Über die starke Summierbarkeit der Orthogonalreihen

Von LÁSZLÓ LEINDLER in Szeged

Einleitung

Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein im Intervall (a, b) orthonormiertes Funktionensystem und $\{c_n\} \in l^2$ [1]) eine reelle Zahlenfolge. Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \tag{1}$$

ihre k-te Partialsumme bezeichnen wir mit $s_k(x)$.

G. ALEXITS [1] und K. TANDORI [1], [2] haben hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß die Reihe (1) fast überall *sehr stark summierbar,* d. h. die Folge der Mittel

$$\sigma_N(\{\mu\}; x) = \frac{s_{\mu_1}(x) + \ldots + s_{\mu_N}(x)}{N}$$

für jede monoton wachsende Indexfolge $\{\mu_k\}$ $(\mu_1 < \mu_2 < \ldots. < \mu_k < \ldots)$ in (a, b) fast überall konvergent sei.

K. TANDORI hat das Problem aufgeworfen, ob diese Bedingungen auch dafür hinreichend sind, daß die Folge

$$\sigma_N(\{\nu\}; x) = \frac{s_{\nu_1}(x) + \ldots + s_{\nu_N}(x)}{N}$$

für eine beliebige nicht notwendigerweise monotone Folge $\{\nu_k\}$ von verschiedenen natürlichen Zahlen fast überall konvergiert.

In dieser Note werden wir u. a. eine positive Antwort auf dieses Problem geben.

Wir beweisen nämlich die folgenden Sätze:

Satz I. *Ist*

$$\sum_{n=4}^{\infty} c_n^2 (\log\log n)^2 < \infty, \tag{2}$$

so gibt es eine quadratisch integrierbare Funktion $f(x)$ derart, daß

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} [s_{\nu_n}(x) - f(x)]^2 \to 0$$

---

[1]) D. h. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty$.

für jede unendliche Folge $\{\nu_n\}$ von verschiedenen natürlichen Zahlen im Intervall (a, b) fast überall gilt.

Wegen

$$\left|\frac{s_{\nu_1}(x)+\dots+s_{\nu_N}(x)}{N}-f(x)\right| = \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[s_{\nu_n}(x)-f(x)]\right| \leqq \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[s_{\nu_n}(x)-f(x)]^2}$$

ist unter der Bedingung (2) auch die Folge $\sigma_N(\{\nu\}; x)$ in (a, b) fast überall konvergent.

Satz II. *Es sei $\{a_n\}\in l^2$ eine reelle Zahlenfolge mit*

$$na_n^2 \geqq (n+1)a_{n+1}^2 \qquad (n=1, 2, \dots). \tag{3}$$

Ist die Orthogonalreihe (1) im Intervall (a, b) fast überall zur Funktion $f(x)$ Abelsch summierbar und

$$c_n^2 = O(a_n^2), \tag{4}$$

so besteht für jede unendliche Folge $\{\nu_n\}$ von verschiedenen natürlichen Zahlen, bei jedem $\alpha > \frac{1}{2}$ fast überall in (a, b)

$$\sum_{n=1}^{N}[\sigma_{\nu_n}^{(\alpha-1)}(x)-f(x)]^2 = o(N),$$

wobei $\sigma_m^{(\beta)}(x)$ das m-te (C, β)-Mittel der Reihe (1) bezeichnet.

Für monoton wachsende Indexfolge $\{\mu_k\}$ $(\mu_1 < \dots < \mu_k < \dots)$ hat K. Tandori [1], [2] diese Sätze schon bewiesen.

Aus diesen Sätzen ergeben sich unmittelbar die Folgenden:

Folgerung I. *Ist die Reihe*

$$\sum_{n=4}^{\infty}(\log\log n)^2 \sum_{i=\mu_{n-1}+1}^{\mu_n} c_i^2 \tag{5}$$

konvergent, so gibt es eine quadratisch integrierbare Funktion $f(x)$ derart, daß

$$\sum_{n=1}^{N}[s_{\mu_{\nu_n}}(x)-f(x)]^2 = o(N) .$$

für jede unendliche Folge $\{\nu_n\}$ von verschiedenen natürlichen Zahlen in (a, b) fast überall gilt.

