

Sur les contractions de l'espace de Hilbert. V

Translations bilatérales

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged et CIPRIAN FOIAŞ à Bucarest

Le but de la présente Note est de poursuivre l'étude de la structure des dilatations unitaires minimum des contractions de l'espace de Hilbert. On cherchera en particulier des conditions dans lesquelles la dilatation unitaire minimum est une „translation bilatérale”. De cette façon, la présente Note reprend et approfondit l'étude qui a été le sujet des Notes II et IV [11, 13], du moins en ce qui concerne le cas „discret” où il s'agit d'une contraction T et ses itérées T^n . Le cas „continu”, où il s'agit d'un semi-groupe à un paramètre T_s ($s \geq 0$), se réduit au cas discret par l'intermédiaire des cogénéatrices.

Dans le paragraphe 1 on démontrera quelques faits, plus ou moins connus, appartenant à la théorie de la multiplicité spectrale.

Dans le paragraphe 2 on appliquera ces faits à l'étude de la structure des dilatations unitaires. On démontrera que sauf le cas où l'espace \mathfrak{H} est séparable et $(I - T^*T)\mathfrak{H}$, $(I - TT^*)\mathfrak{H}^1$ sont de dimension finie, la dilatation unitaire minimum de la contraction complètement non-unitaire T de \mathfrak{H} est une translation bilatérale. Un exemple donné à la fin du paragraphe 2 montre que dans le cas exceptionnel (qu'on se propose de rechercher ultérieurement) la dilatation unitaire minimum n'est pas nécessairement une translation bilatérale.

Cette étude est poursuivie aussi dans le paragraphe 3, mais là on se servira d'autres méthodes.

1. Quelques lemmes sur les transformations unitaires

1. Soit U une transformation unitaire dans l'espace de Hilbert \mathfrak{R} . Pour un sous-ensemble quelconque \mathfrak{S} de \mathfrak{R} soit $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ le sous-espace sous-tendu par les éléments de la forme $U^n f$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots; f \in \mathfrak{S}$), en formule

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{S}) = \bigvee_{-\infty}^{\infty} U^n \mathfrak{S};$$

$\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ réduit U .

¹⁾ Pour une variété linéaire quelconque \mathfrak{C} , $\overline{\mathfrak{C}}$ désignera l'adhérence de \mathfrak{C} (forte ou faible, ce qui revient au même).

Un sous-espace \mathfrak{A} de \mathfrak{R} sera dit *ambulant* (en anglais: „wandering”) par rapport à U si

$$U^m \mathfrak{A} \perp U^n \mathfrak{A},$$

quels que soient les entiers m, n ($m \neq n$). Pour cela il suffit d'ailleurs de supposer

$$U^n \mathfrak{A} \perp \mathfrak{A} \text{ pour } n = 1, 2, \dots$$

Pour \mathfrak{A} ambulant on a

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{A}) = \bigoplus_{-\infty}^{\infty} U^n \mathfrak{A}.$$

Dans le cas où $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{R}$ on dira que l'ensemble ambulant \mathfrak{A} est *complet* et U est une *translation bilatérale* engendrée par \mathfrak{A} .

Nous envisagerons seulement le cas d'un espace de Hilbert *complexe*. Toute translation bilatérale U admet alors la représentation suivante. Soit \mathfrak{A} un sous-espace ambulant complet générateur et construisons l'espace $L^2_{\mathfrak{A}}(0, 2\pi)$ des fonctions $u(\theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), dont les valeurs sont des éléments de \mathfrak{A} , et qui sont fortement mesurables et telles que

$$\|u\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|u(\theta)\|^2 d\theta < \infty.$$

On peut appliquer \mathfrak{R} sur $L^2_{\mathfrak{A}}(0, 2\pi)$ *isométriquement* en faisant correspondre à l'élément

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} U^n a_n \in \mathfrak{R} \quad (a_n \in \mathfrak{A})$$

l'élément

$$f(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{in\theta} a_n \in L^2_{\mathfrak{A}}(0, 2\pi);$$

à Uf correspondra alors $e^{i\theta} f(\theta)$.

De cette façon, on représente U comme „opérateur de multiplication” dans $L^2_{\mathfrak{A}}(0, 2\pi)$. Cette représentation est utile dans la démonstration de quelques faits fondamentaux sur les translations bilatérales.

Lemme 1. (i) Soit U une translation bilatérale dans \mathfrak{R} , engendrée par le sous-espace ambulant complet \mathfrak{A} , et soit \mathfrak{B} un sous-espace quelconque, ambulant par rapport à U . On a alors

$$(1) \quad \dim \mathfrak{B} \cong \dim \mathfrak{A}.$$

(ii) Pour que deux translations bilatérales, U dans \mathfrak{R} et U' dans \mathfrak{R}' , engendrées par les sous-espaces ambulants complets \mathfrak{A} et \mathfrak{A}' , soient unitairement équivalentes, il faut et il suffit que

$$\dim \mathfrak{A} = \dim \mathfrak{A}'.$$

Démonstration. Puisque $\mathfrak{M}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{M}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{R}$ et

$$\dim \mathfrak{M}(\mathfrak{B}) = \aleph_0 \cdot \dim \mathfrak{B}, \quad \dim \mathfrak{M}(\mathfrak{A}) = \aleph_0 \cdot \dim \mathfrak{A},$$

on a

$$\aleph_0 \cdot \dim \mathfrak{B} \cong \aleph_0 \cdot \dim \mathfrak{A}.$$

Dans le cas $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{K}_0$, cela entraîne (1). Dans le cas $\dim \mathfrak{A} < \mathfrak{K}_0$, on voit d'abord que $\dim \mathfrak{B} \cong \mathfrak{K}_0$. Faisons usage, dans ce cas, de la représentation de U comme opérateur de multiplication dans $L^2_{\mathfrak{A}}(0, 2\pi)$.²⁾ Choisissons dans \mathfrak{B} un système orthonormal complet $\{u_n\}$ et soit $\{u_n(\theta)\}$ le système des fonctions correspondantes dans $L^2_{\mathfrak{A}}(0, 2\pi)$. Puisque \mathfrak{B} est un sous-espace ambulant, on a pour $k \neq 0$ et m, n arbitraires

$$0 = (U^k u_m, u_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (e^{ik\theta} u_m(\theta), u_n(\theta)) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} (u_m(\theta), u_n(\theta)) d\theta.$$

La fonction $(u_m(\theta), u_n(\theta))$ doit donc être constante p. p., et comme

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u_m(\theta), u_n(\theta)) d\theta = (u_m, u_n) = \delta_{m,n},$$

on a nécessairement

$$(2) \quad (u_m(\theta), u_n(\theta)) = \delta_{m,n} \quad \text{p. p.}$$

L'ensemble des couples m, n étant dénombrable, il existe certainement un point θ_0 où toutes les équations (2) sont simultanément vérifiées, c'est-à-dire que $\{u_n(\theta_0)\}$ est un système orthonormal dans \mathfrak{A} . Donc \mathfrak{A} comprend un système orthonormal de même puissance que $\dim \mathfrak{B}$ et par conséquent l'inégalité (1) subsiste dans ce cas aussi.

(ii) Supposons que $\dim \mathfrak{A} = \dim \mathfrak{A}'$. Dans ce cas il existe une application isométrique $a \rightarrow a' = \varphi a$ de \mathfrak{A} sur \mathfrak{A}' . Celle-ci engendre une application isométrique $f \rightarrow f' = \Phi f$ de \mathfrak{K} sur \mathfrak{K}' , notamment la suivante:

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} U^n a_n \rightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} U'^n (\varphi a_n) = f' \quad (a_n \in \mathfrak{A}),$$

pour laquelle

$$\Phi U f = U' \Phi f.$$

Donc U et U' sont unitairement équivalentes.

Supposons, inversement, que U et U' soient unitairement équivalentes, ou ce qui revient au même, que $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}$, $U' = U$ et que \mathfrak{A} et \mathfrak{A}' sont deux sous-espaces de \mathfrak{K} , ambulants et complets par rapport à U . En vertu de (i) on a $\dim \mathfrak{A}' \leq \dim \mathfrak{A}$ et en même temps $\dim \mathfrak{A} \leq \dim \mathfrak{A}'$, donc on a bien $\dim \mathfrak{A} = \dim \mathfrak{A}'$.

Cela achève la démonstration du lemme 1.

2. Définissons la *multiplicité* d'une translation bilatérale U comme égale à $\dim \mathfrak{A}$ où \mathfrak{A} est un sous-espace ambulant complet par rapport à U . En vertu du lemme 1, cette définition est univoque.

Il est manifeste que la somme orthogonale de translations bilatérales est aussi une translation bilatérale, et que les multiplicités *s'ajoutent*.

2) Nous empruntons le raisonnement suivant à HALMOS [2], Lemma 4.

(Ajouté le 19. mai 1962.) La démonstration simple suivante nous a été indiquée par M. ISRAEL HALPERIN: Soient $\{v_m\}$, $\{u_n\}$ des systèmes orthonormaux complets dans \mathfrak{A} et \mathfrak{B} , selon les cas. On a alors

$$\dim \mathfrak{B} = \sum_n \|u_n\|^2 = \sum_{n, m, k} |(u_n, U^k v_m)|^2 = \sum_{n, m, k} |(U^{*k} u_n, v_m)|^2 \leq \sum_m \|v_m\|^2 = \dim \mathfrak{A}.$$

Lemme 2. Soit U une translation bilatérale de \mathfrak{K} et supposons qu'elle admette une décomposition

$$U = U' \oplus U''$$

où U' est une translation bilatérale de multiplicité finie N . Dans ce cas U'' est aussi une translation bilatérale.

