Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VI
Calcul fonctionnel

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged et CIPRIAN FOIAŞ à Bucarest

Le but de cette Note est de développer un calcul fonctionnel pour les contractions de l'espace de Hilbert, admettant aussi des fonctions non bornées; ainsi on continue le sujet de la Note III [17] où l'on a envisagé seulement des fonctions bornées. Moyennant la relation

$$A=(I+T)(I-T)^{-I}$$

qui relie une classe importante de transformations A à la classe des contractions T n'ayant pas la valeur propre 1, on obtient simultanément un calcul fonctionnel pour ces transformations A; on étudie en particulier les puissances d'ordre fractionnaire A^{α}.

1. Les classes A, H et H_T

Commençons par le calcul fonctionnel pour les fonctions bornées, dans une forme légèrement élargie.

1. Soit A la classe des fonctions

$$u(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad \text{avec} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|<\infty, \tag{1.1}$$

qui sont holomorphes dans le disque unité ouvert

$$D=\{z: |z|<1\}$$

et continues dans le disque unité fermé

$$\bar{D}=\{z: |z|\leqq 1\}.$$

A est une algèbre par rapport à l'addition et la multiplication usuelles des fonctions, et invariante par rapport à l'opération involutive $u \rightarrow u^*$ définie par

$$u^*(z)=\overline{u(\bar{z})}.$$

Soit T une contraction de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ et faisons correspondre à la fonction (1.1) la transformation

$$u(T)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k T^k \tag{1.2}$$

de $\mathfrak{H}$, cette série convergeant en norme. Pour T fixée on obtient de cette façon une application

$$u(z) \rightarrow u(T)$$

de l'algèbre A dans l'algèbre $B(\mathfrak{H})$ des transformations linéaires bornées de l'espace $\mathfrak{H}$; cette application est un homomorphisme d'algèbre, de plus on a

$$u(T)^* = u^*(T^*). \tag{1. 3}$$

Dans le cas particulier où T est normale, cette définition de $u(T)$ est compatible avec celle par la décomposition spectrale de T, conséquence de ce que la série (1. 1) converge uniformément dans $\bar{D}$.

Soit U_T la dilatation unitaire minimum de T. Les relations

$$T^n = \text{pr } U_T^n \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

entraînent

$$u(T) = \text{pr } u(U_T) \tag{1. 4}$$

pour toute fonction $u \in$ A.

2. Soit H la classe de toutes les fonctions $u(z)$, holomorphes et bornées dans D. D'après le théorème de Fatou [4] la fonction $u \in \mathfrak{H}$ admet la valeur limite

$$u(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1} u(re^{i\theta})$$

en tous les points $z = e^{i\theta}$ du cercle unité

$$C = \{z : |z| = 1\}$$

sauf les points d'un ensemble (éventuellement vide) que nous désignerons par

$$C_u$$

et qui est de mesure 0 par rapport à la mesure de Lebesgue sur C:

$$m(C_u) = 0.$$

Puisque $u(rz)$ est une fonction continue de r et z pour $0 < r < 1$, $z \in C$, l'ensemble C_u est borélien et la fonction $u(e^{i\theta})$, définie dans $C - C_u$, est mesurable (B). Par conséquent l'ensemble C_u et la fonction $u(e^{i\theta})$ sont mesurables par rapport à toute mesure spectrale étalée sur C.

Faisons les définitions suivantes. Désignons par

$$E_T(\cdot)$$

la mesure spectrale correspondant à la dilatation unitaire minimum U_T de la contraction T; $E_T(\sigma)$ est définie pour tous les sous-ensembles boréliens σ de C. Soit

$$\mathrm{H}_T$$

la classe des fonctions $u \in$ H pour lesquelles

$$E_T(C_u) = O.$$

H est évidemment une algèbre et, pour T fixée, H_T est une sous-algèbre de H.

On étend l'application $u(z) \to u(T)$ de la classe A à la classe plus vaste H_T de la manière suivante. Pour $0<r<1$ la fonction appartient à A, donc $u_r(T)$ se trouve déjà définie; posons alors

$$u(T)=\lim_{r\to 1} u_r(T).\text{[1]} \tag{1.5}$$

Cette définition est possible, la limite existant au sens *fort*. En effet, comme on a en vertu de (1. 4)

$$u_r(T)=\mathrm{pr}\, u_r(U_T),$$

il suffit de montrer que $u_r(U_T)$ converge fortement lorsque $r\to 1$, notamment vers

$$u(U_T)=\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\, dE_{T,\theta}.\text{[2]}$$

Or on a pour un élément quelconque f de l'espace de dilatation $\mathfrak{K}_T$

$$\|[u(U_T)-u_r(U_T)]f\|^2=\int_0^{2\pi} |u(e^{i\theta})-u_r(e^{i\theta})|^2\, d(E_{T,\theta}f,f)\to 0,$$

en vertu du théorème de Lebesgue sur l'intégration terme à terme des suites bornées et convergentes presque partout. La définition (1. 5) revient donc à poser

$$u(T)=\mathrm{pr}\, u(U_T). \tag{1.5'}$$

3. L'application $u(z)\to u(T)$, ainsi étendue à la classe H_T, continue d'être un homomorphisme d'algèbre, conséquence des relations évidentes

$$(cu)_r(T)=cu_r(T),\quad (u+v)_r(T)=u_r(T)+v_r(T),\quad (uv)_r(T)=u_r(T)v_r(T).$$

