Bemerkung zu einer Arbeit von Herrn Steinfeld

Von RICHARD WIEGANDT in Orosháza (Ungarn)

Herr STEINFELD hat in seiner Arbeit[1] [2] einen einfachen Beweis des Satzes von RÉDEI über die einstufig nichtregulären Ringe [1] gegeben und die einstufig nichtprimen Ringe charakterisiert[2]) Dabei hat er unter anderem die folgenden Behauptungen bewiesen:

Hilfssatz 1. *Wenn ein Ring R nichtregulär ist und jedes echte Linksideal von R regulär ist, dann ist R die direkte Summe von zwei Idealen oder ein Zeroring von Primzahlordnung.*

Hilfssatz 2. *Wenn ein Ring R nichtprim ist und jedes echte Ideal von R prim ist, dann ist R die direkte Summe von zwei Idealen oder ein Zeroring von Primzahlordnung.*

Wir gebrauchen auch den folgenden Satz von T. SZELE [3] (der übrigens ein Korollar des Wedderburn—Artinschen Struktursatzes ist).

Hilfssatz 3. *Ein Ring ohne echte Linksideale ist entweder ein Schiefkörper oder ein Zeroring von Primzahlordnung.*

Aus diesen Hilfsätzen folgt einfach unser

Satz. *Für jeden Ring R sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(*a*) *R ist die direkte Summe von zwei Schiefkörpern, oder ein Zeroring von Primzahlordnung;*
(*b*) *R ist nichtregulär und jedes echte Quasiideal*[3]) *von R ist regulär;*
(*c*) *R ist nichtregulär und jedes echte Linksideal von R ist regulär;*
(*d*) *R ist kein Schiefkörper und jedes echte Quasiideal von R ist ein Schiefkörper;*
(*e*) *R ist kein Schiefkörper und jedes echte Linksideal von R ist ein Schiefkörper;*
(*f*) *R ist nichtprim und jedes echte Quasiideal von R ist prim;*
(*g*) *R ist nichtprim und jedes echte Linksideal von R ist prim.*

Aus (*a*) folgt (*b*) unmittelbar. Da die Linksideale auch Quasiideale sind, so folgt aus (*b*) (*c*). Nehmen wir an, daß (*c*) erfüllt ist. Aus den Hilfssätzen 1 und 3 folgt (*a*) trivial.

---

[1]) Herr STEINFELD hat das Manuskript seiner Arbeit [2] noch vor dem Erscheinen mir zur Verfügung gestellt. Darum bin ihm zu innigem Dank verpflichtet.

[2]) Die Definitionen siehe in [2].

[3]) Ein Unterring $\mathfrak{a}$ des Ringes R ist ein Quasiideal wenn die Relation $\mathfrak{a}R \cap R\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$ gültig ist.

Es ist klar, daß aus (*a*) die Bedingung (*d*) und aus (*d*) die Bedingung (*e*) folgt. Aus (*e*) folgt (*a*), das ist nämlich eben die Behauptung von Satz 2 in [4].

Offenbar folgt aus (*a*) auch (*f*) und aus (*f*) auch (*g*). Wegen der Behauptungen der Hilfssätze 2 und 3 folgt aus (*g*) offenbar (*a*).

Wir bemerken noch, daß *für einen Artinschen Ring R die Bedingungen* (*a*)—(*g*) *auch mit den folgenden Bedingungen* (*i*), (*ii*) *äquivalent sind:*

(*i*) *R ist nichtregulär und die sämtlichen echten Ideale von R sind regulär;*

(*ii*) *R ist kein Schiefkörper und die sämtlichen echten Ideale von R sind Schiefkörper.*

Auserdem sind *im Artinschen Fall* auch die folgenden zwei Bedingungen äquivalent:

(*i°*) *R ist nichtprim und jedes echte Ideal von R ist prim;*

(*ii°*) *R ist die direkte Summe von zwei vollen Matrixringen über Schiefkörpern oder ein Zeroring von Primzahlordnung.*

In diesen Fällen sind nämlich die betrachteten Ringe immer Radikalfrei also auch halbeinfach. So folgen diese Behauptungen aus den Wedderburn—Artinschen Struktursätzen und aus Hilfssatz 2 unmittelbar.

Literaturverzeichnis

[1] L. Rédei, Die einstufig nichtregulären Ringe, *Acta Sci. Math.*, **20** (1959), 238–244.
[2] O. Steinfeld, Die einstufig nichtregulären bzw. nichtprimen Ringe, *Acta Sci. Math.*, **22** (1961), 82–84.
[3] T. Szele, Die Ringe ohne Linksideale, *Buletin Ştiinţific Bucureşti*, **1** (1949), 783–789.
[4] R. Wiegandt, Bemerkung über die einstufig nichregulären Ringe, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 350–352.

(Eingegangen am 27. März 1961)