Démonstration. Soient \mathfrak{A} et \mathfrak{A}' des sous-espaces ambulants, dont \mathfrak{A} engendre U et \mathfrak{A}' engendre U' . Soit $\{u_n\}$ ($n=1, \dots, N$) un système orthonormal complet dans \mathfrak{A}' . Puisque

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{M}(\mathfrak{A}) = \bigoplus_k U^k \mathfrak{A},$$

chacun des u_n peut être représenté sous la forme

$$u_n = \sum_k U^k a_{nk} \quad (a_{nk} \in \mathfrak{A}).$$

Soit \mathfrak{A}_1 le sous-espace déterminé par les éléments

$$a_{nk} \quad (n=1, \dots, N; k=0, \pm 1, \dots)$$

et soit $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A} \ominus \mathfrak{A}_1$. $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1)$ est séparable, comprend $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}')$, et puisque $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ sont ambulants, les parties U_1 et U_2 de U dans $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1)$ et $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{M}(\mathfrak{A}_2)$ sont des translations bilatérales. En désignant par U_1'' la partie de U dans $\mathfrak{K}_1 \ominus \mathfrak{M}(\mathfrak{A}')$ on a donc

$$U_1 = U' \oplus U_1'' \quad \text{et} \quad U'' = U_1'' \oplus U_2.$$

Si nous montrons que U_1'' est une translation bilatérale, il s'ensuivra que U'' est aussi une translation bilatérale et le lemme sera démontré.

Il suffit donc de prouver le lemme dans l'hypothèse additionnelle que \mathfrak{A} est séparable. Soit alors

$$(3) \quad w_1, w_2, \dots, w_r, \dots$$

une suite d'éléments de \mathfrak{A} , partout dense dans \mathfrak{A} .

Représentons U comme opérateur de multiplication dans $L^2_{\mathfrak{A}}(0, 2\pi)$; soient

$$(4_N) \quad u_1(\theta), u_2(\theta), \dots, u_N(\theta)$$

les fonctions qui correspondent aux éléments u_1, u_2, \dots, u_N du système orthonormal choisi dans \mathfrak{A}' . Pour tout point θ fixé (sauf les points d'un ensemble de mesure 0 qu'on négligera dans la suite), les valeurs des fonctions (4_N) au point θ constituent un système orthonormal dans \mathfrak{A} (même conclusion que dans la démonstration du lemme 1), donc $\dim \mathfrak{A} \cong N$.

Nous compléterons le système (4_N) par l'adjonction de certaines fonctions $u_n(\theta) \in L^2_{\mathfrak{A}}(0, 2\pi)$ à un système

$$(4_{\Omega}) \quad \{u_n(\theta)\} \quad (n \in \Omega)$$

où

$$\Omega = \{1, \dots, M\} \quad \text{ou} \quad \Omega = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$$

suisant que $\dim \mathfrak{H} = M$ ou $\dim \mathfrak{H} = \aleph_0$, et cela de sorte que les valeurs de ces fonctions forment, pour tout point θ fixé, un système orthonormal complet dans \mathfrak{H} .

Si $\dim \mathfrak{H} = N$, on n'a pas besoin de compléter (4_N) . Supposons que $\dim \mathfrak{H} > N$. Pour tout θ fixé il y a alors du moins un parmi les éléments (3) pour lequel

$$h_r(\theta) = w_r - \sum_{n=1}^N (w_r, u_n(\theta)) u_n(\theta) \neq 0;$$

soit $w_{r(\theta)}$ le premier parmi les w_r ayant cette propriété. Nous définissons

$$u_{N+1}(\theta) = \|h_{r(\theta)}(\theta)\|^{-1} h_{r(\theta)}(\theta).$$

Les valeurs des fonctions

$$(4_{N+1}) \quad u_1(\theta), \dots, u_N(\theta), u_{N+1}(\theta)$$

en tout point θ fixé constituent alors un système orthonormal dans \mathfrak{H} . La fonction $u_{N+1}(\theta)$ est mesurable³⁾ et bornée, $\|u_{N+1}(\theta)\| = 1$, donc appartient à $L^2_{\mathfrak{H}}(0, 2\pi)$.

En partant du système (4_{N+1}) au lieu de (4_N) on construit de la même façon la fonction $u_{N+2}(\theta)$ et ainsi de suite. Dans le cas où $\dim \mathfrak{H}$ est finie on arrive au système cherché (4_{Ω}) après avoir répété ce procédé en un nombre fini de fois.

Dans le cas où $\dim \mathfrak{H}$ est infinie on peut répéter ce procédé indéfiniment et on obtient une suite infinie de fonctions $u_n(\theta) \in L^2_{\mathfrak{H}}(0, 2\pi)$ dont les valeurs en chaque point fixé θ_0 forment un système orthonormal dans \mathfrak{H} . Ce système orthonormal est complet. En effet, il s'ensuit de notre construction que pour tout $n > N$ il y a un entier positif r_n tel que

$$(5) \quad w_{r_n} = \sum_{k=1}^n c_{nk} u_k(\theta_0), \quad c_{nn} > 0,$$

et tous les w_r avec $r < r_n$ dépendent linéairement des $u_k(\theta_0)$ avec $k \leq n-1$. De la relation (5) on déduit que $r_n \neq r_m$ pour $n \neq m$ et par conséquent $r_n \rightarrow \infty$ pour $n \rightarrow \infty$. Donc pour chaque r donné on a $r < r_n$ à partir d'un certain rang n et par conséquent w_r dépend linéairement d'un nombre fini des éléments du système $\{u_n(\theta_0)\}$. La suite $\{w_r\}$ étant dense dans \mathfrak{H} , ce système est donc complet.

Cela achève la démonstration de ce que le système $\{u_n(\theta)\}$ ($n \in \Omega$) que nous venons de construire est tel que les valeurs en chaque point θ fixé forment un système orthonormal complet dans \mathfrak{H} . Soit u_n l'élément de \mathfrak{R} qui correspond à la fonction $u_n(\theta)$ ($n \in \Omega$). On a alors

$$(U^p u_m, U^q u_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(p-q)\theta} (u_m(\theta), u_n(\theta)) d\theta = \delta_{p,q} \cdot \delta_{m,n}$$

³⁾ Les fonctions $u_n(\theta)$ ($n=1, \dots, N$) étant mesurables, les ensembles

$$e_r = \{\theta: h_1(\theta) = \dots = h_{r-1}(\theta) = 0, h_r(\theta) \neq 0\} \quad (r=1, 2, \dots)$$

sont aussi mesurables. La réunion de ces ensembles est égale au segment $(0, 2\pi)$ et dans e_r on a

$$u_{N+1}(\theta) = \|h_r(\theta)\|^{-1} h_r(\theta)$$

donc $u_{N+1}(\theta)$ est mesurable dans e_r .

($m, n \in \Omega$; $p, q = 0, \pm 1, \dots$), d'où il résulte en particulier que le sous-espace \mathfrak{M}'' déterminé par les éléments u_n de rang $n > N$ est ambulant par rapport à U et que $\mathfrak{M}(\mathfrak{M}'')$ est orthogonal à $\mathfrak{M}(\mathfrak{M}')$. Soit v un élément de \mathfrak{K} , orthogonal à $\mathfrak{M}(\mathfrak{M}') \oplus \mathfrak{M}(\mathfrak{M}'')$, ou, ce qui revient au même, à tous les éléments de la forme $U^q u_n$ ($n \in \Omega$; $q = 0, \pm 1, \dots$). Si $v(\theta)$ est la fonction correspondante, on a

$$0 = (U^q u_n, v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iq\theta} (u_n(\theta), v(\theta)) d\theta \quad (n \in \Omega; q = 0, \pm 1, \dots),$$

donc

$$(u_n(\theta), v(\theta)) = 0 \quad \text{p. p.} \quad (n \in \Omega);$$

vu que le système $\{u_n(\theta)\}$ est complet dans \mathfrak{H} pour tout θ fixé, il résulte que

$$v(\theta) = 0 \quad \text{p. p.,}$$

donc $v = 0$. Cela prouve que

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{M}') \oplus \mathfrak{M}(\mathfrak{M}'') = \mathfrak{K}$$

et que, par conséquent, U'' est une translation bilatérale, engendrée notamment par le sous-espace ambulant \mathfrak{M}'' .

Cela achève la démonstration du lemme 2.

3. Soit

$$U = \int_0^{2\pi} e^{i\theta} dE_\theta$$

une transformation unitaire quelconque et soit $E(\sigma)$ la mesure spectrale correspondante; σ parcourt les ensembles boréliens sur le cercle unité

$$C_0 = \{e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.^4)$$

En désignant par $m(\sigma)$ la mesure de Lebesgue sur C_0 on dit que U a son spectre absolument continu si $m(\sigma) = 0$ entraîne $E(\sigma) = O$.

Lemme 3. Supposons que pour la transformation unitaire U de \mathfrak{K} il y ait des sous-espaces ambulants $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots, \mathfrak{M}_N$ tels que la somme vectorielle

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{M}_1) + \mathfrak{M}(\mathfrak{M}_2) + \dots + \mathfrak{M}(\mathfrak{M}_N)$$

soit dense dans \mathfrak{K} . U a alors son spectre absolument continu.

Démonstration. Dans le cas où $N = 1$, c'est-à-dire si U est une translation bilatérale engendrée par $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1$, on peut faire usage de la représentation de U

⁴⁾ On a

$$E(\sigma) = \int_s dE_\theta$$

où s désigne l'ensemble dans $[0, 2\pi]$ qui correspond à l'ensemble σ dans C_0 par l'application $e^{i\theta} \rightarrow \theta$.

comme opérateur de multiplication dans $L^2_{\mathfrak{N}}(0, 2\pi)$. On voit aisément que

$$(E(\sigma)u, u) = \frac{1}{2\pi} \int_s (u(\theta), u(\theta)) d\theta, \quad (4)$$

d'où la continuité absolue de $E(\sigma)$ est évidente.