Folgerung II. *Es sei $\{\bar{\mu}_n\}$ monoton wachsende Indexfolge mit*

$$n\sum_{i=\bar{\mu}_{n-1}+1}^{\bar{\mu}_n} c_i^2 \geqq (n+1)\sum_{i=\bar{\mu}_n+1}^{\bar{\mu}_{n+1}} c_i^2 \qquad (n=1, 2, \dots). \tag{6}$$

Ist die Orthogonalreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \Phi_n(x), \quad \textit{wobei} \quad \gamma_n^2 = \sum_{i=\bar{\mu}_{n-1}+1}^{\bar{\mu}_n} c_i^2 \quad \textit{und}$$

$$\Phi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma_n} \displaystyle\sum_{i=\bar{\mu}_{n-1}+1}^{\bar{\mu}_n} c_i \varphi_i(x) & \textit{für} \quad \gamma_n \neq 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{\bar{\mu}_n - \bar{\mu}_{n-1}}} \displaystyle\sum_{i=\bar{\mu}_{n-1}+1}^{\bar{\mu}_n} \varphi_i(x) & \textit{für} \quad \gamma_n = 0, \end{cases} \tag{7}$$

im Intervall (a, b) *fast überall zur Funktion* $f(x)$ *Abelsch summierbar, so besteht für jede unendliche Folge* $\{\nu_n\}$ *von verschiedenen natürlichen Zahlen, bei jedem* $\alpha > \frac{1}{2}$, *fast überall in* (a, b)

$$\sum_{n=1}^{N} [\sigma_{\nu_n}^{(\alpha-1)}(\{\bar{\mu}_n\}; x) - f(x)]^2 = o(N),$$

wobei $\sigma_m^{(\beta)}(\{\bar{\mu}\}; x)$ *das m-te* (C, β)*-Mittel der Reihe* (7) *bezeichnet.*

Für monoton zunehmende Indexfolge $\{s_n\}$ gilt auch der folgende

Satz III. *Ist die Reihe* (5) *konvergent, so gibt es eine quadratisch integrierbare Funktion* $f(x)$ *derart, daß*

$$\sum_{l=1}^{N} [\sigma_l^{(\alpha-1)}(\{\mu_{s_n}\}; x) - f(x)]^2 = o(N)$$

für jede monoton wachsende Indexfolge $\{s_n\}$ *bei jedem* $\alpha > \frac{1}{2}$ *in* (a, b) *fast überall gilt, wobei* $\sigma_m^{\beta}(\{\mu_{s_n}\}; x)$ *das m-te* (C, β)*-Mittel der Reihe* (7) *mit* μ_{s_n} *statt* $\bar{\mu}_n$ *ist.*

Satz IV. *Ist die orthogonale Reihe* (1) *mit* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty$ *im Intervall* (a, b) *fast überall zur Funktion* $f(x)$ $(C, 1)$*-summierbar, so ist in* (a, b) *fast überall*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_{\nu_k} - f]^2; x) = 0 \qquad (0 < \alpha < 1) \tag{8}$$

für jede wachsende Indexfolge $\{\nu_k\}$ $(\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_k < \ldots)$, *wobei* $\sigma_n^{(\beta)}([s_{\nu_k} - f]^2; x)$ *das n-te* (C, β)*-Mittel der Folge* $\{[s_{\nu_k}(x) - f(x)]^2\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *bezeichnet.*

Für $\nu_k = k$ hat K. Tandori [3] Satz IV schon früher bewiesen.

