Bemerkung zu meiner Arbeit „Über Gruppen, deren sämtliche nichttriviale Potenzen zyklische Untergruppen der Gruppe sind"

Von F. SZÁSZ in Budapest

Herr W. DLAB hat in seiner Arbeit [1] den Satz meiner Note [9] verallgemeinert. In der vorliegenden Arbeit möchte ich diese Verallgemeinerung wesentlich kürzer und mehr elementar beweisen, wobei ich anders als Herr W. DLAB im nichtkommutativen Fall keine Fallunterscheidung nach periodischen bzw. nichtperiodischen Gruppen machen werde.[1])

Bezeichne G^n die durch die Elemente g^n $(g \in G)$ erzeugte, offenbar vollinvariante Untergruppe einer beliebigen Gruppe G. Die Mächtigkeit einer Gruppe G wird mit $|G|$ bezeichnet. $\mathfrak{J}$ bezeichnet den Ring der ganzen rationalen Zahlen.

Es gilt der folgende Satz von W. DLAB:

Satz. *Für eine beliebige Gruppe G und für den größten gemeinsamen Teiler d der natürlichen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ist die Gruppe G^d dann und nur dann zyklisch, wenn alle Potenzen $G^{n_1}, G^{n_2}, \ldots, G^{n_k}$ zyklisch sind.*

Beweis. Da die Behauptung „nur dann" trivial ist, so genügt es die Behauptung „dann" zu beweisen. Dabei genügt es den Fall $d=(n_1, n_2)$ d. h. $k=2$ zu betrachten, denn der allgemeine Beweis folgt daraus mit leichter Induktion nach k. Bestehe nun $G^{n_1}=\{g_1\}$ und $G^{n_2}=\{g_2\}$ mit $(n_1, n_2)=d$ und $n_i=d \cdot m_i$. Dann gilt $(m_1, m_2)=1$.

Zuerst wird $G^d=\{g_1, g_2\}$ $(=G^{n_1}G^{n_2})$ bewiesen.

Zum Beweis sei t_j $(j=1, 2)$ die Ordnung der Klasse $g_i\{g_j\}$ in der Faktorgruppe $G/\{g_j\}$ $(i \neq j)$. Dann folgt aus der trivialen Beziehung $\{g_1^{m_2}\}=\{g_2^{m_1}\}$ sofort t_j/m_j, also auch $(t_1, t_2)=1$. Hiernach existieren Zahlen $k_1, k_2 \in \mathfrak{J}$ mit

$$(*) \qquad t_1k_1+t_2k_2 = 1.$$

Da mit passenden $l_1, l_2 \in \mathfrak{J}$ auch $m_1l_1+m_2l_2 = 1$ besteht, so ergibt sich

$$x^d=(x^{l_1})^{m_1d} \cdot (x^{l_2})^{m_2d} \in G^{n_1} \cdot G^{n_2} \subseteqq \{g_1, g_2\},$$

folglich $G^d \subseteqq \{g_1, g_2\}$. Anderseits gilt

$$\{g_i\}=G^{n_i}=G^{m_id} \subseteqq (G^{m_i})^d \subseteqq G^d$$

d. h. $\{g_1, g_2\} \subseteqq G^d$. Also ist $G^d=\{g_1, g_2\}$, wie behauptet wurde.

---

[1]) Herr I. KÖRNYEI hat mich aufmerksam gemacht, daß die letzte Behauptung des Beweises auf Seite 83 meiner Note [9] falsch ist. Freilich wird dieser Fehler durch meine vorliegende Arbeit auch verbessert. (Vgl. auch die ungarisch gefaßte Version [10] meiner Note [9].)

Wir schicken jetzt den Fall voraus, daß G^d kommutativ ist.

I. Es sei G^d kommutativ. Sind $\{g_1\}$ und $\{g_2\}$ beide endlich, so ist auch G^d endlich, und zwar das direkte Produkt ihrer p-Komponenten $(G^d)_p$, also ist

$$G^d = \prod_p \otimes (G^d)_p.$$

Für die Untergruppen

$$H_1 = \prod_{p/m_1} \otimes (G^d)_p, \quad H_2 = \prod_{(p, m_1)=1} \otimes (G^d)_p$$

gelten dann $G^d = H_1 \otimes H_2$, $H_1^{m_2} = H_1$, $H_2^{m_1} = H_2$, also

$$G^{n_1} = H_1^{m_1} \otimes H_2 \quad \text{bzw.} \quad G^{n_2} = H_1 \otimes H_2^{m_2}.$$

Hiernach sind H_2 und H_1 zyklisch. Dann ist aber wegen $(|H_1|, |H_2|) = 1$ auch $G^d (= H_1 \otimes H_2)$ zyklisch.