Dans le cas général on observe que chaque $\mathfrak{M}(\mathfrak{N}_k)$ réduit U à une translation bilatérale et par conséquent la partie de $E(\sigma)$ dans $\mathfrak{M}(\mathfrak{N}_k)$ est absolument continue. Donc $m(\sigma) = 0$ entraîne $E(\sigma)f = 0$ pour $f \in \mathfrak{M}(\mathfrak{N}_k)$ ($k = 1, \dots, N$) et alors aussi pour $f \in \mathfrak{M}(\mathfrak{N}_1) + \dots + \mathfrak{M}(\mathfrak{N}_N)$ et par continuité pour tout $f \in \mathfrak{R}$.

Lemme 4. *Supposons que la transformation unitaire U de l'espace \mathfrak{R} ait son spectre absolument continu et soit \mathfrak{S} un sous-espace de \mathfrak{R} tel que $\mathfrak{M}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{R}$. On a alors*

$$U = \bigoplus_x U_x$$

où le nombre des termes est au plus égal à $\dim \mathfrak{S}$, et chaque terme est unitairement équivalent à l'opérateur de multiplication par $e^{i\theta}$ dans un espace $L^2(M_x)$, constitué des fonctions $f(\theta)$ définies dans l'ensemble mesurable $M_x \subset (0, 2\pi)$, à valeurs complexes et de carré intégrable sur M_x . En formule

$$U_x \sim U^x(M_x).$$

Démonstration. Choisissons dans \mathfrak{R} un système d'éléments $f_\omega \neq 0$ ($\omega \in \Omega$) tel que les sous-espaces $\mathfrak{M}(f_\omega)$ soient orthogonaux deux-à-deux et

$$(6) \quad \mathfrak{R} = \bigoplus_\omega \mathfrak{M}(f_\omega).$$

Dans la décomposition correspondante de U ,

$$(7) \quad U = \bigoplus_\omega U_\omega,$$

chaque terme U_ω est unitairement équivalent à un $U^x(M_\omega)$, où M_ω est notamment l'ensemble des points $\theta \in (0, 2\pi)$ dans lesquels la fonction (non décroissante et absolument continue) $(E_\theta f_\omega, f_\omega)$ admet une dérivée $p_\omega(\theta)$, finie et $\neq 0$. En effet, l'application isométrique en question se définit d'abord pour les sommes finies de la forme $\sum_k c_k U^k f_\omega$ par

$$f = \sum_k c_k U^k f_\omega \rightarrow \sum_k c_k e^{ik\theta} \sqrt{p_\omega(\theta)} = f_\omega(\theta)$$

et s'étend ensuite par continuité à une application isométrique τ_ω de $\mathfrak{M}(f_\omega)$ sur $L^2(M_\omega)$; cf. [13].

Soit ν le nombre cardinal de l'ensemble Ω .

Si $\nu \leq \dim \mathfrak{S}$, nous avons déjà la décomposition de U de type cherché. Reste à étudier le cas où $\nu > \dim \mathfrak{S}$.

De (6) il s'ensuit que $\dim \mathfrak{R} = \aleph_0 \cdot \nu$, et de l'équation $\mathfrak{M}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{R}$ il s'ensuit que $\aleph_0 \cdot \dim \mathfrak{S} \geq \dim \mathfrak{R}$. Par conséquent on a toujours

$$\aleph_0 \cdot \dim \mathfrak{S} \geq \aleph_0 \cdot \nu;$$

il en découle que l'inégalité $\nu > \dim \mathfrak{S}$ n'est possible que si

$$(8) \quad \dim \mathfrak{S} = N \text{ (nombre fini) et } N < \nu \leq \aleph_0.$$

Nous démontrerons que dans le cas (8) on peut remplacer la décomposition (7) de U par une autre de même type, mais à N termes au plus.

A cette fin, nous montrons d'abord que si $\omega_1, \dots, \omega_{N+1}$ sont $N+1$ éléments différents quelconques de Ω , l'ensemble

$$\Delta = M_{\omega_1} \cap \dots \cap M_{\omega_{N+1}}$$

est de mesure 0.

Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ une base de \mathfrak{S} ; puisque $\mathfrak{M}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{R}$, il n'y a aucun élément $\psi \in \mathfrak{R}, \psi \neq 0$, qui soit orthogonal à tous les éléments $U^m \varphi_n$ ($n=1, \dots, N; m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Passons de \mathfrak{R} à l'espace

$$\mathfrak{L}^2 = \bigoplus_{\omega} L^2(M_{\omega})$$

par l'application isométrique τ qui est engendrée par les applications isométriques $\tau_{\omega}: \mathfrak{M}(f_{\omega}) \rightarrow L^2(M_{\omega})$. Pour

$$\tau \varphi_n = \bigoplus_{\omega} \varphi_{n,\omega}(\theta) \quad (n=1, \dots, N), \quad \tau \psi = \bigoplus_{\omega} \psi_{\omega}(\theta)$$

on a donc:

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{les équations } \sum_{\omega} \int_{M_{\omega}} e^{im\theta} \varphi_{n,\omega}(\theta) \overline{\psi_{\omega}(\theta)} d\theta = 0 \quad (n=1, \dots, N; \\ m=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ \text{entraînent } \psi_{\omega}(\theta) = 0 \text{ p. p. dans } M_{\omega}, \text{ pour tout } \omega \in \Omega. \end{array} \right.$$

Or les N équations linéaires homogènes à $N+1$ inconnues

$$\sum_{k=1}^{N+1} \varphi_{n,\omega_k}(\theta) x_k = 0 \quad (n=1, \dots, N)$$

admettent, pour tout $\theta \in \Delta$, une solution

$$x_1 = x_1(\theta), \dots, x_{N+1} = x_{N+1}(\theta)$$

telle que

$$\sum_{k=1}^{N+1} |x_k(\theta)|^2 = 1;$$

de plus il est facile à voir que cette solution peut être choisie en fonction mesurable de θ dans Δ . Si nous posons

$$\psi_{\omega_k}(\theta) = x_k(\theta) \text{ dans } \Delta, \quad \psi_{\omega_k}(\theta) = 0 \text{ dans } M_{\omega_k} - \Delta \quad (k=1, \dots, N+1)$$

et

$$\psi_{\omega}(\theta) = 0 \text{ dans tout } M_{\omega} \text{ pour } \omega \notin \{\omega_1, \dots, \omega_{N+1}\},$$

nous aboutissons à une contradiction à (*) sauf si Δ est de mesure 0.

Donc toute intersection de type Δ est de mesure 0. On en conclut qu'il existe un système fini ou dénombrable d'ensembles mesurables $E_n \in (0, 2\pi)$, disjoints deux-à-deux, et tels que chaque M_ω est égal, à un ensemble de mesure 0 près, à la réunion de certains de ces ensembles E_n , le même ensemble E_n ne faisant partie que de N des ensembles M_ω au plus.

Soit F_r la réunion de ceux des E_n qui font partie d'au moins r des ensembles M_ω . En vertu de la relation évidente

$$\bigoplus_n U^\times(N_n) = U^\times\left(\bigcup_n N_n\right),$$

valable pour tout système dénombrable $\{N_n\}$ de sous-ensembles mesurables disjoints de $(0, 2\pi)$, on a donc :

$$\bigoplus_\omega U^\times(M_\omega) = \bigoplus_\omega \bigoplus_{E_n \subset M_\omega} U^\times(E_n) = \bigoplus_{r=1}^N \bigoplus_{E_n \subset F_r} U^\times(E_n) = \bigoplus_{r=1}^N U^\times(F_r).$$

Nous avons ainsi démontré que dans tous les cas on a

$$U \sim \bigoplus_x U^\times(M_x)$$

avec un nombre au plus égal à $\dim \mathfrak{S}$ de termes au second membre.

Cela achève la démonstration du lemme 4.

Lemme 5. a) *Supposons que pour la transformation unitaire U de \mathfrak{R} il y ait deux sous-espaces ambulants, \mathfrak{A} et \mathfrak{B} , tels que*

$$(9) \quad \dim \mathfrak{A} \cong \dim \mathfrak{B}$$

et

$$(10) \quad \mathfrak{M}(\mathfrak{A}) + \mathfrak{M}(\mathfrak{B}) \text{ est dense dans } \mathfrak{R}.$$

On a alors

$$U = U' \oplus U''$$

où U' est une translation bilatérale de multiplicité égale à $\dim \mathfrak{A}$, et U'' est unitairement équivalente à une somme orthogonale de type

$$\bigoplus_x U^\times(M_x),$$

le nombre des termes étant au plus égal à $\dim \mathfrak{B}$. Par conséquent U peut être prolongée à une translation bilatérale de multiplicité au plus égale à

$$\dim \mathfrak{A} + \dim \mathfrak{B}.$$

b) *Dans la condition additionnelle:*

$$(11) \quad \dim \mathfrak{A} \text{ est infinie,}$$

U est elle-même une translation bilatérale, de multiplicité égale à $\dim \mathfrak{A}$.