§ 1. Beweis von Satz I

Zum Beweis des Satzes I benötigen wir den

Hilfssatz. *Es sei* $\{\psi_k(x)\}$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ *ein im Intervall* (a, b) *orthogonales Funktionensystem, es sei weiterhin*

$$a_k^2 = \int_a^b \psi_k^2(x)\, dx \qquad (k = 1, \ldots, p).$$

Dann gibt es eine nicht-negative Funktion $\delta(x)$ derart, daß

$$|\psi_1(x)+\ldots+\psi_l(x)|\leqq\delta(x) \qquad (l=1,\ldots,p)$$

in (a, b) überall besteht und die Abschätzung

$$\int_a^b \delta^2(x)\,dx \leqq A\log^2 p\sum_{k=1}^{p} a_k^2$$

gilt, wo A eine positive Konstante ist.

Dieser Hilfssatz ist bekannt. (Siehe z. B. KACZMARZ—STEINHAUS [1] S. 162.)

Nach Sätzen von KACZMARZ [1] bzw. MENCHOFF [1] und KOLMOGOROFF [1] konvergiert unter der Bedingung (2) die Folge $\{s_{2^m}(x)\}$ fast überall gegen eine quadratisch integrierbaren Funktion $f(x)$. Wir setzen

$$C_m^2=\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} c_n^2.$$

Es sei $m(\geqq 2)$ eine beliebige natürliche Zahl, für die $C_m\neq 0$ ist. Dann sei $\mu_0(m)=2^m$ und $\mu_i(m)$ $(1\leqq i\leqq N_m)$ die kleinste natürliche Zahl, für die

$$\sum_{n=\mu_{i-1}(m)+1}^{\mu_i(m)} c_n^2 \geqq \frac{C_m^2}{m} \quad \text{und} \quad \mu_i(m)\leqq 2^{m+1} .$$

bestehen. Es ist klar, daß $N_m\leqq m$ ist. Im Falle $C_m=0$ setzen wir $\mu_0(m)=2^m$ und $\mu_1(m)=2^{m+1}$. Mit Anwendung des Hilfssatzes auf die Funktionen

$$\psi_i^{(m)}(x)=s_{\mu_i(m)}(x)-s_{\mu_{i-1}(m)}(x) \qquad (1\leqq i\leqq N_m)$$

erhalten wir eine nichtnegative Funktion $\delta_m(x)$, für die

$$(1.1) \qquad |s_{\mu_i(m)}(x)-s_{2^m}(x)| = \left|\sum_{j=1}^{i}\psi_j^{(m)}(x)\right| \leqq \delta_m(x) \qquad (1\leqq i\leqq N_m)$$

in (a, b) überall gilt und

$$\int_a^b \delta_m^2(x)\,dx \leqq A\log^2 m\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} c_n^2 < 4A\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} (\log\log n)^2 c_n^2$$

ist. Daraus folgt nach der Annahme, daß

$$\sum_{m=2}^{\infty}\int_a^b \delta_m^2(x)\,dx<\infty$$

ist, und so konvergiert die Reihe

$$\sum_{m=2}^{\infty}\delta_m^2(x)$$

fast überall. Daraus folgt nach (1. 1), daß für $m\to\infty$ fast überall gilt:

$$s_{\mu_i(m)}(x)-s_{2^m}(x)\to 0.$$

Also konvergiert $s_{\mu_i(m)}(x)$ $(m\to\infty)$ auch fast überall in (a, b) gegen die Funktion $f(x)$.