Comme T^* a sa dilatation unitaire minimum égale à $(U_T)^*$, on a

$$E_{T^*}(\sigma)=E_T(\sigma^*)$$

où σ^* est l'image symétrique de σ par rapport à l'axe réelle. Par conséquent $u\in\mathsf{H}_T$ entraîne $u^*\in\mathsf{H}_{T^*}$, et comme par (1. 3)

$$u_r(T)^*=(u_r)^*(T^*)=(u^*)_r(T^*),$$

on obtient en passant à la limite $(r\to 1)$:

$$u(T)^*=u^*(T^*)\quad \text{pour}\quad u\in\mathsf{H}_T. \tag{1.6}$$

---

[1]) Pour $u(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k\in\mathsf{A}$ cette définition est compatible avec la précédente, parce que

$$\|u(T)-u_r(T)\|=\left\|\sum_{k=0}^{\infty}(1-r^k)c_kT^k\right\|\leqq\sum_{k=0}^{\infty}(1-r^k)\,|c_k|\to 0\qquad (r\to 1).$$

[2]) $\{E_{T,\theta}\}$ est la famille spectrale de U_T, étalée sur le segment $0<\theta\leqq 2\pi$. Donc $E_{T,\theta}=E_T(a_\theta)$ où a_θ désigne l'arc $(1, e^{i\theta}]$ de C.

En vertu de la théorie spectrale on a

$$\|u(U_T)\| \leqq \sup |u(e^{i\theta})|$$

pour toute fonction de la transformation unitaire U_T. Faisant usage de la représentation (1. 5′) on obtient l'inégalité

(1. 7) $$\|u(T)\| \leqq \sup_D |u(z)| \quad \text{pour} \quad u \in \mathsf{H}_T.$$

De cette inégalité il s'ensuit que si la suite des fonctions $u_n \in \mathsf{H}_T$ tend vers la fonction $u \in \mathsf{H}_T$ uniformément dans D, $u_n(T)$ converge vers $u(T)$ *en norme.*

Un critère pour la convergence *forte*

$$u_n(T) \to u(T) \quad (u_n, u \in \mathsf{H}_T)$$

est que les fonctions $u_n(z)$ soient bornées uniformément dans D et

$$u_n(e^{i\theta}) \to u(e^{i\theta})$$

presque partout par rapport à la mesure spectrale $E_T(\cdot)$. En effet, on a alors pour tout $h \in \mathfrak{H}$

$$\|[u_n(T) - u(T)]h\|^2 \leqq \|[u_n(U_T) - u(U_T)]h\|^2 = \int_0^{2\pi} |u_n(e^{i\theta}) - u(e^{i\theta})|^2 \, d(E_{T,\theta} h, h) \to 0$$

en vertu du théorème de Lebesgue sur l'intégration terme à terme des suites bornées, convergentes presque partout.

4. Dans le cas particulier d'une contraction T *complètement non-unitaire,*[3]) $E_T(\cdot)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $m(\cdot)$, et par conséquent $E_T(C_u) = O$ pour toute fonction $u \in \mathsf{H}$. Donc, dans ce cas,

$$\mathsf{H}_T = \mathsf{H}.$$

Dans le cas d'une contraction de *type général,* soit

$$T = V \oplus T^{(0)}$$

la décomposition canonique de T en somme orthogonale de ses parties unitaire V et complètement non-unitaire $T^{(0)}$.[4]) On a alors

$$U_T = U_V \oplus U_{T^{(0)}} \quad \text{et} \quad E_T(\sigma) = E_V(\sigma) \oplus E_{T^{(0)}}(\sigma)$$

où $U_V = V$ parce que V est unitaire. Pour un ensemble σ de mesure $m(\sigma) = 0$ on a $E_{T^{(0)}}(\sigma) = O$, par conséquent $E_V(\sigma) = O$ entraîne, dans ce cas, $E_T(\sigma) = O$ et réciproquement. En appliquant cette relation en particulier aux ensembles C_u attachés aux fonctions $u \in \mathsf{H}$, on déduit que

(1. 8) $$\mathsf{H}_T = \mathsf{H}_V.$$

---

3) *Voir* [18].
4) *Voir* [18] ou [10].

