# Über die Rieszsche Summation der Orthogonalreihen

Von FERENC MÓRICZ in Szeged

Es sei $\lambda=\{\lambda_n\}$ eine positive, im strengen Sinne wachsende Zahlenfolge mit $\lambda_n\to\infty$. Das $n$-te $(R,\lambda)$-Mittel der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ wird mit

$$\sigma_n=\sigma_n(\lambda)=\sum_{\nu=0}^{n}\left(1-\frac{\lambda_\nu}{\lambda_{n+1}}\right)u_\nu$$

bezeichnet. Diese Reihe heißt mit der Rieszschen Methode summierbar, kurz $(R,\lambda)$-summierbar, wenn der endliche Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n$$

existiert, und $|R,\lambda|$-summierbar, wenn sogar

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\sigma_n-\sigma_{n-1}|<\infty$$

gilt [1].

Das $n$-te $(R,\lambda)$-Mittel der Orthogonalreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x) \tag{1}$$

sei mit $\sigma_n(x)$ bezeichnet. Um die Redeweise zu vereinfachen, erweitern wir die Folge $\{\lambda_n\}$ z. B. durch lineare Interpolation zu einer streng wachsenden Funktion $\lambda(x)$, die für $x=n$ den Wert $\lambda(n)=\lambda_n$ hat. Man bezeichne mit $\Lambda(x)$ die eindeutig bestimmte inverse Funktion von $\lambda(x)$. Man setze zur Abkürzung $\nu_m=[\Lambda(2^m)]$ [1]) und

$$A_m=\left\{\sum_{\nu=\nu_m+1}^{\nu_{m+1}}a_\nu^2\right\}^{1/2}\qquad(m=0,1,\ldots).$$

(Im Falle $\nu_m=\nu_{m+1}$ ist $A_m=0$.) Es wird der folgende Satz bewiesen:

Satz. *Die Bedingung*

$$\sum_{m=0}^{\infty}A_m<\infty \tag{2}$$

[1]) $[\Lambda(2^m)]$ bezeichnet den ganzen Teil von $\Lambda(2^m)$.

*ist notwendig und hinreichend dafür, daß die Orthogonalreihe* (1) *für jedes orthonormierte Funktionensystem* $\{\varphi_n(x)\}$ *im Grundintervall* $[a, b]$ *fast überall* $|R, \lambda|$*-summierbar ist.*

Dieser Satz ist die Verallgemeinerung eines Ergebnisses von K TANDORI [2], betreffend die $|C, 1|$-Summierbarkeit der Orthogonalreihen.

Beweis des Satzes. Hinlänglichkeit. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $a_0=a_1=0$ und $\lambda_1=1$ angenommen werden. Dann ist $\nu_0=1$ und

$$\sum_{n=2}^{\infty}\int_a^b|\sigma_n(x)-\sigma_{n-1}(x)|\,dx\leqq\sqrt{b-a}\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\int_a^b(\sigma_n(x)-\sigma_{n-1}(x))^2\,dx\right\}^{1/2}=$$

$$=\sqrt{b-a}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)\left\{\sum_{\nu=2}^{n}\lambda_\nu^2a_\nu^2\right\}^{1/2}\leqq \tag{3}$$

$$\leqq\sqrt{b-a}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)\left\{\sum_{m=0}^{m_0(n)}\sum_{\nu=\nu_m+1}^{\nu_{m+1}}\lambda_\nu^2a_\nu^2\right\}^{1/2},$$

wobei $m_0(n)$ die natürliche Zahl bedeutet, für die $\nu_{m_0(n)}<n\leqq\nu_{m_0(n)+1}$ $(n=2, 3, \dots)$ ist. Auf Grund der Monotonität der Folge $\{\lambda_n\}$ ergibt sich:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)\left\{\sum_{m=0}^{m_0(n)}\sum_{\nu=\nu_m+1}^{\nu_{m+1}}\lambda_\nu^2a_\nu^2\right\}^{1/2}\leqq$$

$$\leqq\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)\sum_{m=0}^{m_0(n)}\lambda_{\nu_{m+1}}A_m= \tag{4}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}A_m\lambda_{\nu_{m+1}}\sum_{m_0(n)\geqq m}\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right).$$