Um die Behauptung des Satzes I zu beweisen, definieren wir die Indexfolge $\{\mu_n\}$: für $\mu_i(m)\leqq\nu_n<\mu_{i+1}(m)$ sei $\mu_n=\mu_i(m)$ und für $\mu_{N_m}(m)\leqq\nu_n<\mu_0(m+1)$ sei $\mu_n=\mu_{N_m}(m)$. Es gilt die Abschätzung

$$(1.2)\qquad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[s_{\nu_n}(x)-f(x)]^2\leqq\frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}[s_{\nu_n}(x)-s_{\mu_n}(x)]^2+\frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}[s_{\mu_n}(x)-f(x)]^2.$$

Da nach obigen $s_{\mu_n}(x)\to f(x)$ $(n\to\infty)$ fast überall gilt, so konvergiert das zweite Glied fast überall gegen 0. Mit einfacher Rechnung bekommen wir:[2])

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_a^b[s_{\nu_n}(x)-s_{\mu_n}(x)]^2\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=\mu_n+1}^{\nu_n}c_k^2=$$

$$(1.3)\qquad =\sum_{m=0}^{\infty}\ \sum_{2^m\leqq\mu_n<2^{m+1}}^{(n)}\frac{1}{n}\sum_{k=\mu_n+1}^{\nu_n}c_k^2\leqq$$

$$\leqq\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{2^m\leqq\mu_n<2^{m+1}}^{(n)}\frac{1}{n}\right)\frac{C_m^2}{m}\leqq\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{2^m}\frac{1}{n}\right)\frac{C_m^2}{m}=O(1)\sum_{m=0}^{\infty}C_m^2<\infty.$$

Daraus folgt auf Grund des Satzes von B. LEVI, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[s_{\nu_n}(x)-s_{\mu_n}(x)]^2$$

fast überall konvergiert. Mit Anwendung des Kroneckerschen Lemmas (siehe z. B. G. ALEXITS [2], S. 68) ergibt sich, daß

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[s_{\nu_n}(x)-s_{\mu_n}(x)]^2\to 0$$

fast überall gilt. Daraus, auf Grund von (1. 2) ergibt sich unsere Behauptung.

Damit haben wir den Satz I bewiesen.

§ 2. Beweis von Satz II

Ist die Reihe (1) fast überall nach der Funktion $f(x)$ Abelsch summierbar, so folgt aus einem Satz von A. ZYGMUND [1], daß für $\beta>0$ fast überall $\lim\limits_{m\to\infty}\sigma_m^{(\beta)}(x)=f(x)$ ist, somit gilt für eine beliebige Indexfolge $\{\nu_m\}$ $(\nu_m\to\infty)$

$$(2.1)\qquad \sum_{m=1}^{n}[\sigma_{\nu_m}^{(\beta)}(x)-f(x)]^2=o(n)\qquad(\beta>0)$$

[2]) $\Sigma^{(n)}$ bedeutet, daß man in bezug auf n zu summieren hat.

fast überall. Also haben wir die Behauptung nur für den Fall $\frac{1}{2}<\alpha\leqq 1$ zu beweisen. Da

$$(2.2)\quad \sum_{m=1}^{n}[\sigma_{\nu_m}^{(\alpha-1)}(x)-f(x)]^2\leqq 2\sum_{m=1}^{n}[\sigma_{\nu_m}^{(\alpha)}(x)-f(x)]^2+2\sum_{m=1}^{n}[\sigma_{\nu_m}^{(\alpha-1)}(x)-\sigma_{\nu_m}^{(\alpha)}(x)]^2$$

gilt, haben wir nach (2. 1) nur zu zeigen, daß die zweite Summe fast überall die Größenordnung $o(n)$ hat. Nun ist aber

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\int_a^b[\sigma_{\nu_m}^{(\alpha-1)}(x)-\sigma_{\nu_m}^{(\alpha)}(x)]^2\,dx=\frac{1}{\alpha^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(A_{\nu_m}^{(\alpha)})^2}\sum_{k=1}^{\nu_m}(A_{\nu_m-k}^{(\alpha-1)})^2k^2c_k^2$$

mit $A_m^{(\beta)}=\binom{m+\beta}{m}$. Es gibt bekanntlich von m unabhängige, positive Konstanten C_1, C_2 derart, daß $C_1(m+1)^\beta\leqq A_m^{(\beta)}\leqq C_2(m+1)^\beta$ $(\beta>-1;\ m=0,1,\ldots)$ ist, folglich gilt wegen (4)