Démonstration. a) Mettons à part le cas évident $\mathfrak{R} = \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$. Les sous-espaces

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{M}(\mathfrak{A}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{R}'' = \mathfrak{M}(\mathfrak{A})^\perp$$

réduisent U ; les parties correspondantes de U soient U' et U'' . Si Q est l'opérateur de projection de \mathfrak{K} sur \mathfrak{K}'' , posons

$$\mathfrak{B}'' = \overline{Q\mathfrak{B}}.$$

Q permute à U , donc on a

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{B}'') = \mathfrak{M}(\overline{Q\mathfrak{B}}) = \overline{Q\mathfrak{M}(\mathfrak{B})} = \overline{Q(\mathfrak{M}(\mathfrak{A}) + \mathfrak{M}(\mathfrak{B}))} = \overline{Q\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}''.$$

En vertu du lemme 3, U a son spectre absolument continu, donc U'' l'a aussi. On peut alors appliquer le lemme 4: il résulte que

$$(12) \quad U'' = \bigoplus_x U''_x \quad \text{où} \quad U''_x \sim U^*(M_x),$$

le nombre cardinal f de l'ensemble K des indices x étant au plus égal à $\dim \mathfrak{B}''$. Or, évidemment, $\dim \mathfrak{B}'' \leq \dim \mathfrak{B}$.

$\bigoplus_x U^*(M_x)$ peut être prolongé de manière évidente à $\bigoplus_x U^*(0, 2\pi)$, qui est une translation bilatérale de multiplicité f .

Pour démontrer b), observons d'abord que

$$f \leq \dim \mathfrak{B} \leq \dim \mathfrak{A}, \quad \text{donc} \quad \aleph_0 \cdot f \leq \aleph_0 \cdot \dim \mathfrak{A}.$$

Si $\dim \mathfrak{A}$ est infinie, on a $\aleph_0 \cdot \dim \mathfrak{A} = \dim \mathfrak{A}$, donc $\aleph_0 \cdot f \leq \dim \mathfrak{A}$. Par conséquent il existe un nombre cardinal $r \geq 0$ tel que

$$(13) \quad \dim \mathfrak{A} = \aleph_0 \cdot f + r.$$

Choisissons dans \mathfrak{A} un système orthonormal complet Σ . En vertu de (13) on peut arranger les éléments de Σ comme suit:

$$\Sigma = \{\varphi_{x,n} (x \in K; n = 1, 2, \dots), \varphi_\varrho (\varrho \in R)\}$$

où l'ensemble R des indices ϱ a le nombre cardinal r .

Puisque \mathfrak{A} est ambulant, on a

$$\mathfrak{K}' = \mathfrak{M}(\mathfrak{A}) = \left[\bigoplus_{x,n} \mathfrak{M}(\varphi_{x,n}) \right] \oplus \left[\bigoplus_{\varrho} \mathfrak{M}(\varphi_\varrho) \right],$$

et dans la décomposition correspondante

$$(14) \quad U' = \left[\bigoplus_{x,n} U'_{x,n} \right] \oplus \left[\bigoplus_{\varrho} U'_\varrho \right]$$

chaque terme $U'_{x,n}$ et U'_ϱ est une translation bilatérale simple, donc

$$U'_{x,n} \sim U^*(0, 2\pi), \quad U'_\varrho \sim U^*(0, 2\pi).$$

En combinant (12) et (14) nous obtenons que

$$(15) \quad U = U' \oplus U'' = \bigoplus_x [U''_x \oplus U'_{x,1} \oplus U'_{x,2} \oplus \dots] \oplus \left[\bigoplus_{\varrho} U'_\varrho \right].$$

Soit

$$U'_{x,n} = V'_{x,n} \oplus W'_{x,n}$$

la décomposition de $U'_{\kappa,n}$ qui correspond, par l'équivalence $U'_{\kappa,n} \sim U^*(0, 2\pi)$, à la décomposition évidente

$$U^*(0, 2\pi) = U^*(M_\kappa) \oplus U^*(CM_\kappa) \quad \text{où} \quad CM_\kappa = (0, 2\pi) - M_\kappa.$$

On aura alors

$$U''_\kappa \oplus U'_{\kappa,1} \oplus U'_{\kappa,2} \oplus \dots = (U''_\kappa \oplus W'_{\kappa,1}) \oplus (V'_{\kappa,1} \oplus W'_{\kappa,2}) \oplus (V'_{\kappa,2} \oplus W'_{\kappa,3}) \oplus \dots$$

où, dans le second membre, chaque terme entre parenthèses est unitairement équivalent à $U^*(M_\kappa) \oplus U^*(CM_\kappa)$, donc à $U^*(0, 2\pi)$.

De cette façon, il résulte de (15) que U est la somme orthogonale de translations bilatérales simples, en nombre total $\aleph_0 \cdot \ell + r = \dim \mathfrak{H}$. Donc U est une translation bilatérale de multiplicité égale à $\dim \mathfrak{H}$.

2. Contractions dont les dilatations unitaires sont des translations bilatérales

1. Dans tout ce qui suit T désignera une *contraction* de l'espace de Hilbert \mathfrak{H} ($\dim \mathfrak{H} \geq 1$) et U la *dilatation unitaire minimum* de T , U opérant dans un espace de Hilbert \mathfrak{K} qui contient \mathfrak{H} comme sous-espace⁵⁾. U est donc une transformation unitaire dans \mathfrak{K} telle que

$$(U^n h, h') = (T^n h, h'), \quad (U^{-n} h, h') = (T^{*n} h, h')$$

pour $h, h' \in \mathfrak{H}$ et $n=0, 1, 2, \dots$, et \mathfrak{K} est sous-tendu par les éléments de la forme $U^n h$ ($h \in \mathfrak{H}; n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$); en formule

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{M}(\mathfrak{H}).$$

Introduisons les notations

$$\mathfrak{d} = \dim \overline{(I - T^* T)\mathfrak{H}}, \quad \mathfrak{d}^* = \dim \overline{(I - T T^*)\mathfrak{H}}.$$

On a évidemment

$$0 \leq \mathfrak{d}, \mathfrak{d}^* \leq \dim \mathfrak{H};$$

$\mathfrak{d} = \mathfrak{d}^* = 0$ si T est unitaire et dans ce cas seulement.

Les variétés linéaires

$$\mathfrak{Q}_0 = (U - T)\mathfrak{H}, \quad \mathfrak{Q}_0^* = (U^* - T^*)\mathfrak{H} \quad (\subseteq \mathfrak{K})$$

et leurs adhérences

$$\mathfrak{Q} = \overline{(U - T)\mathfrak{H}}, \quad \mathfrak{Q}^* = \overline{(U^* - T^*)\mathfrak{H}}$$

joueront un rôle essentiel dans ce qui suit.

Théorème 1. (i) \mathfrak{Q} et \mathfrak{Q}^* sont des sous-espaces ambulants par rapport à U et on a

$$\dim \mathfrak{Q} = \mathfrak{d} \quad \text{et} \quad \dim \mathfrak{Q}^* = \mathfrak{d}^*.$$

(ii) L'espace \mathfrak{K} se décompose en la somme orthogonale

$$(16) \quad \mathfrak{K} = \dots \oplus U^2 \mathfrak{Q} \oplus U \mathfrak{Q} \oplus \mathfrak{Q} \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{Q}^* \oplus U^* \mathfrak{Q}^* \oplus U^{*2} \mathfrak{Q}^* \oplus \dots$$

⁵⁾ Cf. [8] ou [9].

Démonstration. (i) Pour démontrer que \mathfrak{L} et \mathfrak{L}^* sont ambulants il suffit de montrer que

$$U^n \mathfrak{L}_0 \perp \mathfrak{L}_0, \quad U^{*n} \mathfrak{L}_0^* \perp \mathfrak{L}_0^* \quad \text{pour } n=1, 2, \dots;$$

par raison de symétrie il suffit même d'envisager seulement \mathfrak{L}_0 . Or pour $h, h' \in \mathfrak{L}$ et $n=1, 2, \dots$ on a

$$\begin{aligned} (U^n(U-T)h, (U-T)h') &= (U^n h, h') - (U^{n-1}Th, h') - (U^{n+1}h, Th') + (U^n Th, T'h) = \\ &= (T^n h, h') - (T^{n-1}Th, h') - (T^{n+1}h, Th') + (T^n Th, T'h) = 0. \end{aligned}$$

Pour démontrer $\dim \mathfrak{L} = \delta$, observons d'abord que pour $h \in \mathfrak{L}$

$$\begin{aligned} \|(U-T)h\|^2 &= (Uh, Uh) - (Uh, Th) - (Th, Uh) + (Th, Th) = \\ &= (h, h) - (Th, Th) - (Th, Th) + (Th, Th) = ((I-T^*T)h, h) = \|(I-T^*T)^{\frac{1}{2}}h\|^2. \end{aligned}$$

En vertu de cette relation \mathfrak{L}_0 peut être appliqué isométriquement sur $(I-T^*T)^{\frac{1}{2}}\mathfrak{L}$ et par conséquent \mathfrak{L} sur $(I-T^*T)^{\frac{1}{2}}\mathfrak{L}$. Or ce dernier sous-espace coïncide avec $(I-T^*T)\mathfrak{L}$,⁶⁾ donc on a bien $\dim \mathfrak{L} = \delta$.

L'égalité $\dim \mathfrak{L}^* = \delta^*$ se démontre de manière analogue.