Envisageons le cas où la contraction T est *normale*,

$$T=\int_{\bar{D}} z\,dK_z.$$

On a alors

$$u(T)=\int_{\bar{D}} u(z)\,dK_z$$

pour toute fonction $u \in \mathsf{H}_T$. Cette équation subsiste notamment pour les fonctions u_r $(0<r<1)$ et conserve sa validité lors du passage à la limite $(r\to 1)$. En effet, $u_r(z)$ est bornée uniformément et tend vers $u(z)$ partout dans $\bar{D}$ sauf dans l'ensemble C_u, situé sur C. L'assertion s'ensuivra par le théorème de convergence de Lebesgue si nous montrons que C_u est de mesure O par rapport à la mesure spectrale $K(\cdot)$ étalée sur $\bar{D}$, ou, ce qui revient au même, par rapport à sa restriction $K_0(\cdot)$ aux sous-ensembles boréliens de la circonférence C. Or il est manifeste que $K_0(\cdot)$ est la mesure spectrale de la partie unitaire V de T; par conséquent l'équation $K_0(C_u)=O$ dérive de l'équation $E_T(C_u)=O$.

5. Soit $w \in \mathsf{H}_T$ et $|w(z)|<1$ dans D. En vertu de (1. 7),

$$T'=w(T) \tag{1. 8}$$

est alors une contraction.

En vue d'étudier les fonctions de T', envisageons d'abord la partie unitaire V' de T', opérant dans le sous-espace $\mathfrak{H}'$, et la mesure spectrale correspondante $E_{V'}(\cdot)$.

De (1. 8) et (1. 5′) on déduit

$$\left.\begin{aligned} T'^n &= w^n(T) = \operatorname{pr} w^n(U_T)\\ T'^{*n} &= \operatorname{pr}\,[w^n(U_T)]^* \end{aligned}\right. \qquad (n=0, 1, \ldots); \tag{1.9}$$

d'autre part on a

$$\|w(U_T)\| \leqq \sup |w(z)| \leqq 1. \tag{1. 10}$$

Soit $h' \in \mathfrak{H}'$. Des relations

$$\|T'^n h'\| = \|h'\| = \|T'^{*n} h'\| \qquad (n=0, 1, \ldots)$$

et de (1. 9) et (1. 10) on déduit les relations

$$T'^n h' = w^n(U_T)h', \quad T'^{*n}h' = [w^n(U_T)]^*h' \qquad (n=0, 1, \ldots) \tag{1. 11}$$

et

$$\|w^n(U_T)h'\| = \|h'\| = \|[w^n(U_T)]^*h'\| \qquad (n=0, 1, \ldots). \tag{1. 12}$$

De (1. 12) on obtient

$$\|h'\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|w^n(U_T)h'\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |w(e^{i\theta})|^{2n}\, d(E_{T,\theta}h', h') = \|E_T(e_w)h'\|^2 \tag{1. 13}$$

où l'on a désigné par e_w l'ensemble des points $e^{i\theta}$ dans lesquels $|w(e^{i\theta})|=1$, c'est-à-dire

$$e_w = \overset{-1}{w}(C).$$

Puisque

$$E = E_T(e_w)$$

est une projection, (1.13) veut dire que

$$h' = Eh'.$$

En combinant ce résultat avec (1. 11) on obtient pour $h' \in \mathfrak{H}'$:

$$V'^n h' = \begin{Bmatrix} w^n(U_T)Eh' & (n \geqq 0) \\ [w^{|n|}(U_T)]^* Eh' & (n \leqq 0) \end{Bmatrix} = \int_{e_w} w^n(z) E_T(dz) h' \qquad (n = 0, \pm 1, \ldots),$$

d'où l'on déduit que

$$V'^n h' = \int_C \zeta^n F(d\zeta) h' \qquad (n = 0, \pm 1, \ldots),$$

l'intégrale étant prise par rapport à la mesure

$$F(\sigma) = E_T(\overset{-1}{w}(\sigma)),$$

définie pour les ensembles boréliens $\sigma \subset C$. Montrons que $F(\sigma)$ est réduit par $\mathfrak{H}'$. Il suffit d'envisager à cet effet le cas où σ est un arc de C. Or, soit $\{p_m(e^{i\theta})\}$ une suite bornée de polynomes trigonométriques tendant vers 1 dans les points $e^{i\theta}$ de l'arc σ et vers 0 dans les autres points de C; on a alors

$$F(\sigma) h' = \lim_{m \to \infty} \int_C p_m(\zeta) F(d\zeta) h' = \lim_{m \to \infty} p_m(V') h' \in \mathfrak{H}',$$

puisque V' transforme $\mathfrak{H}'$ en $\mathfrak{H}'$.

Il résulte de ces raisonnements que la mesure spectrale de V' est égale à la restriction de $F(\cdot)$ à $\mathfrak{H}'$, c'est-à-dire que

$$E_{V'}(\sigma) = E_T(\overset{-1}{w}(\sigma)) | \mathfrak{H}' \tag{1. 14}$$

pour tout σ borélien, $\sigma \subset C$.