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(A_{\nu_m}^{(\alpha)})^2}\sum_{k=1}^{\nu_m}(A_{\nu_m-k}^{(\alpha-1)})^2k^2c_k^2=O(1)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\nu_m^{2\alpha}}\sum_{k=1}^{\nu_m}(\nu_m-k+1)^{2\alpha-2}k^2a_k^2.$$

Wir bezeichnen mit m_l die l-te natürliche Zahl, für die $m_l\leqq\nu_{m_l}$ besteht, und mit μ_n die n-te natürliche Zahl, für die $\mu_n>\nu_{\mu_n}$ besteht. Dann ist

$$(2.3)\quad \begin{aligned}&\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\nu_m^{2\alpha}}\sum_{k=1}^{\nu_m}(\nu_m-k+1)^{2\alpha-2}k^2a_k^2=\\&=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{m_l\nu_{m_l}^{2\alpha}}\sum_{k=1}^{\nu_{m_l}}(\nu_{m_l}-k+1)^{2\alpha-2}k^2a_k^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n\nu_{\mu_n}^{2\alpha}}\sum_{k=1}^{\nu_{\mu_n}}(\nu_{\mu_n}-k+1)^{2\alpha-2}k^2a_k^2.\end{aligned}$$

Wegen $\nu_{m_l}\geqq m_l$ $(l=1,2,\ldots)$ ist die erste Summe rechts in (2. 3) kleiner als

$$(2.4)\quad O(1)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{m_l\nu_{m_l}^{2\alpha}}\left(\sum_{k=1}^{m_l-1}+\sum_{k=m_l}^{\nu_{m_l}}\right)(\nu_{m_l}-k+1)^{2\alpha-2}k^2a_k^2.$$

Wegen (3) ergibt sich

$$(2.5)\quad \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{m_l\nu_{m_l}^{2\alpha}}\sum_{k=m_l}^{\nu_{m_l}}(\nu_{m_l}-k+1)^{2\alpha-2}k^2a_k^2\leqq\sum_{l=1}^{\infty}\frac{a_{m_l}^2}{\nu_{m_l}^{2\alpha}}\sum_{k=m_l}^{\nu_{m_l}}(\nu_{m_l}-k+1)^{2\alpha-2}k.$$

Da wegen $\alpha>\dfrac{1}{2}$ und $\nu_{m_l}\geqq m_l$ $(l=1,2,\ldots)$

$$\sum_{k=m_l}^{\nu_{m_l}}(\nu_{m_l}-k+1)^{2\alpha-2}k=\sum_{p=1}^{\nu_{m_l}-m_l+1}p^{2\alpha-2}(\nu_{m_l}-p+1)=$$

$$=O(1)\left(\sum_{p=1}^{\nu_{m_l}-m_l}p^{2\alpha-1}+m_l(\nu_m-m_l)^{2\alpha-1}\right)=O(\nu_{m_l}^{2\alpha})$$

gilt, so ist nach (2. 5)

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{m_l \nu_{m_l}^{2\alpha}} \sum_{k=m_l}^{\nu_{m_l}} (\nu_{m_l}-k+1)^{2\alpha-2} k^2 a_k^2 = O(1) \sum_{l=1}^{\infty} a_{m_l}^2 < \infty. \tag{2.6}$$