Es sei $\bar{n}$ die natürliche Zahl, für die $m_0(\bar{n}-1)<m\leqq m_0(\bar{n})$ besteht, wenn $m>m_0(2)$ und sonst $\bar{n}=2$. Da $\lambda_{\bar{n}}\geqq\lambda_{\nu_{m_0(\bar{n})}+1}\geqq\lambda(\Lambda(2^{m_0(\bar{n})}))=2^{m_0(\bar{n})}\geqq 2^m$ ist, so gilt

$$\lambda_{\nu_{m+1}}\sum_{n=\bar{n}}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)=\frac{\lambda_{\nu_{m+1}}}{\lambda_{\bar{n}}}\leqq\frac{\lambda(\Lambda(2^{m+1}))}{2^m}=2\qquad(m=0, 1, \dots). \tag{5}$$

Auf Grund von (2), (3), (4) und (5) ergibt sich

$$\sum_{n=2}^{\infty}\int_a^b|\sigma_n(x)-\sigma_{n-1}(x)|\,dx\leqq 2\sqrt{b-a}\sum_{m=0}^{\infty}A_m<\infty,$$

woraus wir durch Anwendung des B. Levischen Satzes die $|R, \lambda|$-Summierbarkeit der Orthogonalreihe (1) in $[a, b]$ fast überall erhalten.

Notwendigkeit. Wir werden den folgenden Hilfssatz benützen:

Hilfssatz. *Es sei* $\{r_n(x)\}$ *das Rademachersche System* [2]). *Für jede Koeffizientenfolge* $\{a_n\}$ *und für jede Menge* $E(\subset[0, 1])$ *von positivem Maß besteht die Un-*

*gleichung*

$$\left\{\sum_{\nu=N}^{n} a_\nu^2\right\}^{1/2} \leqq C(E)\int_E \left|\sum_{\nu=N}^{n} a_\nu r_\nu(x)\right| dx \qquad (n \geqq N),$$

*wobei* $C(E)>0$ *und* $N$ *nur von* $E$ *abhängig sind.*

Dieser Hilfssatz ist bekannt [3].

Wir beweisen zuerst die folgende Behauptung. Ist die Rademachersche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r_n(x) \tag{6}$$

$|R, \lambda|$-summierbar auf einer Menge von positivem Maß, so gilt (2).[3]) In diesem Falle gibt es nach dem Egoroffschen Satz eine Menge $E$ vom Maß $|E|>0$ derart, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_n(x)-\sigma_{n-1}(x)| \leqq M \qquad (x \in E) \tag{7}$$

mit einer geeigneten positiven Konstante $M$ gilt. Nun sei $N$ die natürliche Zahl, die im Sinne des Hilfssatzes zu $E$ gehört. Es gilt die Abschätzung

$$\sum_{n=N}^{\infty}\left|\sum_{\nu=N}^{n}\left(1-\frac{\lambda_\nu}{\lambda_{n+1}}\right)a_\nu r_\nu(x) - \sum_{\nu=N}^{n-1}\left(1-\frac{\lambda_\nu}{\lambda_n}\right)a_\nu r_\nu(x)\right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=N}^{\infty}|\sigma_n(x)-\sigma_{n-1}(x)| + \sum_{n=N}^{\infty}\left|\sum_{\nu=0}^{N-1}\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)\lambda_\nu a_\nu r_\nu(x)\right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=N}^{\infty}|\sigma_n(x)-\sigma_{n-1}(x)| + \sum_{\nu=0}^{N-1}|a_\nu|.$$

Hieraus folgt, daß man ohne Beschränkung des Allgemeinheit annehmen kann, daß $a_\nu=0$ $(0 \leqq \nu \leqq N-1)$.

Es sein $\mu_0<\ldots<\mu_l<\ldots$ die verschiedenen Glieder der Folge $\{\nu_m\}$. Es ist also $\mu_0=\nu_0$ und für jedes $l(\geqq 1)$ existieren die Indizes $m$ und $m'$ derart, daß $\nu_{m-1}< <\mu_l \equiv \nu_m=\nu_{m+1}=\ldots=\nu_{m'-1}<\mu_{l+1}\equiv \nu_{m'}$ $(m<m')$ gilt.