6. Envisageons alors les fonctions composées

$$u \circ w(z) = u(w(z)).$$

De (1. 9) on obtient immédiatement

$$p(T') = p \circ w(T)$$

pour tout polynome $p(z)$. Soit $u(z) \in \mathsf{A}$ et envisageons cette relation pour les sommes partielles $p_n(z)$ de la série de Taylor de $u(z)$. Lorsque $n \to \infty$, $p_n(T')$ tend vers $u(T')$ en norme, parce que $p_n(z)$ tend vers $u(z)$ uniformément dans $\bar{D}$. D'autre part, $p_n \circ w$ et $u \circ w$ appartiennent à H_T, et $p_n \circ w(e^{i\theta})$ tend vers $u \circ w(e^{i\theta})$ uniformément dans $C - C_w$; comme de plus la suite $\{p_n \circ w(z)\}$ est uniformément bornée dans D, on peut appliquer le critère de convergence donné et on obtient que $p_n \circ w(T)$ tend vers $u \circ w(T)$. Par conséquent on a

$$u(T') = u \circ w(T) \tag{1. 15}$$

pour toute fonction $u \in \mathsf{A}$.

Soit $u \in \mathsf{H}$. Puisque $u_r \in \mathsf{A}$ $(0 < r < 1)$, on a par (1. 15):

$$u_r(T') = u_r \circ w(T).$$

Essayons de passer à la limite $r \to 1$ dans l'hypothèse additionnelle que $u \circ w(z)$ appartient aussi à H_T. La fonction $u_r \circ w(z)$ est bornée dans D par une constante indépendante de r, et (lorsque $r \to 1$) $u_r \circ w(e^{i\theta})$ tend vers $u \circ w(e^{i\theta})$ partout sauf les points de l'ensemble

$$C_w \cup \overset{-1}{w}(C_u).$$

On a $E_T(C_w) = O$ puisque $w \in \mathsf{H}_T$. Si l'on suppose aussi

$$E_T(\overset{-1}{w}(C_u)) = O, \tag{1. 16}$$

l'ensemble exceptionnel sera de mesure O par rapport à $E_T(\cdot)$, et en appliquant le critère de convergence donné on peut conclure

$$u_r \circ w(T) \to u \circ w(T).$$

D'autre part on a

$$u_r(T') \to u(T')$$

parce que (1. 16) entraîne $u \in \mathsf{H}_{T'}$; en effet, par (1. 14) et (1. 16) on a $E_{V'}(C_u) = O$ et cela entraîne $E_{T'}(C_u) = O$ parce que $m(C_u) = 0$. De cette façon on obtient que (1. 15) subsiste pour toutes les fonctions $u \in \mathsf{H}$ vérifiant les conditions $u \circ w \in \mathsf{H}_T$ et (1. 16).

Résumons:

Théorème 1. (i) *L'application $u(z) \to u(T)$ définie pour les fonctions*

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

de la classe H_T par les formules (1. 2), (1. 5), *c'est-à-dire par*

$$u(T) = \lim_{r \to 1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k T^k,$$

est un homomorphisme d'algèbre de H_T dans $B(\mathfrak{H})$ et telle que

$$\|u(T)\| \leqq \sup_D |u(z)|.$$

(ii) *$u \in \mathsf{H}_T$ entraîne $u^* \in \mathsf{H}_{T^*}$ et $u(T)^* = u^*(T^*)$.*

(iii) *Si la suite des fonctions $u_n \in \mathsf{H}_T$ est uniformément bornée dans D et telle que*

$$u_n(e^{i\theta}) \to u(e^{i\theta}) \qquad (n \to \infty)$$

presque partout par rapport à la mesure spectrale $E_T(\cdot)$, on a

$$u_n(T) \to u(T) \quad \text{(convergence forte).}$$

(iv) *Pour T normale cette définition de $u(T)$ est compatible avec celle moyennant la décomposition spectrale de T.*

(v) *Soit* $w \in \mathsf{H}_T$, $|w(z)| < 1$ *dans D. Dans ce cas*

$$T' = w(T)$$

est aussi une contraction. La mesure spectrale de la partie unitaire V' de T' est égale à une restriction de $E_T(\overset{-1}{w}(\cdot))$. *Pour toute fonction* $u \in \mathsf{H}$ *telle que*

$$E_T(C_{u \circ w}) = O, \quad E_T(\overset{-1}{w}(C_u)) = O,$$

on a $u \in \mathsf{H}_{T'}$, $u \circ w \in \mathsf{H}_T$ *et*

$$u(T') = u \circ w(T).$$

2. Les classes E et E_T

1. Le premier pas pour étendre notre calcul fonctionnel à des fonctions non bornées sera de déterminer les fonctions $u \in \mathsf{H}$ pour lesquelles $u(T)$ admet une inverse (au sens général, c'est-à-dire sans appartenir nécessairement à $B(\mathfrak{H})$), et cela pour *toute* contraction complètement non-unitaire T.

Pour commencer nous rappelons quelques notions et faits appartenant à la théorie des fonctions analytiques, dont nous ferons usage dans la suite.