(ii) Montrons que les termes du second membre de (16) sont orthogonaux. Comme nous savons déjà que \mathfrak{L} et \mathfrak{L}^* sont ambulants, il faut encore montrer que

$$U^n \mathfrak{L} \perp U^{*m} \mathfrak{L}^*, \quad U^n \mathfrak{L} \perp \mathfrak{L} \quad \text{et} \quad U^{*m} \mathfrak{L}^* \perp \mathfrak{L} \quad \text{pour } m, n \geq 0;$$

il suffit même d'envisager \mathfrak{L}_0 et \mathfrak{L}_0^* au lieu de \mathfrak{L} et \mathfrak{L}^* . Or on a pour $h, h' \in \mathfrak{L}$:

$$\begin{aligned} (U^n(U-T)h, U^{*m}(U^*-T^*)h') &= \\ &= (U^{n+m+2}h, h') - (U^{n+m+1}h, T^*h') - (U^{n+m+1}Th, h') + (U^{n+m}Th, T^*h') = \\ &= (T^{n+m+2}h, h') - (T^{n+m+1}h, T^*h') - (T^{n+m+1}Th, h') + (T^{n+m}Th, T^*h') = 0, \\ (U^n(U-T)h, h') &= (U^{n+1}h, h') - (U^nTh, h') = (T^{n+1}h, h') - (T^nTh, h') = 0, \\ (U^{*m}(U^*-T^*)h, h') &= (U^{*m+1}h, h') - (U^{*m}T^*h, h') = \\ &= (T^{*m+1}h, h') - (T^{*m}T^*h, h') = 0, \end{aligned}$$

ce qui prouve notre assertion.

Désignons alors la somme orthogonale au second membre de (16) par \mathfrak{R}_0 . On a

$$U\mathfrak{R}_0 = \dots \oplus U^3\mathfrak{L} \oplus U^2\mathfrak{L} \oplus U\mathfrak{L} \oplus U\mathfrak{L}^* \oplus \mathfrak{L}^* \oplus U^*\mathfrak{L}^* \oplus \dots = \mathfrak{R}_0$$

puisque, comme on le verra tout de suite,

$$(17) \quad U\mathfrak{L} \oplus U\mathfrak{L}^* = \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{L}^*.$$

⁶⁾ Posons $Z = (I-T^*T)^{\frac{1}{2}}$. On a $\overline{Z\mathfrak{L}} = \mathfrak{R}_Z^{\frac{1}{2}}$, $\overline{Z^2\mathfrak{L}} = \mathfrak{R}_Z^{\frac{1}{2}}$, \mathfrak{R}_Z étant constitué des zéros de Z et $\mathfrak{R}_Z^{\frac{1}{2}}$ des zéros de Z^2 . Or

$$Zh = 0 \Leftrightarrow Z^2h = 0$$

puisque $Z \geq 0$.

\mathfrak{R}_0 est donc un sous-espace de \mathfrak{R} , réduisant U et contenant \mathfrak{H} , d'où il résulte, en vertu de la propriété de minimum de U , que

$$\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}.$$

Pour établir (17), il suffit d'envisager \mathfrak{L}_0 et \mathfrak{L}_0^* au lieu de \mathfrak{L} et \mathfrak{L}^* et de démontrer que

$$U\mathfrak{H} \oplus U(U^* - T^*)\mathfrak{H} = (U - T)\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}.$$

Or cela s'ensuit du fait que, pour un élément u de \mathfrak{R} , la possibilité d'une représentation sous la forme

$$u = Uh_1 + U(U^* - T^*)h_2 \quad (h_1, h_2 \in \mathfrak{H})$$

est équivalente à la possibilité d'une représentation sous la forme

$$u = (U - T)h' + h'' \quad (h', h'' \in \mathfrak{H}).$$

On aura notamment à poser

$$h' = h_1 - T^*h_2, \quad h'' = Th_1 + (I - TT^*)h_2$$

et réciproquement

$$h_1 = (I - T^*T)h' + T^*h'', \quad h_2 = h'' - Th'.$$

Cela achève la démonstration du théorème.

Remarque. Théorème 1, (i) est compris dans un théorème de HALPERIN [3]. La décomposition (16) peut servir aussi comme point de départ d'une construction de U , c'est ce qui a été fait par SZ.-NAGY [9] et HALPERIN [3].

Théorème 2. *Pour que l'on ait*

$$(a) \quad \mathfrak{M}(\mathfrak{L}) = \mathfrak{R} \quad \text{ou} \quad (a^*) \quad \mathfrak{M}(\mathfrak{L}^*) = \mathfrak{R},$$

il faut et il suffit que la condition

$$(b) \quad T^n \rightarrow O \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{ou} \quad (b^*) \quad T^{*n} \rightarrow O \quad (n \rightarrow \infty)$$

soit vérifiée, selon les cas.

Donc la condition (b) entraîne que U soit une translation bilatérale de multiplicité égale à \mathfrak{d} , et la condition (b) entraîne que U soit une translation bilatérale de multiplicité égale à \mathfrak{d}^* .*

Démonstration. Pour $h \in \mathfrak{H}$ et $n = 1, 2, \dots$ on a

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{L}) \ni \sum_{k=0}^{n-1} U^{-k-1}(U - T)T^k h = \sum_{k=0}^{n-1} (U^{-k}T^k - U^{-k-1}T^{k+1})h = h - U^{-n}T^n h,$$

et sous la condition (b)

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} (h - U^{-n}T^n h) \in \mathfrak{M}(\mathfrak{L}).$$

Donc (b) entraîne

$$\mathfrak{H} \subset \mathfrak{M}(\mathfrak{L}), \quad U^n \mathfrak{H} \subset U^n \mathfrak{M}(\mathfrak{L}) = \mathfrak{M}(\mathfrak{L}) \quad (n=0, \pm 1, \dots)$$

et par conséquent

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{M}(\mathfrak{L}).$$

En vertu du théorème 1, U est alors une translation bilatérale engendrée par le sous-espace ambulant complet \mathfrak{L} .

L'implication (b*) \Rightarrow (a*) se démontre de manière analogue.

Démontrons les implications inverses. Supposons que

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{M}(\mathfrak{L}).$$

Il s'ensuit en particulier que tout $h \in \mathfrak{H}$ admet le développement orthogonal

$$h = \sum_{-\infty}^{\infty} U^k g_k$$

où

$$g_k \in \mathfrak{L}, \quad \sum_{-\infty}^{\infty} \|g_k\|^2 = \|h\|^2.$$

On en déduit que

$$T^n h = P U^n h = P \sum_{k=-\infty}^{\infty} U^{n+k} g_k$$

où P désigne la projection orthogonale sur \mathfrak{H} . Or en vertu de (16) \mathfrak{H} est orthogonal à $U^m \mathfrak{L}$ pour $m \equiv 0$, donc on a

$$T^n h = P \sum_{k=-\infty}^{-n-1} U^{n+k} g_k,$$

$$\|T^n h\|^2 \equiv \left\| \sum_{k=-\infty}^{-n-1} U^{n+k} g_k \right\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{-n-1} \|g_k\|^2$$

et par conséquent

$$T^n h \rightarrow 0 \quad \text{pour } n \rightarrow \infty.$$

L'implication (a*) \Rightarrow (b*) se démontre de manière analogue.

Remarque. Le fait que les conditions (b) et (b*) entraînent que U soit une translation bilatérale, de multiplicité égale à \mathfrak{d} ou à \mathfrak{d}^* , selon les cas, a été démontré déjà par DE BRUIJN [1] par une construction matricielle. Ce résultat comprend un théorème antérieur de SCHREIBER [7] concernant le cas

$$\|T\| < 1,$$

étudié aussi dans la Note II [11]. D'autre part, le résultat de DE BRUIJN vient d'être

généralisé par HALPERIN [3] par une certaine combinaison des conditions (b) et (b*). 7)

Corollaire. Si $\delta = \dim \overline{(I - T^*T)\mathfrak{H}}$ est un nombre fini et la dilatation unitaire minimum U de T est une translation bilatérale de multiplicité égale à δ , on a nécessairement

$$T^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

De même, si δ^* est un nombre fini et U est une translation bilatérale de multiplicité égale à δ^* , on a

$$T^{*n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Démonstration. Il suffit de démontrer la première assertion. Soit

$$U = U' \oplus U''$$

la décomposition de U suivant ses parties U' dans $\mathfrak{M}(\mathfrak{E})$ et U'' dans $\mathfrak{M}(\mathfrak{E})^+$. En vertu du théorème 1, U' est une translation bilatérale, de multiplicité égale à δ . D'après le lemme 2, U'' doit alors être aussi une translation bilatérale. La multiplicité de U est la somme des multiplicités de U' et U'' . Or U et U' ont la même multiplicité finie δ . Il s'ensuit que la multiplicité de U'' doit être égale à 0, c'est-à-dire que

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{E})^+ = \{0\}, \quad \mathfrak{M}(\mathfrak{E}) = \mathfrak{R},$$

et on applique alors le théorème 2.