Ist aber z. B. $\{g_1\}$ unendlich, so gilt wegen der Gleichungen

$$(**) \qquad g_1^{t_2} = g_2^{t_1 s_1} \quad \text{bzw.} \quad g_2^{t_1} = g_1^{t_2 s_2},$$

wobei $s_1, s_2 \in \mathfrak{J}$ passende Zahlen sind, entweder $t_2 = 0$ oder $O(g_2) = 0$. Im ersten Fall folgt aus $t_2 = 0$ und $(t_1, t_2) = 1$ sofort $t_1 = +1$ oder -1, folglich $g_2 \in \{g_1\}$ und $G^d = \{g_1, g_2\} = \{g_1\}$. Also können wir den zweiten Fall $O(g_2) = 0$ voraussetzen. Dann darf aber wegen der Gleichungen $(**)$ auch $g_1^{t_2} = g_2^{e \cdot t_1}$ angenommen werden wobei $e = +1$ oder -1 ist. Hiernach erhält man wegen der Gleichung $(*)$ sofort

$$g_i = (g_1^{k_1} \cdot g_2^{e \cdot k_2})^{e^{i+1} \cdot t_i} \qquad (i = 1, 2).$$

Hieraus folgt mit der Bezeichnung $g_0 = g_1^{k_1} \cdot g_2^{e k_2}$ offenbar $G^d = \{g_1, g_2\} = \{g_0\}$, w. z. b. w.

II. Es sei G^d beliebig. Dann liegt die vollinvariante Untergruppe $D = \{g_1\} \cap \{g_2\}$ von G im Zentrum Z_d von G^d. Da ferner aus $g_1^{f_1} D = g_2^{f_2} D$ $(f_i \in \mathfrak{J})$ sofort $g_1^{f_1} \cdot g_2^{-f_2} \in D \subseteqq \{g_2\}$ folgt, so ergibt sich $g_1^{f_1} \in \{g_2\}$, also $g_1^{f_1} \in D$ und $g_1^{f_1} D = g_2^{f_2} D = D$. Hiernach existiert das direkte Produkt

$$P = \{g_1 D\} \otimes \{g_2 D\},$$

das offenbar mit $G^d/D (= (G/D)^d)$ identisch ist. Hieraus folgt die Kommutativität von G^d/D. Aus $((G/D)^d)^{m_i} = (G/D)^{n_i}$ erhält man nach $(m_1, m_2) = 1$ und I, daß $(G/D)^d$ zyklisch ist. Dann ist aber G^d/Z_d ebenfallsch zyklisch, denn es gilt $D \subseteqq Z_d$. Hieraus folgt bekanntlich $G^d = Z_d$, und G^d ist wieder nach I zyklisch. Somit haben wir den Satz bewiesen.

Zum Schluß möchte ich einige Probleme aufwerfen, die meines Wissens im allgemeinen noch ungelöst sind.

Bezeichne E_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ eine der folgenden Eigenschaften:

E_1: die Gruppe ist das direkte Produkt von zyklischen Gruppen;
E_2: die Gruppe ist kommutativ;
E_3: die Gruppe ist nilpotent;
E_4: die Gruppe ist auflösbar.

Dann kann gefragt werden: Wenn die Potenzen $G^{n_1}, G^{n_2}, \ldots, G^{n_k}$ einer beliebigen Gruppe G alle die feste Eigenschaft E_j haben, braucht dann für $d=(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ auch die Gruppe G^d dieselbe feste Eigenschaft E_j ($j=1, 2, 3$ oder 4) zu haben?

Literaturverzeichnis

[1] W. Dlab, On cyclic groups, *Czechoslovak Math. J.*, **10/85** (1960), 244—254.

[2] Gh. Pic, De la caracterisation des groupes cycliques, *Comun. Acad. Republ. Popul. Romîne*, **6** (1956), 235—238 (Rumänisch, mit französischer Zusammenfassung).

[3] B. I. Plotkin, Verallgemeinerte auflösbare und verallgemeinerte nilpotente Gruppen, *Uspechi Math. Nauk*, **13** (1958), 89—172 (Russisch).

[4] L. A. Rosati, Sui gruppi ogni sottogruppo ciclico dei quali e caratteristico, *Bul. Univ. Mat. Ital.*, **11** (1956), 544—552.

[5] E. Schenkman, A characterization of some metacyclic groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8** (4) (1957), 664—667.

[6] F. Szász, On groups every cyclic subgroup of which is a power of the group, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1956), 475—477.

[7] F. Szász, On cyclic groups, *Fund. Math.*, **43** (1956), 238—40.

[8] F. Szász, A characterization of the cyclic groups, *Revue de Math. Pures et Appl. Bucureşti*, **1** (1956), 13—16.

[9] F. Szász, Über Gruppen, deren sämtliche nicht-triviale Potenzen zyklische Untergruppen der Gruppe sind, *Acta Sci. Math.*, **17** (1956) 83—84.

[10] F. Szász, Csoportokról, amelyeknek összes nem-triviális hatványai ciklikus alcsoportok, *MTA III. Oszt. Közl.*, **5** (1955), 491—492.

[11] F. Szász, On rings, every subring of which is a multiple of the ring, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1956), 327—238.

[12] B. Tóth, Über eine Charakterisierung der zyklischen Gruppen, *Szegedi Pedagógiai Főiskola Évkönyve*, (1959) 311—313 (Ungarisch, mit russischer und deutscher Zusammenfassung).

(Eingegangen am 11. Februar 1961)