Soit H^1 la classe (de Hardy) des fonctions $u(z)$, holomorphes dans D et telles que l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|\, d\theta$$

reste bornée pour $0 < r < 1$. Evidemment, $\mathsf{H} \subset \mathsf{H}^1$. Pour $u \in \mathsf{H}^1$ la limite

$$u(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1} u(re^{i\theta})$$

existe en presque tous les points $e^{i\theta}$ du cercle unité C, de plus on a

$$\lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} |u(e^{i\theta}) - u(re^{i\theta})|\, d\theta = 0; \tag{2. 1}$$

voir Fatou [4] et Riesz [13]. (2. 1) entraîne, par le théorème de Cauchy,

$$\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\, d\theta = \lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, d\theta = \lim_{r \to 1} 2\pi u(0) = 2\pi u(0)$$

pour toute fonction $u \in \mathsf{H}^1$. Dans le cas où $u(z) \not\equiv 0$, on a

$$\log |u(e^{i\theta})| \in L^1(0, 2\pi)$$

(classe des fonctions intégrables au sens de Lebesgue); *voir* Szegő [14].

On appelle *fonction extérieure* toute fonction de la forme

$$v(z)=\varkappa \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\log k(\theta)\,d\theta\right]$$

où

$$0\leqq k(\theta)\in L^1(0,2\pi),\quad \log k(\theta)\in L^1(0,2\pi)$$

et $\varkappa$ est une constante complexe, de module 1; $v(z)$ appartient à H^1 et on a

$$|v(e^{i\theta})|=k(\theta) \text{ presque partout.}$$

Si $u\in\mathrm{H}^1$ et $u(z)\not\equiv 0$, on peut poser (en vertu du théorème de Szegő) $k(\theta)=|u(e^{i\theta})|$. La fonction extérieure $u_1(z)$ qui résulte, avec $\varkappa=1$, est appelée le *facteur extérieur* de $u(z)$, donc

$$u_1(z)=\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\log|u(e^{i\theta})|\,d\theta\right].$$

La fonction $u_0(z)$ définie par l'équation

$$u(z)=u_0(z)u_1(z)$$

s'appelle le *facteur intérieur* de $u(z)$. On a

$$|u_0(z)|\leqq 1 \quad \text{dans } D, \quad \text{et} \quad |u_0(e^{i\theta})|=1 \text{ p. p. sur } C;$$

voir Szegő [14].

2. Après ces préliminaires formulons notre assertion:

Théorème 2. *Pour une fonction $u(z)\in\mathrm{H}$ les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(A) *$u(z)$ est une fonction extérieure.*

(B) *Les conditions*

$$(*)\qquad 0\leqq p(\theta)\in L^1(0,2\pi),\quad \int_0^{2\pi}u(e^{i\theta})p(\theta)e^{in\theta}d\theta=0\qquad(n=0,1,\ldots)$$

entraînent

$$p(\theta)=0 \quad \textit{presque partout}^{5)}.$$

(C) *$u(T)^{-1}$ existe pour toute contraction complètement non-unitaire T.*

---

5) Le fait que les propriétés (A) et (B) sont équivalentes pour $u\in\mathrm{H}$, est analogue au fait suivant, démontré par Beurling [1]: Pour $u(z)$ appartenant à la classe de Hardy H^2, c'est-à-dire telle que l'intégrale

$$\int_0^{2\pi}|u(re^{i\theta})|^2\,d\theta$$

reste bornée pour $0<r<1$, la propriété d'être une fonction extérieure est équivalente à la propriété que le système des fonctions $z^n u(z)$ $(n=0,1,\ldots)$ soit complet dans H^2 comme espace de Hilbert, c'est-à-dire qu'il n'y ait aucune fonction $v(z)\in\mathrm{H}^2$, $v(z)\not\equiv 0$, pour laquelle

$$\int_0^{2\pi}e^{in\theta}u(e^{i\theta})\overline{v(e^{i\theta})}\,d\theta=0\qquad(n=0,1,\ldots).$$

Démonstration.

(A)⇒(B). Soit $u(z)$ une fonction extérieure appartenant à H (donc bornée) et soit $p(\theta)$ une fonction vérifiant (*) sans s'annuler presque partout. Nous allons montrer que ces hypothèses entraînent une contradiction.

Envisageons la fonction

$$q(\theta)=u(e^{i\theta})\,p(\theta); \tag{2.2}$$

comme produit d'une fonction mesurable bornée et d'une fonction intégrable, $q(\theta)$ est intégrable. Comme $u(e^{i\theta})$ ne s'annule que peut-être dans un ensemble de mesure 0 ($\log|u(e^{i\theta})|$ étant intégrable) et comme $p(\theta)\neq 0$ dans un ensemble de mesure positive par hypothèse, on a aussi $q(\theta)\neq 0$ dans un ensemble de mesure positive. Soit

$$q(\theta)\sim\sum_1^\infty c_n e^{in\theta}$$

la série de Fourier de $q(\theta)$; les coefficients de rang $n\leqq 0$ sont égaux à 0 en vertu de (*). La fonction

$$Q(z)=\sum_1^\infty c_n z^n \tag{2.3}$$

appartient alors à H^1 (conséquence de la formule de Poisson) et $Q(z)\not\equiv 0$, par conséquent

$$\log|Q(e^{i\theta})|\in L^1(0,2\pi).$$

Or

$$Q(e^{i\theta})=q(\theta)\quad\text{presque partout}^{6)},$$

et comme $\log|u(e^{i\theta})|$ est aussi intégrable (parce que $u(z)$ est une fonction extérieure), il résulte que

$$\log p(\theta)=\log|q(\theta)|-\log|u(e^{i\theta})|\in L^1(0,2\pi). \tag{2.4}$$