Es sei l_k die kleinste natürliche Zahl, für die $m_{l_k} > k$ ist. Auf Grund der Ungleichungen $\alpha \leqq 1$ und $\nu_{m_l} \geqq m_l$ $(l=1, 2, \ldots)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{m_l \nu_{m_l}^{2\alpha}} \sum_{k=1}^{m_l-1} (\nu_{m_l}-k+1)^{2\alpha-2} k^2 a_k^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k^2 \sum_{l=l_k}^{\infty} \frac{(\nu_{m_l}-k+1)^{2\alpha-2}}{m_l \nu_{m_l}^{2\alpha}} \leqq \\ \leqq \sum_{k=1}^{\infty} k a_k^2 \sum_{l=l_k}^{\infty} \frac{(m_l-k+1)^{2\alpha-2}}{m_l^{2\alpha}} &\leqq \sum_{k=1}^{\infty} k a_k^2 \sum_{l=k}^{\infty} \frac{(l-k+1)^{2\alpha-2}}{l^{2\alpha}}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Da wegen $\alpha > \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \sum_{l=k}^{\infty} \frac{(l-k+1)^{2\alpha-2}}{l^{2\alpha}} &= \left(\sum_{l=k}^{2k-1} + \sum_{l=2k}^{\infty} \right) \frac{(l-k+1)^{2\alpha-2}}{l^{2\alpha}} \leqq \\ &\leqq \frac{1}{k^{2\alpha}} \sum_{l=1}^{k} l^{2\alpha-2} + 2^{2-2\alpha} \sum_{l=2k}^{\infty} \frac{l^{2\alpha-2}}{l^{2\alpha}} = O\left(\frac{1}{k}\right) \end{aligned} \tag{2.8}$$

besteht, so gilt nach (2. 7) und (2. 8)

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{m_l \nu_{m_l}^{2\alpha}} \sum_{k=1}^{m_l-1} (\nu_{m_l}-k+1)^{2\alpha-2} k^2 a_k^2 = O(1) \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty. \tag{2.9}$$

Wegen $\mu_n > \nu_{\mu_n}$ $(n=1, 2, \ldots)$ ergibt sich

$$\begin{gathered} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n \nu_{\mu_n}^{2\alpha}} \sum_{k=1}^{\nu_{\mu_n}} (\nu_{\mu_n}-k+1)^{2\alpha-2} k^2 a_k^2 = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k^2 \sum_{\nu_{\mu_n} \geqq k}^{(n)} \frac{(\nu_{\mu_n}-k+1)^{2\alpha-2}}{\mu_n \nu_{\mu_n}^{2\alpha}} \leqq \sum_{k=1}^{\infty} k a_k^2 \sum_{l=k}^{\infty} \frac{(l-k+1)^{2\alpha-2}}{l^{2\alpha}}. \end{gathered}$$

Auf Grund von (2. 8) ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n \nu_{\mu_n}^{2\alpha}} \sum_{k=1}^{\nu_{\mu_n}} (\nu_{\mu_n}-k+1)^{2\alpha-2} k^2 a_k^2 = O(1) \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty. \tag{2.10}$$

Auf Grund von (2. 3), (2. 4), (2. 6), (2. 9) und (2. 10) ergibt sich mit Anwendung des B. Levischen Satzes, daß die Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} [\sigma_{\nu_m}^{(\alpha-1)}(x) - \sigma_{\nu_m}^{(\alpha)}(x)]^2$$

fast überall konvergiert, woraus mit Anwendung des schon erwähnten Kroneckerschen Lemmas folgt, daß fast überall

$$\sum_{m=1}^{n} [\sigma_{\nu_m}^{(\alpha-1)}(x) - \sigma_{\nu_m}^{(\alpha)}(x)]^2 = o(n)$$

ist.

Damit haben wir den Satz II bewiesen.

Beweis der Folgerungen. Mit der Folge $\{\mu_n\}$ bzw. $\{\bar{\mu}_n\}$ bilden wir die Reihe (7), deren für Koeffizienten (2) bzw. (3) nach den Annahmen (5) bzw. (6) erfüllt, so ergeben sich mit Anwendung der obigen Sätzen die Behauptungen der Folgerungen.

§ 3. Beweis von Satz III

Herr K. Tandori hat mir mitgeteilt, wie er den publizierten Beweis seines erwähnten Satzes abkürzen könne. Mit dieser Methode werden wir den Satz III beweisen.