Théorème 3. Soit T une contraction complètement non-unitaire⁸⁾ de l'espace \mathfrak{H} , et soit U sa dilatation unitaire minimum dans \mathfrak{R} . Soient

$$\delta = \dim \overline{(I - T^*T)\mathfrak{H}}, \quad \delta^* = \dim \overline{(I - TT^*)\mathfrak{H}},$$

et

$$\delta_{\max} = \max \{\delta, \delta^*\}, \quad \delta_{\min} = \min \{\delta, \delta^*\}.$$

7) HALPERIN suppose qu'il existe deux projections dans \mathfrak{H} , Q_1 et Q_2 , telles que

$$Q_2 Q_1 = 0, \quad Q_2 T Q_1 = 0, \quad (I - Q_2) T (I - Q_1) = 0, \\ (T Q_1)^n \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad (T^* Q_2)^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

et démontre que U est alors une translation bilatérale ayant comme générateur le sous-espace ambulant

$$\overline{(U - T)Q_1\mathfrak{H}} \oplus \overline{(I - Q_1 - Q_2)\mathfrak{H}} \oplus \overline{(U^* - T^*)Q_2\mathfrak{H}} \quad (\subset \mathfrak{R}).$$

8) La contraction T de \mathfrak{H} est dite complètement non-unitaire si elle ne comprend pas de partie unitaire, c'est-à-dire s'il n'y a aucun sous-espace $\neq \{0\}$ qui réduise T à une transformation unitaire, ou ce qui revient au même, s'il n'y a aucun élément $h \neq 0$ pour lequel

$$\|T^n h\| = \|h\| = \|T^{*n} h\| \quad \text{pour tout } n > 0.$$

Toute contraction peut être décomposée univoquement en une somme orthogonale d'une transformation unitaire et d'une contraction complètement non-unitaire (une de ces composantes peut être absente, ce qui veut dire que le sous-espace correspondant peut se réduire à $\{0\}$). Voir [4] et [13].

a) Si δ_{\max} est infini, U est une translation bilatérale, de multiplicité égale à δ_{\max} . Le même est vrai si $\dim \mathfrak{H}$ est finie. Dans le cas où $\dim \mathfrak{H} > \aleph_0$, δ_{\max} est toujours infini, notamment on a $\delta_{\max} = \dim \mathfrak{H} > \aleph_0$.

b) Si δ_{\max} est fini et $\dim \mathfrak{H}$ infinie, on a

$$U = U_1 \oplus U_2$$

où U_1 est une translation bilatérale de multiplicité égale à δ_{\max} et U_2 est unitairement équivalente à une somme orthogonale d'opérateurs de multiplication par $e^{i\theta}$ dans des espaces $L^2(M_n)$, soit

$$U_2 \sim \bigoplus U^*(M_n),$$

où le nombre des termes est au plus égal à δ_{\min} .

Par conséquent U a toujours son spectre absolument continu et peut être prolongée à une translation bilatérale \tilde{U} , de multiplicité au plus égale à

$$\delta_{\max} + \delta_{\min} = \delta + \delta^*;$$

\tilde{U} est une dilatation unitaire, non nécessairement minimum, de T .⁹⁾

Démonstration. Commençons par démontrer que si T est complètement non-unitaire, la somme vectorielle

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{Q}) + \mathfrak{M}(\mathfrak{Q}^*)$$

est dense dans \mathfrak{F} .

Soit $f \in \mathfrak{F}$, orthogonal à $\mathfrak{M}(\mathfrak{Q})$ et à $\mathfrak{M}(\mathfrak{Q}^*)$, et montrons qu'alors $f=0$. Comme f est orthogonal en particulier à $U^n \mathfrak{Q}$ et $U^{*n} \mathfrak{Q}^*$ pour $n=0, 1, \dots$, il résulte de (16) que f appartient nécessairement à \mathfrak{H} . Du fait que f est orthogonal à $U^{*n} \mathfrak{Q}$ ($n \geq 1$) il s'ensuit que pour tout $h \in \mathfrak{H}$

$$0 = (f, U^{*n}(U-T)h) = (U^{n-1}f, h) - (U^n g, Th) = (T^{n-1}f, h) - (T^n f, Th);$$

en posant $h = T^{n-1}f$ il en résulte

$$\|T^{n-1}f\|^2 - \|T^n f\|^2 = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

donc

$$\|f\| = \|Tf\| = \|T^2 f\| = \dots$$

Du fait que f est orthogonal à $U^n \mathfrak{Q}^*$ ($n \geq 1$) il résulte de manière analogue que

$$\|f\| = \|T^* f\| = \|T^{*2} f\| = \dots$$

Puisque T est complètement non-unitaire, ces équations entraînent

$$f=0.$$

Cela prouve que $\mathfrak{M}(\mathfrak{Q}) + \mathfrak{M}(\mathfrak{Q}^*)$ est dense dans \mathfrak{F} .

Théorème 3 est alors une conséquence immédiate du lemme 5, sauf dans le cas où $\dim \mathfrak{H}$ est finie.

⁹⁾ Le fait que U a son spectre absolument continu et admet comme prolongement une translation bilatérale, a été démontré déjà dans la Note IV [13], à l'aide de certains théorèmes assez profonds de la théorie des fonctions analytiques.

Si $\dim \mathfrak{H}$ est finie, la contraction complètement non-unitaire T a son spectre situé entièrement dans l'intérieur du cercle unité, d'où il s'ensuit que $T^n \rightarrow 0$ et $T^{*n} \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$. En vertu du théorème 2, U est alors une translation bilatérale de multiplicité égale à la fois à \mathfrak{d} et à \mathfrak{d}^* (donc $\mathfrak{d}_{\max} = \mathfrak{d} = \mathfrak{d}^*$).

Observons finalement que si $\dim \mathfrak{H} > \aleph_0$, \mathfrak{d}_{\max} est nécessairement infini, parce que

$$\dim \mathfrak{H} \cong \dim \mathfrak{R} \cong \dim \mathfrak{M}(\mathfrak{R}) + \dim \mathfrak{M}(\mathfrak{R}^*) = \aleph_0 \cdot \mathfrak{d} + \aleph_0 \cdot \mathfrak{d}^* = \aleph_0 \cdot \mathfrak{d}_{\max}$$

entraîne dans ce cas

$$\dim \mathfrak{H} = \mathfrak{d}_{\max}.$$

Cela achève la démonstration du théorème 3.

Corollaire 1. *Si $\|Th\| < \|h\|$ pour tout $h \neq 0$, U est une translation bilatérale de multiplicité égale à $\dim \mathfrak{H}$.*

Démonstration. T est alors évidemment complètement non-unitaire et $(I - T^*T)h \neq 0$ pour $h \neq 0$, par conséquent $\overline{(I - T^*T)\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}$, $\mathfrak{d} = \dim \mathfrak{H}$. On a donc à appliquer le théorème 3, a).

Ce corollaire affirme une conjecture de DE BRUIJN, formulée à la fin de sa Note [1].

Corollaire 2. *Soit T une contraction complètement non-unitaire de \mathfrak{H} , et soit*

$$n = \mathfrak{d} + \mathfrak{d}^* < \infty.$$

Il n'y a alors pas de décomposition de \mathfrak{H} en somme orthogonale de plus de n sous-espaces $\mathfrak{H}_i \neq \{0\}$ dont chacun réduise T .

Démonstration. Soit

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{H}_m$$

une décomposition de \mathfrak{H} en somme orthogonale de sous-espaces $\mathfrak{H}_i \neq \{0\}$ dont chacun réduit T . Soit

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{R}_m$$

la décomposition correspondante de l'espace de la dilatation unitaire minimum U de T ,

$$\mathfrak{R}_i = \mathfrak{M}(\mathfrak{H}_i).$$

La partie de U dans \mathfrak{R}_i , soit U_i , est alors la dilatation unitaire minimum de la partie T_i de T dans \mathfrak{H}_i . Comme T_i n'est pas unitaire, il y a dans \mathfrak{R}_i un sous-espace $\mathfrak{A}_i \neq \{0\}$, ambulant par rapport à U_i (notamment on peut choisir pour \mathfrak{A}_i un des sous-espaces $\mathfrak{R}_i, \mathfrak{R}_i^*$, correspondant à T_i en vertu du théorème 1).

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \oplus \mathfrak{A}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{A}_m$$

est alors un sous-espace de \mathfrak{R} , ambulant par rapport à U et on a

$$\dim \mathfrak{A} \cong m.$$

\mathfrak{X} est alors ambulant aussi par rapport à la translation bilatérale \tilde{U} , de multiplicité $\leq n$, qui prolonge U (voir le théorème 3). D'après le lemme 1 on a donc $\dim \mathfrak{X} \leq n$. Par conséquent $m \leq n$.

Remarque. Dans le cas de la transformation

$$T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

de l'espace l^2 on a $n=1$. En vertu du corollaire il n'y a donc pas de sous-espace réduisant T autre que ceux banaux $\{0\}$ et l^2 . Ce résultat a été obtenu déjà par WERMER [14].

2. Le théorème suivant s'approche d'un autre côté du problème de la structure de la dilatation unitaire minimum U de la contraction T .

Théorème 4. *Supposons que le spectre σ_T de T ne recouvre pas le cercle unité C_0 . Dans ce cas on a*

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{d}^*$$

et \mathfrak{R} peut être décomposé en somme orthogonale de deux sous-espaces réduisant U , soit

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2,$$

de sorte que la partie de U dans \mathfrak{R}_1 soit une translation bilatérale de multiplicité \mathfrak{d} et la partie de U dans \mathfrak{R}_2 ait son spectre entièrement contenu dans

$$\sigma_T \cap C_0;$$

telle est la décomposition fournie par

$$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{M}(\mathfrak{L}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{M}(\mathfrak{L})^\perp.$$

Démonstration. Soit z un point dans l'ensemble ouvert

$$\varrho = C_0 - \sigma_T$$

et posons

$$R = (zI - T)^{-1}.$$

Il résulte des relations évidentes

$$\begin{aligned} R(zI + T) + (zI + T)^* R^* &= R[(zI + T)(zI - T)^* + (zI - T)(zI + T)^*] R^* = \\ &= 2R(I - TT^*) R^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (zI + T)R + R^*(zI + T)^* &= R^*[(zI - T)^*(zI + T) + (zI + T)^*(zI - T)] R = \\ &= 2R^*(I - T^*T)R, \end{aligned}$$

où les premiers membres sont égaux, qu'on a

$$R(I - TT^*) R^* = R^*(I - T^*T) R$$

et par conséquent

$$R(I - TT^*) \mathfrak{H} = R^*(I - T^*T) \mathfrak{H}.$$

On peut donc appliquer $\overline{(I - TT^*) \mathfrak{H}}$ sur $\overline{(I - T^*T) \mathfrak{H}}$ par la transformation linéaire biunivoque et bicontinue $R^*^{-1}R = (zI - T)^*(zI - T)^{-1}$, et par conséquent $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}^*$.