Envisageons la fonction

$$P(z)=\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\log p(\theta)\,d\theta\right]\in H^1.$$

De (2.4) il s'ensuit que

$$P(z)=\varkappa\frac{Q_1(z)}{u(z)}$$

où $Q_1(z)$ est le facteur extérieur de $Q(z)$ et $\varkappa$ est une constante de module 1.[7]). Vu que le facteur intérieur $Q_0(z)$ est borné en module par 1 dans D, on a

$$|Q(z)|=|Q_0(z)\,Q_1(z)|\leqq|Q_1(z)|$$

et par conséquent

$$|P(z)|\geqq\frac{|Q(z)|}{|u(z)|}. \tag{2.5}$$

---

[6]) En vertu des théorèmes bien connus dans la théorie de la sommation d'Abel—Poisson des séries de Fourier.

[7]) $u(z)$ étant une fonction extérieure on a $u(z)=\varkappa\,u_1(z)$, $|\varkappa|=1$.

Vu que $P(z) \in H^1$, (2. 5) entraîne

$$z^n \frac{Q(z)}{u(z)} \in H^1 \qquad (n=0, 1, \ldots).$$

Par conséquent

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta} \frac{Q(e^{i\theta})}{u(e^{i\theta})} d\theta = 2\pi \left[z^n \frac{Q(z)}{u(z)} \right]_{z=0} = 0 \qquad (n=0, 1, \ldots),$$

où l'on a fait usage de ce que $Q(0)=0$ et $u(z) \neq 0$ dans D. Or on a presque partout

$$\frac{Q(e^{i\theta})}{u(e^{i\theta})} = \frac{q(\theta)}{u(e^{i\theta})} = p(\theta),$$

donc

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta} p(\theta) d\theta = 0 \qquad (n=0, 1, \ldots); \tag{2.6}$$

$p(\theta)$ étant de valeurs réelles, (2. 6) entraîne que tous les coefficients de Fourier de $p(\theta)$ sont égaux à 0, ce qui contredit notre hypothèse que $p(\theta) \neq 0$ dans un ensemble de mesure positive.

(B)$\Rightarrow$(A). Soit $u(z) = u_0(z) u_1(z)$ la décomposition de $u(z)$ en produit de ses facteurs intérieur et extérieur. Posons

$$a(z) = 1 - \overline{u_0(0)} u_0(z).$$

Puisque

$$u_0(e^{i\theta}) \overline{u_0(e^{i\theta})} = 1 \text{ p. p.},$$

on a pour toute fonction $v(z)$ appartenant à H^1:

$$\int_0^{2\pi} v(e^{i\theta}) u_0(e^{i\theta}) \overline{a(e^{i\theta})} d\theta = \int_0^{2\pi} v(e^{i\theta}) [u_0(e^{i\theta}) - u_0(0)] d\theta =$$

$$= 2\pi [v(z) (u_0(z) - u_0(0))]_{z=0} = 0.\text{[8]}$$

Posons en particulier

$$v(z) = z^n u_1(z) a(z) \qquad (n=0, 1, \ldots);\text{[9]}$$

il résulte

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta} u(e^{i\theta}) |a(e^{i\theta})|^2 d\theta = 0 \qquad (n=0, 1, \ldots). \tag{2.7}$$

Supposons que $u(z)$ jouisse de la propriété (B). (2. 7) entraîne alors

$$|a(e^{i\theta})|^2 = 0 \text{ p. p.},$$

donc

$$\overline{u_0(0)} u_0(e^{i\theta}) = 1 \text{ p. p.} \tag{2.8}$$

---

[8]) $v(z) u_0(z) \in H^1$ parce que $u_0(z)$ est bornée dans D.

[9]) $v(z) \in H^1$ parce que $a(z)$ est bornée dans D.

Or on a

$$|u_0(e^{i\theta})| = 1 \text{ p. p.,} \tag{2.9}$$

parce que $u_0(z)$ est un facteur intérieur. De (2. 8) et (2. 9) on conclut

$$u_0(e^{i\theta}) = \varkappa \text{ p. p.,}$$

$\varkappa$ étant une constante de module 1. Par conséquent

$$u_0(z) \equiv \varkappa,$$
$$u(z) \equiv \varkappa u_1(z)$$

dans D, c'est-à-dire que $u(z)$ est une fonction extérieure. Cela prouve que (B) entraîne (A).