Zum Beweis benötigen wir den folgenden bekannten Satz (siehe z. B. G. Alexits [2], S. 102).

Ist die Orthogonalreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(x)$$

mit $\Sigma a_n^2 < \infty$ *auf E fast überall* (C, α)*-summierbar für ein* $\alpha > \frac{1}{2}$, *so ist sie auch fast überall stark* (C, α)*-summierbar auf E, d. h. es gilt*

$$\sum_{\nu=1}^{N} [\sigma_{\nu}^{(\alpha-1)}(x) - f(x)]^2 = o(N)$$

auf E fast überall, wo $f(x) = \lim_{\nu \to \infty} \sigma_{\nu}^{(\alpha)}(x)$ *in den Konvergenzpunkten ist.*

Wir nehmen die unter (7) definierten Koeffizienten γ_n mit μ_{s_n} anstatt $\bar{\mu}_n$, und die orthonormierten Funktionen $\Phi_n(x)$. Nach der Annahme (5) gilt

$$\sum_{n=4}^{\infty} \gamma_n^2 \log\log^2 n = \sum_{n=4}^{\infty} \log\log^2 n \sum_{i=\mu_{s_{n-1}}+1}^{\mu_{s_n}} c_i^2 \leqq \sum_{n=4}^{\infty} \log\log^2 n \sum_{i=\mu_{n-1}+1}^{\mu_n} c_i^2 < \infty$$

und daraus folgt nach einem bekannten Kaczmarz—Menchoffschen Satz, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \Phi_n(x)$$

in (a, b) fast überall $(C, 1)$-summierbar ist. Mit Anwendung des obigen Satzes bekommen wir die Behauptung des Satzes III.

§ 4. Beweis von Satz IV

Wir werden zuerst die Indexfolge $\{\mu_k\}$ in folgender Weise definieren: es sei $\mu_0=\nu_0$, $\mu_1=\nu_1$ und für $2^m<k\leqq 2^{m+1}$ $(m=0, 1, \dots)$ $\mu_k=\nu_{2^m}$, wo $\{\nu_k\}$ eine beliebige monoton wachsende Indexfolge ist. Es gilt die Ungleichung

$$\sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_{\nu_k}-f]^2;\,x)\leqq 2\sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_{\nu_k}-s_{\mu_k}]^2;\,x)+2\sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_{\mu_k}-f]^2;\,x).$$

Auf Grund des erwähnten Kolmogoroffschen Satzes konvergiert das zweite Glied gegen Null. Ferner ist

$$\sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_{\nu_k}-s_{\mu_k}]^2;\,x)=\frac{1}{A_{2^n}^{(\alpha)}}\sum_{k=0}^{2^n}A_{2^n-k}^{(\alpha-1)}[s_{\nu_k}(x)-s_{\mu_k}(x)]^2=$$

$$=O(1)\frac{1}{2^{n\alpha}}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}2^{n(\alpha-1)}[s_{\nu_k}(x)-s_{\mu_k}(x)]^2+$$

$$+\frac{O(1)}{2^{n\alpha}}\sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n}(2^n-k+1)^{\alpha-1}[s_{\nu_k}(x)-s_{\mu_k}(x)]^2=O(1)\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}[s_{\nu_k}(x)-s_{\mu_k}(x)]^2+$$

$$+\frac{O(1)}{2^{n\alpha}}\sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n}(2^n-k+1)^{\alpha-1}[s_{\nu_k}(x)-s_{\mu_k}(x)]^2=A_n(x)+B_n(x).$$