Soit $E(\cdot)$ la mesure spectrale de U , étalée sur C_0 . Soit, comme plus haut, $\mathfrak{L}_0 = (U - T)\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L} = \overline{\mathfrak{L}_0}$, et remarquons que

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{L}) = \bigvee_{-\infty}^{\infty} U^n \mathfrak{L}_0 = \bigvee E(\delta) \mathfrak{L}_0$$

où δ parcourt l'ensemble des arcs de C_0 .

Soit Δ un arc de C_0 , situé avec ses extrémités dans l'intérieur de ϱ . Puisque $\|(zI - T)^{-1}\|$ est une fonction continue de z dans l'ensemble résolvant de T , on a pour $z \in \Delta$

$$\|(zI - T)^{-1}\| \leq M_\Delta \quad (= \text{constante indépendante de } z).$$

Envisageons une décomposition \mathfrak{D} de Δ en un nombre fini d'arcs (fermés, demi-ouverts ou ouverts) $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, deux-à-deux sans points communs, et dans chaque δ_k prenons un point z_k . Soit h un élément de \mathfrak{L} et posons

$$h_{\mathfrak{D}} = \sum_{k=1}^n E(\delta_k)(U - T)(z_k I - T)^{-1} h;$$

$h_{\mathfrak{D}}$ appartient à

$$E(\Delta)\mathfrak{M}(\mathfrak{L}) = E(\Delta) \bigvee_{\delta} E(\delta) \mathfrak{L}_0 = \bigvee_{\delta \subset \Delta} E(\delta) \mathfrak{L}_0.$$

Or,

$$\begin{aligned} h_{\mathfrak{D}} &= \sum_{k=1}^n E(\delta_k)(z_k I - T + U - z_k I)(z_k I - T)^{-1} h = \\ &= \sum_{k=1}^n E(\delta_k) h + \sum_{k=1}^n E(\delta_k)(U - z_k I)(z_k I - T)^{-1} h = E(\Delta)h + g_{\mathfrak{D}}. \end{aligned}$$

Comme les projections $E(\delta_k)$ sont orthogonales deux-à-deux, on a

$$\|g_{\mathfrak{D}}\|^2 = \sum_{k=1}^n \|E(\delta_k)(U - z_k I)(z_k I - T)^{-1} h\|^2,$$

et comme

$$\|E(\delta_k)(U - z_k I)\| = \left\| \int_{\delta_k} (z - z_k) dE_{\theta} \right\| \leq \max_{z \in \delta_k} |z - z_k| \leq |\delta_k|,^{10)}$$

il résulte que

$$\|g_{\mathfrak{D}}\|^2 \leq \sum_{k=1}^n |\delta_k|^2 M_\Delta^2 \|h\|^2 \leq M_\Delta^2 \|h\|^2 |\Delta| \max_i |\delta_i|.$$

Faisons varier la décomposition \mathfrak{D} de sorte que la longueur maximum des intervalles de décomposition tende vers 0. On aura alors $g_{\mathfrak{D}} \rightarrow 0$, $h_{\mathfrak{D}} \rightarrow E(\Delta)h$, et par conséquent $E(\Delta)h$ appartient aussi à $E(\Delta)\mathfrak{M}(\mathfrak{L})$. Puisque h était un élément quelconque de \mathfrak{L} , cela prouve que

$$E(\Delta)\mathfrak{L} \subset E(\Delta)\mathfrak{M}(\mathfrak{L}).$$

¹⁰⁾ $|\delta|$ désignera la longueur d'arc de δ .

L'ensemble ouvert ϱ est somme dénombrable de tels arcs Δ , donc on a aussi

$$E(\varrho)\mathfrak{H} \subset E(\varrho)\mathfrak{M}(\mathfrak{L}).$$

Comme U^n permute à $E(\varrho)$ et comme $U^n\mathfrak{M}(\mathfrak{L}) = \mathfrak{M}(\mathfrak{L})$, il en découle aussi

$$E(\varrho)U^n\mathfrak{H} \subset E(\varrho)\mathfrak{M}(\mathfrak{L}) \text{ pour } n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Vu que les sous-espaces $U^n\mathfrak{H}$ sous-tendent \mathfrak{K} et que, d'autre part, $\mathfrak{M}(\mathfrak{L})$ est contenu dans \mathfrak{K} , il en résulte que

$$(18) \quad E(\varrho)\mathfrak{K} = E(\varrho)\mathfrak{M}(\mathfrak{L}).$$

Soit Q la projection dans \mathfrak{K} sur $\mathfrak{M}(\mathfrak{L})$; Q permute à U donc aussi à $E(\varrho)$ et par conséquent $E(\varrho)Q$ est aussi une projection. Par (18) on a

$$(19) \quad E(\varrho)Q = E(\varrho), \quad E(\varrho)(I - Q) = O.$$

La décomposition de \mathfrak{K} par $\mathfrak{M}(\mathfrak{L})$ et $\mathfrak{M}(\mathfrak{L})^\perp$ est de type énoncé dans le théorème. En effet, la partie de U dans $\mathfrak{M}(\mathfrak{L})$ est une translation bilatérale, ayant \mathfrak{L} pour sous-espace ambulant générateur. D'autre part, la mesure spectrale $E'(\cdot)$ de la partie de U dans $\mathfrak{M}(\mathfrak{L})^\perp$ est égale à la partie de $E(\cdot)$ dans $\mathfrak{M}(\mathfrak{L})^\perp$, donc, par (19), $E'(\varrho) = O$. Cela achève la démonstration.

Corollaire 1. *Si pour une contraction complètement non-unitaire T l'ensemble $\sigma_T \cap C_0$ est de mesure (linéaire) 0, on a*

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{M}(\mathfrak{L}).$$

Donc U est alors une translation bilatérale, de multiplicité égale à \mathfrak{d} ($=\mathfrak{d}^$).*

Démonstration. En effet, la mesure spectrale $E'(\cdot)$ est alors supportée par un ensemble de mesure 0; comme d'autre part cette mesure spectrale est absolument continue, on a $E'(\sigma) = O$ pour tout σ borélien de mesure 0, donc $\mathfrak{M}(\mathfrak{L})^\perp = \{0\}$.

Corollaire 2. *Soit T une contraction quelconque telle que \mathfrak{d} est un nombre fini et σ_T ne recouvre pas C_0 . Si la dilatation unitaire minimum U de T est une translation bilatérale, on a nécessairement*

$$T^n \rightarrow O \text{ et } T^{*n} \rightarrow O \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)}.$$

Démonstration. La partie U' de U dans $\mathfrak{M}(\mathfrak{L})$ étant une translation bilatérale de multiplicité finie \mathfrak{d} , il s'ensuit du lemme 2 que la partie U'' de U dans $\mathfrak{M}(\mathfrak{L})^\perp$ est aussi une translation bilatérale. Or, par le théorème 4, U'' a son spectre contenu dans $\sigma_T \cap C_0$, donc ce spectre ne recouvre pas C_0 . Puisque le spectre d'une translation bilatérale d'un espace $\neq \{0\}$ recouvre C_0 , on a nécessairement $\mathfrak{M}(\mathfrak{L})^\perp = \{0\}$, $\mathfrak{M}(\mathfrak{L}) = \mathfrak{K}$. On en conclut par le théorème 2 que $T^n \rightarrow O$.

En partant de \mathfrak{L}^* au lieu de \mathfrak{L} ($\mathfrak{d} = \mathfrak{d}^*$), on obtient de la même façon que $T^{*n} \rightarrow O$.

3. Un exemple. Nous montrons par un exemple qu'il existe une contraction complètement non-unitaire dont la dilatation unitaire minimum n'est pas une translation bilatérale.

Soit $\mathfrak{H} = L^2(0, 1)$ et pour $f \in \mathfrak{H}$ posons

$$A_0 f(x) = xf(x), \quad Af(x) = xf(x) + i \int_0^x f(t) dt.$$

On a alors

$$A^* f(x) = xf(x) - i \int_x^1 f(t) dt$$

et par conséquent

$$A = B + \frac{i}{2} P$$

où $B = \operatorname{Re} A$ et P est une projection de rang 1, notamment

$$Pf = (f, 1)1.$$

B étant une transformation autoadjointe, on a $\|(B + iI)^{-1}\| \leq 1$,

$$\left\| (B + iI)^{-1} \frac{i}{2} P \right\| \leq \frac{1}{2}$$

et par conséquent la transformation

$$A + iI = B + iI + \frac{i}{2} P = (B + iI) \left(I + (B + iI)^{-1} \frac{i}{2} P \right)$$

admet aussi une inverse bornée. Posons

$$T = (A - iI)(A + iI)^{-1}.$$

On obtient par un calcul simple

$$I - T^* T = 2D^* P D, \quad I - T T^* = 2D P D^*$$

où

$$D = (A + iI)^{-1}.$$

De ces relations on conclut que $I - T^* T \geq 0$, c'est-à-dire que T est une contraction, et que

$$d = \dim \overline{(I - T^* T)\mathfrak{H}} = \dim \overline{D^* P D \mathfrak{H}} = 1,$$

$$d^* = \dim \overline{(I - T T^*)\mathfrak{H}} = \dim \overline{D P D^* \mathfrak{H}} = 1.$$

D'après un théorème de SAKHNOVITCH [6] il existe une application linéaire biunivoque et bicontinue L de \mathfrak{H} sur \mathfrak{H} telle que

$$A = L A_0 L^{-1}$$

et par conséquent

$$T = L V_0 L^{-1}$$

où

$$V_0 = (A_0 - iI)(A_0 + iI)^{-1}$$

est une transformation unitaire. Le spectre de A_0 est le segment $[0, 1]$ et le spectre de V_0 est l'image de ce segment par l'application

$$x \rightarrow \frac{x-i}{x+i}$$

de l'axe réelle sur C_0 . Donc

$$\sigma_{V_0} = \left\{ e^{i\theta} : \pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi \right\}.$$

Puisque $\sigma_T = \sigma_{V_0}$, on voit que σ_T ne recouvre pas C_0 .

