2\ldots b_n\omega.$$

Так как G является группой, можно писать: $b=b_k+b_1b_2\ldots b_n\omega$, где b_k какой-то элемент из G. b зависит от $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и ω, а $b_1b_2\ldots b_n\omega$ от $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и ω. Таким образом можно писать: $b_k = {}^{b_1b_2\ldots b_n}\omega^{a_1a_2\ldots a_n}$.

Имеем

$$(a_1a_2\ldots a_n\omega)' = a'_1a'_2\ldots a'_n\omega + b_l.$$

b_l зависит лишь от $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ и ω, т. е. из-за взаимной однозначности отображения $'$ от $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и ω. Так мы получим

$$a'_1a'_2\ldots a'_n\omega = (a_1a_2\ldots a_n\omega)' + \omega^{a_1a_2\ldots a_n}.$$

Отсюда

$$(a'_1+b_1)(a'_2+b_2)\ldots(a'_n+b_n)\,\omega = (a_1a_2\ldots a_n\omega)' +$$
$$+\,\omega^{a_1a_2\ldots a_n} + {}^{b_1b_2\ldots b_n}\omega^{a_1a_2\ldots a_n} + b_1b_2\ldots b_n\omega.$$

Из-за взаимной однозначности отображения $'$ можно принять обозначение:

$$a'_i + b_j = (a_i, b_j).$$

Докажем, что обратно: если выполняются условия (α), (β) и (γ), тогда Γ есть шрейерово расширение Ω-группы G при помощи Ω-группы $\mathfrak{G}$.

(α) обеспечивает, чтобы Γ была Ω-группой.

Множество G' всех элементов (θ, b_i) есть Ω-подгруппа Ω-группы Γ, которая отображается Ω-изоморфно на Ω-группу G отображением $(\theta, b_i) \leftrightarrow b_i$:

$$(\theta, b_1)+(\theta, b_2)=(\theta, b_1+b_2),\quad (\theta, b_1)(\theta, b_2)\ldots(\theta, b_n)\,\omega=(\theta, b_1 b_2\ldots b_n\omega).$$

G' является нормальным делителем в Γ, потому что для любой $(a_i, b_j)\in G$

$$(a_i, b_j)+(\theta, b_k)=(a_i, b_j+b_k),\quad (\theta, b_k)+(a_i, b_j)=(a_i, b_k^{a_i}+b_j).$$

Мы получаем так же просто, что G' является идеалом. В самом деле, для любых $b_1, b_2, \ldots, b_n, b'_1, b'_2, \ldots, b'_n \in G$ и $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathfrak{G}$

$$\big((a_1, b_1)+(\theta, b'_1)\big)\big((a_2, b_2)+(\theta, b'_2)\big)\ldots\big((a_n, b_n)+(\theta, b'_n)\big)\,\omega=$$
$$=(a_1, b_1)(a_2, b_2)\ldots(a_n, b_n)\,\omega+(\theta, b)$$

где b один из элементов группы G.

Таким образом

$$((a_1, b_1)+(\theta, b_1'))((a_2, b_2)+(\theta, b_2'))\dots((a_n, b_n)+(\theta, b_n'))\,\omega -$$
$$-(a_1, b_1)(a_2, b_2)\dots(a_n, b_n)\,\omega \in G'.$$

Очевидно, что Ω-факторгруппа Γ/G' Ω-изоморфна Ω-группе $\mathfrak{G}$.

§ 2. Теоремы расширения в некоторых специалных случаях

В этом параграфе мы покажем, при каких областях мультиоператоров Ω перейдет теорема о расширении в теоремы о расширении групп, колец и групп с (обычными) операторами.

Для этой цели дадим подходящие определения понятий группы, кольца и группы с операторами.

Множество G элементов называется группой, если на нем определены операции $+$, $-$, ω_0 и ω_1. Таким образом, теорема предыдущего параграфа переходит в теорему о расширении групп, если множество Ω пустое.

Пусть дано множество G с операцией $+$. Мы говорим, что на G определена еще другая бинарная операция ω_2, если для любых $a, b \in G$:

$$a+b=b+a. \tag{2}$$

В этом случае $ab\omega_2(=ba\omega_2)$ равно левой (и правой) стороне равенства (2).

Пусть ω_3 произвольная бинарная операция на G, отличная от операции $+$.

Если для любых элементов

$$ab\omega_3c\omega_3=a(bc\omega_3)\,\omega_3, \tag{3}$$

тогда пусть определена на G тернарная операция ω_4, для которой $abc\omega_4$ равно левой (и правой) стороне равенства (3). Если есть такие элементы в G, для которых (3) не имеет место, тогда ω_4 не определена на G.

Опять пусть $a, b, c \in G$ произвольны. На G определены операции ω_5 и ω_6 тогда и только тогда, если

$$(a+b)\,c\omega_3=ac\omega_3+bc\omega_3 \tag{4}$$

$$a(b+c)\,\omega_3=ab\omega_3+ac\omega_3. \tag{5}$$

В этом случае $abc\omega_5$ и $abc\omega_6$ равны одной из сторон равенства (4), соответственно (5). Применяя теорему о расширении к Ω-группам с областью мультиоператоров $\Omega=\{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, получаем теорему о расширении колец.

Л. Фукс в работе [3] разработал теорию расширения групп с обычными операторами. Мы это получим из теоремы расширения, если будем применять на G, $\mathfrak{G}$ и Γ операции $+, -, \omega_0, \omega_1$ и множество Ω обычных операторов. В цитированной работе требовалось, чтобы имело место

$$(a, b)\,\omega = (a\omega, \omega^a + b\omega). \tag{6}$$

Так как $(a+b)\,\omega = a\omega + b\omega$, то в условии (γ) ${}^b\omega^a = 0$ и оно переходит в (6).

Тем самим мы доказали, что наша теорема содержит и теорему о расширении групп с операторами.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Rédei L., *Algebra* I (Budapest, 1954).

[2] J. Higgins, Groups with multiple operators, *Proc. London Math. Soc.*, **6** (1956), 366—416.

[3] L. Fuchs, Rédeian skew product of operator groups, *Acta Sci. Math.*, **13** (1952), 228—238.

(Поступило 16/IX/1961 г.)