Durch Anwendung des Hilfssatzes ergibt sich für $\mu_{l-1} \geqq N-1$

$$\begin{aligned}
&\int_E |\sigma_{\mu_{l+1}}(x)-\sigma_{\mu_l-1}(x)|\,dx \geqq \\
&\geqq C(E)\left\{\left(\frac{1}{\lambda_{\mu_l}}-\frac{1}{\lambda_{\mu_{l+1}+1}}\right)^2 \sum_{\nu=N+1}^{\mu_l-1}\lambda_\nu^2 a_\nu^2 + \sum_{\nu=\mu_l}^{\mu_{l+1}}\left(1-\frac{\lambda_\nu}{\lambda_{\mu_{l+1}+1}}\right)^2 a_\nu^2\right\}^{1/2} \geqq \\
&\geqq C(E)\left(\frac{1}{\lambda_{\mu_l}}-\frac{1}{\lambda_{\mu_{l+1}+1}}\right)\left\{\sum_{\nu=N+1}^{\mu_l}\lambda_\nu^2 a_\nu^2\right\}^{1/2} \geqq \\
&\geqq C(E)\left(\frac{1}{\lambda_{\mu_l}}-\frac{1}{\lambda_{\mu_{l+1}+1}}\right)\lambda_{\nu_{m-1}+1}A_{m-1}.
\end{aligned} \tag{8}$$

2) Es ist $r_n(x)=\operatorname{sign}\sin(2^n\pi x)$, $0 \leqq x \leqq 1$ $(n=0, 1, \ldots)$.

3) Für die $|C, 1|$-Summierbarkeit hat diese Behauptung P. Billard [4] bewiesen.

Durch eine einfache Rechnung ergibt sich:

$$\left(\frac{1}{\lambda_{\mu_l}}-\frac{1}{\lambda_{\mu_{l+1}+1}}\right)\lambda_{\nu_{m-1}+1}=\left(\frac{1}{\lambda_{\nu_m}}-\frac{1}{\lambda_{\nu_{m'}+1}}\right)\lambda_{\nu_{m-1}+1}\geqq$$

$$\text{(9)}\qquad \geqq\left(\frac{1}{\lambda(\Lambda(2^m))}-\frac{1}{\lambda(\Lambda(2^{m'}))}\right)\lambda(\Lambda(2^{m-1}))=$$

$$=\left(\frac{1}{2^m}-\frac{1}{2^{m'}}\right)2^{m-1}\geqq\frac{1}{4}.$$

Wegen $A_m=A_{m+1}=\ldots=A_{m'-2}=0$ folgt daraus, bei Beachtung von (8) und (9)

$$\text{(10)}\qquad \sum_{\mu_{l-1}\geqq N-1}\int_E|\sigma_{\mu_{l+1}}(x)-\sigma_{\mu_l-1}(x)|\,dx\geqq\frac{C(E)}{4}\sum_{\nu_m\geqq N-1}A_m.$$

Da die Folge $\{\mu_l\}$ im strengen Sinne wachsend ist, so ergibt sich auf Grund von (7):

$$2M|E|\geqq 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_E|\sigma_n(x)-\sigma_{n-1}(x)|\,dx\geqq$$

$$\text{(11)}\qquad \geqq\sum_{l=1}^{\infty}\int_E|\sigma_{\mu_{2l+1}}(x)-\sigma_{\mu_{2l}-1}(x)|\,dx+\sum_{l=1}^{\infty}\int_E|\sigma_{\mu_{2l}}(x)-\sigma_{\mu_{2l-1}-1}(x)|\,dx=$$

$$=\sum_{l=1}^{\infty}\int_E|\sigma_{\mu_{l+1}}(x)-\sigma_{\mu_l-1}(x)|\,dx.$$

Aus (10) und (11) ergibt sich endlich (2).

Damit haben wir unseren Satz vollständig bewiesen.

Ich möchte dem Herrn Dozent KÁROLY TANDORI meinen aufrichtigen Dank dafür aussprechen, daß er mich bei der Fertigstellung dieser Arbeit mit wertvollen Ratschlägen unterstützt hat.

## Schriftenverzeichnis

[1] A. ZYGMUND, Sur la sommation des séries de fonctions orthogonales, *Bulletin Intern. Acad. Polonaise* (série A), **1927**, 293—308.
[2] K. TANDORI, Über die orthogonalen Funktionen. IX. Absolute Summation, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 292—299.
[3] W. ORLICZ, Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen, *Studia Math.*, **6** (1936), 20—38.
[4] P. BILLARD, Sur la sommabilité absolue des séries de fonctions orthogonales, *Bull. Sci. Math.*, **85** (1961), 29—33.

*(Eingegangen am 9. Mai 1961)*