Puisque T n'est pas unitaire, comprend une partie complètement non-unitaire $T^{(0)}$ non dégénérée, c'est-à-dire opérant dans un sous-espace $\mathfrak{H}^{(0)} \neq \{0\}$. Les quantités δ, δ^* pour $T^{(0)}$ sont les mêmes que pour T , donc égales à 1, et comme $\sigma_{T^{(0)}} \subset \sigma_T$, $\sigma_{T^{(0)}}$ ne recouvre pas C_0 . Soit $U^{(0)}$ la dilatation unitaire minimum de $T^{(0)}$. Si $U^{(0)}$ était une translation bilatérale, on aurait, d'après le corollaire 2 ci-dessus, $T^{(0)n} \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$, c'est-à-dire que

$$\|T^n f\| \rightarrow 0 \text{ pour } f \in \mathfrak{H}^{(0)}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Or cela entraîne

$$\|f\| = \|LV_0^{-n}L^{-1}LV_0^nL^{-1}f\| = \|LV_0^{-n}L^{-1}T^n f\| \leq \|L\| \|L^{-1}\| \|T^n f\| \rightarrow 0,$$

donc $f=0$, ce qui est impossible puisque $\mathfrak{H}^{(0)}$ comprend aussi des éléments $f \neq 0$.

Cela prouve que $U^{(0)}$ n'est pas une translation bilatérale.

3. Un théorème sur la mesure spectrale des dilatations unitaires

On a démontré dans [11] (Corollaire 2. 2) que si T n'est pas unitaire, le spectre de U recouvre le cercle unité C_0 . Ce fait découle aussi des théorèmes du paragraphe précédent. En effet, si T n'est pas unitaire, on a $\delta_{\max} = \max \{\delta, \delta^*\} \cong 1$ et par conséquent il existe un sous-espace $\neq \{0\}$ qui réduit U à une translation bilatérale (cf. Théorème 1); or le spectre d'une translation bilatérale recouvre C_0 .¹¹⁾ On a même plus, notamment que pour un ensemble borélien $\sigma \subset C_0$

$$m(\sigma) \neq 0 \text{ entraîne } E(\sigma) \neq 0,$$

m et E désignant la mesure de Lebesgue et la mesure spectrale attachée à U étalées sur C_0 .

Nous allons préciser ce résultat comme suit:

Théorème 5. *Soit T une contraction complètement non-unitaire de l'espace \mathfrak{H} , et soit U sa dilatation unitaire minimum. Pour tout ensemble borélien $\sigma \subset C_0$ de mesure $m(\sigma) \neq 0$, on a $E(\sigma)h \neq 0$ pour tout $h \in \mathfrak{H}$, $h \neq 0$.*

Démonstration. Supposons que nous ayons un $\sigma \subset C_0$ et un $h \in \mathfrak{H}$ tels que

$$(20) \quad m(\sigma) > 0, \quad E(\sigma)h = 0,$$

et montrons que cela entraîne $h=0$.

¹¹⁾ Cf. aussi HALPERIN [3].

Pour tout $f \in \mathfrak{K}$ la fonction $(E_\theta h, f)$ de θ est absolument continue dans $[0, 2\pi]$ (puisque E_θ l'est, cf. Théorème 3). De (20) il s'ensuit que la fonction

$$p(\theta) = d(E_\theta h, f) / d\theta \quad (\in L(0, 2\pi))$$

s'annule dans un ensemble de mesure positive¹²). Ses coefficients de Fourier sont

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} p(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} d(E_\theta h, f) = \frac{1}{2\pi} (U^{-k}h, f) = \frac{1}{2\pi} (h, U^k f) \quad (k=0, \pm 1, \dots).$$

Soit en particulier f de la forme $f = (U - T)g$, $g \in \mathfrak{S}$. Dans ce cas $c_k = 0$ pour $k=0, 1, \dots$ parce que

$$(h, U^k(U - T)g) = (h, U^{k+1}g) - (h, U^k Tg) = (h, T^{k+1}g) - (h, T^k Tg) = 0.$$

Or on sait que si la fonction $\varphi(\theta) \in L(0, 2\pi)$ s'annule dans un ensemble de mesure positive et ses coefficients de Fourier c_k sont égaux à 0 pour $k \geq 0$, ils sont égaux à 0 aussi pour $k < 0$.¹³)

Donc on a aussi

$$0 = (h, U^{-k}(U - T)g) = (h, U^{-k+1}g) - (h, U^{-k} Tg) = (h, T^{*k-1}g) - (h, T^{*k} Tg)$$

pour $k \geq 1$. En posant en particulier $g = T^{k-1}h$ il en résulte

$$(h, T^{*k-1} T^{k-1} h) - (h, T^{*k} T^k h) = 0, \quad \|T^{k-1}h\| = \|T^k h\| \quad (k \geq 1),$$

¹²) Si s est l'ensemble des points du segment $(0, 2\pi)$ qui correspond à l'ensemble σ par l'application $e^{i\theta} \rightarrow \theta$, on a

$$\int_s |p(\theta)| d\theta = \text{var}_s (E_\theta h, f) \leq \|E(\sigma)h\| \|E(\sigma)f\| = 0,$$

conséquence de ce que, pour des arcs disjoints quelconques $\delta_1, \dots, \delta_n$ de C_0 ,

$$\begin{aligned} \sum_i |(E(\delta_i)h, f)| &= \sum_i |(E(\delta_i)h, E(\delta_i)f)| \leq \sum_i \|E(\delta_i)h\| \|E(\delta_i)f\| \leq \\ &\leq [\sum_i \|E(\delta_i)h\|^2]^\frac{1}{2} [\sum_i \|E(\delta_i)f\|^2]^\frac{1}{2} = \|E(\cup_i \delta_i)h\| \|E(\cup_i \delta_i)f\|. \end{aligned}$$

¹³) En effet, on a alors

$$\overline{\varphi(\theta)} \sim \sum_1^\infty \overline{c_{-k}} e^{ik\theta};$$

la fonction

$$\Phi(z) = \sum_1^\infty \overline{c_{-k}} z^k$$

appartient à la classe de Hardy H^1 , et sa valeur limite

$$\lim_{r \rightarrow 1} \Phi(re^{i\theta}),$$

étant égalé p. p. à $\overline{\varphi(\theta)}$, s'annule dans un ensemble de mesure positive. Cela entraîne que $\Phi(z) \equiv 0$, donc $\varphi(\theta) = 0$ p. p. (cf. [5]).

donc

$$\|h\| = \|Th\| = \|T^2h\| = \dots$$

En échangeant les rôles de T et T^* , U et U^* , dans le raisonnement ci-dessus, on obtient de manière analogue

$$\|h\| = \|T^*h\| = \|T^{*2}h\| = \dots$$

T étant complètement non-unitaire il s'ensuit que $h=0$.
Cela achève la démonstration du théorème 5.

Ouvrages cités

- [1] N. G. DE BRUIJN, On unitary equivalence of unitary dilations of contractions in Hilbert space, *Acta Sci. Math.*, **23** (1962), 100—105; annoncé au *Deuxième congrès mathématique hongrois*, Budapest, 24—31. août 1960.
- [2] P. R. HALMOS, Shifts on Hilbert spaces, *J. reine angew. Math.*, **208** (1961), 102—112.
- [3] I. HALPERIN, The unitary dilation of a contraction operator, *Duke Math. J.*, **28** (1961), 563—572.
- [4] H. LANGER, Ein Zerspaltungssatz für Operatoren im Hilbertraum, *Acta Math. Hung.*, **12** (1961), 441—445.
- [5] F. et M. RIESZ, Über die Randwerte einer analytischen Funktion, *Quatrième congrès des mathématiciens scandinaves*, 1956, 27—44.
- [6] Л. А. САХНОВИЧ, О приведении вольтерровских операторов к простейшему виду и обратных задачах, *Изв. Акад. Наук СССР, сер. матем.*, **21** (1957), 235—262.
- [7] M. SCHREIBER, Unitary dilations of operators, *Duke Math. J.*, **23** (1956), 579—594.
- [8] B. SZ.-NAGY, *Prolongements des transformations linéaires de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace*. Appendice au livre „Leçons d'analyse fonctionnelle” par F. Riesz et B. Sz.-Nagy (Budapest, 1955).
- [9] ——— On Schäffer's construction of unitary dilations, *Annales Univ. Budapest, sect. math.*, **3—4** (1960/61), 343—346; annoncé dans une conférence au *Deuxième congrès mathématique hongrois*, Budapest, 24—31. août 1960.
- [10] ——— Sur les contractions de l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math.*, **15** (1953), 87—92.
- [11] ——— Sur les contractions de l'espace de Hilbert. II, *ibidem*, **18** (1957), 1—15.
- [12] ——— et C. FOIAS, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. III, *ibidem*, **19** (1958), 26—45.
- [13] ——— Sur les contractions de l'espace de Hilbert. IV, *ibidem*, **21** (1960), 251—259.
- [14] J. WERMER, On restrictions of operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 860—865.

(Reçu le 15 novembre 1961)