(B)$\Rightarrow$(C). Soit T une contraction complètement non-unitaire d'un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ et soit $f_0 \in \mathfrak{H}$ tel que

$$u(T)f_0 = 0.$$

La mesure spectrale $E_T(\cdot)$ étant alors absolument continue, on a pour $n \geqq 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= (T^n u(T) f_0, f_0) = (U_T^n u(U_T) f_0, f_0) = \\ &= \int_0^{2\pi} e^{in\theta} u(e^{i\theta})\, d(E_{T,\theta} f_0, f_0) = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} u(e^{i\theta}) p(\theta)\, d\theta \end{aligned} \tag{2.10}$$

où

$$0 \leqq p(\theta) = d(E_{T,\theta} f_0, f_0)/d\theta \in L^1(0, 2\pi).$$

Supposons que $u(z)$ jouisse de la propriété (B). (2. 10) entraîne alors $p(\theta) = 0$ p. p. et par conséquent

$$\|f_0\|^2 = \int_0^{2\pi} d(E_{T,\theta} f_0, f_0) = \int_0^{2\pi} p(\theta)\, d\theta = 0, \quad \text{donc} \quad f_0 = 0.$$

De cette façon la propriété (B) entraîne que $u(T)^{-1}$ existe pour toute contraction complètement non-unitaire T, c'est-à-dire la propriété (C).

(C)$\Rightarrow$(B). Supposons qu'il existe une fonction $p(\theta)$ vérifiant (*), mais différente de 0 dans un ensemble de mesure positive. Nous allons construire une contraction complètement non-unitaire T dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H} \neq \{0\}$; telle que $u(T)$ n'admet pas d'inverse, voire même telle que $u(T) = O$.

Mettons à part le cas banal $u(z) \equiv 0$, où l'on a $u(T) = O$ pour n'importe quelle contraction T.

Désignons par V l'opérateur de multiplication par $e^{i\theta}$ des fonctions $f(\theta) \in L^2(0, 2\pi)$; V est unitaire et sa mesure spectrale est absolument continue, donc $u(V)$ existe: c'est notamment l'opérateur de multiplication par $u(e^{i\theta})$. Nos hypothèses s'expriment en termes de l'espace $L^2(0, 2\pi)$ de la façon suivante:

$$\big(u(V) V^n f_0, f_0\big) = 0 \quad (n \geqq 0), \qquad (f_0, f_0) > 0, \tag{2.11}$$

où

$$f_0(\theta) = \sqrt{p(\theta)}.$$

Soient $\mathfrak{M}^+$ et $\mathfrak{M}^-$ les sous-espaces de $L^2(0, 2\pi)$ sous-tendus par les éléments

$$e^{in\theta} f_0(\theta)\ (n \geqq 0) \quad \text{ou} \quad e^{-in\theta} f_0(\theta)\ (n \geqq 0),$$

selon les cas. Soit P la projection orthogonale sur $\mathfrak{M}^-$. On a évidemment

$$V\mathfrak{M}^+ \subset \mathfrak{M}^+, \quad V^{-1}\mathfrak{M}^- \subset \mathfrak{M}^-;$$

de la seconde de ces inclusions il s'ensuit

$$PV^{-1}P = V^{-1}P, \quad PVP = (PV^{-1}P)^* = (V^{-1}P)^* = PV$$

et par récurrence

(2.12) $$(PV)^n P = PV^n = PV^n P \qquad (n \geqq 0).$$

Soit $\mathfrak{H}$ le sous-espace de $L^2(0, 2\pi)$ sous-tendu par les éléments $PV^k f_0$ $(k \geqq 0)$, donc

$$\mathfrak{H} = \overline{P\mathfrak{M}^+}.$$

Puisque f_0 appartient à $\mathfrak{M}^+$ ainsi qu'à $\mathfrak{M}^-$, il appartient aussi à $\mathfrak{H}$ et par conséquent

$$\mathfrak{H} \neq \{0\}.$$

En vertu de (2.12) nous avons

$$(PV)^n PV^k f_0 = PV^n V^k f_0 = PV^{n+k} f_0 = PV^n PV^k f_0 \qquad (n, k \geqq 0),$$

ce qui montre que PV et ses itérées transforment $\mathfrak{H}$ en lui-même, et que si T désigne la restriction de PV à $\mathfrak{H}$, on a

(2.13) $$T^n g = PV^n g \qquad (g \in \mathfrak{H};\ n \geqq 0).$$

T est une contraction de $\mathfrak{H}$ et en vertu de (2.13) V est une dilatation unitaire de T (non nécessairement minimum). Puisque V a son spectre absolument continu, $v(V)$ et $v(T)$ existent pour toute fonction $v(z) \in \mathrm{H}$ et par (2.13) on a

$$v(T)g = P\,v(V)g \qquad (g \in \mathfrak{H}).$$

Posons en particulier

$$v(z) = z^n u(z) \qquad (n \geqq 0)$$

où $u(z)$ est la fonction que nous avons en vue; nous obtenons

(2.14) $$u(T)\,T^n g = P\,u(V)\,V^n g \qquad (g \in \mathfrak{H};\ n \geqq 0).$$

En vertu de (2.11)

$$(u(V)\,V^n f_0, V^{-k} f_0) = (u(V)\,V^{n+k} f_0, f_0) = 0 \qquad (n, k \geqq 0).$$