Wir behaupten, daß für $n\to\infty$ $A_n(x)$ fast überall gegen 0 strebt. Nach dem Kroneckerschen Lemma genügt es hierzu zu zeigen, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[s_{\nu_k}(x)-s_{\mu_k}(x)]^2}{k}$$

fast überall konvergiert. Dies folgt aber mit Anwendung des Satzes von B. Levi daraus, daß die integrierte Reihe konvergiert:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\int_a^b\frac{[s_{\nu_k}(x)-s_{\mu_k}(x)]^2}{k}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}\frac{1}{k}(c_{\nu_{2^n}+1}^2+\dots+c_{\nu_k}^2)\leqq \tag{4.1}$$

$$\leqq\sum_{n=0}^{\infty}(c_{\nu_{2^n}+1}^2+\dots+c_{\nu_{2^{n+1}}}^2)\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}\frac{1}{k}\leqq\sum_{k=3}^{\infty}c_k^2<\infty.$$

Um zu beweisen, daß für $n\to\infty$ auch $B_n(x)$ fast überall gegen 0 konvergiert, zeigen wir, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n\alpha}}\sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n}(2^n-k+1)^{\alpha-1}[s_{\nu_k}(x)-s_{\mu_k}(x)]^2 \tag{4.2}$$

im Intervall (a, b) fast überall konvergiert. Mit einfacher Rechnung bekommen wir zunächst für die integrierte Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}} \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} (2^n-k+1)^{\alpha-1} \int_a^b [s_{\nu_k}(x)-s_{\mu_k}(x)]^2\, dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}} \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} (2^n-k+1)^{\alpha-1} (c_{\nu_{2^{n-1}+1}}^2+\dots+c_{\nu_k}^2) = \tag{4.3}$$

$$= O(1) \sum_{n=0}^{\infty} (c_{\nu_{2^n+1}}^2+\dots+c_{\nu_{2^{n+1}}}^2) < \infty.$$

Daraus ergibt sich mit Anwendung des B. Levischen Satzes, daß die Reihe (4. 2) in (a, b) fast überall konvergiert.

Auf Grund der Obigen gilt also

$$\sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_{\nu_k}-f]^2;\, x) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Damit haben wir den Satz IV bewiesen.

Bemerkung. *Ist*

$$\sum_{n=4}^{\infty} c_n^2 (\log\log n)^2 < \infty,$$

so gilt die Beziehung (8) *für eine beliebige unendliche Folge* $\{\nu_n\}$ *von verschiedenen natürlichen Zahlen in* (a, b) *fast überall.*

Der Beweis dieser Bemerkung verläuft analog zu dem des Satzes IV, nur soll man die Folge $\{\mu_k\}$ wie in Satz I definieren, weiterhin in den Abschätzungen (4. 1) und (4. 3) die bei dem Beweis des Satzes I angewandte Methode benutzen.

Schriftenverzeichnis

ALEXITS, G., [1] Eine Bemerkung zur starken Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Acta Sci. Math.*, **16** (1955), 127–129.
[2] *Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen* (Budapest, 1960).
KACZMARZ, S., [1] Über die Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Math. Zeitschrift*, **26** (1927), 99–105.
KACZMARZ, S., und STEINHAUS, H., [1] *Theorie der Orthogonalreihen* (Warszawa—Lwów, 1935).
KOLMOGOROFF, A. N., [1] Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, *Fundamenta Math.*, **5** (1924), 96–97.
MENCHOFF, D., [1] Sur les séries de fonctions orthogonales (Deuxième partie), *Fundamenta Math.*, **8** (1926), 56–108.
TANDORI, K., [1] Über die orthogonalen Funktionen. VI, *Acta Sci. Math.*, **20** (1959), 14–18;
[2] Bemerkung zu einem Satz von G. Alexits, *ebenda*, **21** (1960), 12–14;
[3] Über orthogonale Reihen, *ebenda*, **16** (1955), 74–76.
ZYGMUND, A., [1] Sur l'application de la première moyenne arithmétique dans la théorie des séries de fonctions orthogonales, *Fundamenta Math.*, **10** (1927), 356–362.

(Eingegangen am 13. Februar, ergänzt am 5. Mai 1961)