Puisque les éléments $V^{-k} f_0$ $(k \geqq 0)$ sous-tendent $\mathfrak{M}^-$, il en résulte

$$P\,u(V)\,V^n f_0 = 0 \qquad (n \geqq 0)$$

et par (2.14)

(2.15) $$u(T)\,T^n f_0 = 0 \qquad (n \geqq 0).$$

Or les éléments $T^n f_0 = PV^n f_0$ $(n \geqq 0)$ sous-tendent $\mathfrak{H}$, donc (2. 15) entraîne

(2. 16) $$u(T)=0.$$

Reste à montrer que T est une contraction complètement non-unitaire. Il suffit de voir à cet effet que pour un $g \in \mathfrak{H}$ les conditions

$$\|g\| = \|Tg\| = \|T^2 g\| = \cdots$$

entraînent

$$g=0.$$

Or ces conditions, combinées avec (2. 13), entraînent

$$V^n g = T^n g \qquad (n \geqq 0),$$

d'où l'on obtient, vu aussi (2. 16),

$$u(V)g = u(T)g = 0.$$

Donc

(2. 17) $$u(e^{i\theta})g(\theta)=0 \text{ presque partout.}$$

Comme $u(z) \not\equiv 0$ par hypothèse, $u(e^{i\theta})$ ne s'annule que dans un ensemble de mesure 0 au plus, donc (2. 17) entraîne

$$g(\theta)=0 \quad \text{presque partout,}$$

c'est-à-dire que

$$g=0.$$

Cela achève la démonstration de l'implication $(C) \Rightarrow (B)$ et aussi celle du théorème.

3. Désignons par

$$\mathsf{E}$$

la classe des fonctions jouissant des propriétés énumérées dans le théorème 2, c'est-à-dire la classe des *fonctions extérieures, bornées dans D*. La classe E est donc constituée des fonctions $u \in \mathsf{H}$ pour lesquelles

(2. 18) $$u(z) = \varkappa \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log|u(e^{i\theta})|\, d\theta\right], \quad |\varkappa|=1.$$

De cette représentation il ressort que la classe E est *multiplicative*, comprend en particulier les fonctions constantes non-nulles[10]) et comprend avec $u(z)$ aussi

---

[10]) Parce que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, d\theta = 1 \qquad (|z|<1).$$

$u^*(z)$.[11]) Les deux premières de ces propositions résultent d'ailleurs aussi par la propriété caractéristique (C) de la classe E.

Pour une contraction donnée T de l'espace $\mathfrak{H}$ définissons

$$\mathsf{E}_T$$

comme la classe des fonctions $u \in \mathsf{E}$ pour lesquelles

$$E_T(C_u^0) = O, \tag{2.19}$$

où C_u^0 désigne l'ensemble des points $e^{i\theta} \in C$ dans lesquels la valeur limite $u(e^{i\theta})$ n'existe pas, ou bien existe mais est égale à 0, c'est-à-dire que

$$C_u^0 = C_u \cup \overset{-1}{u}(0).$$

Cet ensemble est de mesure $m(C_u^0) = 0$ pour toute fonction $u \in \mathsf{E}$, donc la condition (2.19) est automatiquement vérifiée si la mesure spectrale $\mathsf{E}_T(\cdot)$ est absolument continue. En particulier on a donc

$$\mathsf{E}_T = \mathsf{E}$$

si T est complètement non-unitaire. Dans le cas général on a

$$\mathsf{E}_T = \mathsf{E}_V$$

où V est la partie unitaire de T, ce qu'on voit tout comme la proposition analogue (1.8).

Il est manifeste que, pour T fixée, la classe E_T est *multiplicative*, comprend les fonctions constantes non-nulles, et de plus

$$u \in \mathsf{E}_T \quad \text{entraîne} \quad u^* \in \mathsf{E}_{T^*}.$$

Théorème 3. *Pour toute contraction T de l'espace $\mathfrak{H}$ et toute fonction $u \in \mathsf{E}_T$, la transformation $u(T)$ admet une inverse $u(T)^{-1}$, à domaine dense dans $\mathfrak{H}$. De plus*

$$[u(T)^{-1}]^* = [u^*(T^*)]^{-1}. \tag{2.20}$$

Démonstration. Soit

$$T = V \oplus T^{(0)}$$

la décomposition canonique de T en ses parties unitaire V et complètement non-unitaire $T^{(0)}$. Il en dérive la relation

$$u(T) = u(V) \oplus u(T^{(0)})$$

---

[11]) Vu que

$$|u(e^{i\theta})| = |\overline{u^*(e^{-i\theta})}| = |u^*(e^{-i\theta})|$$

il s'ensuit de (2.18)

$$u^*(z) = \bar{\varkappa} \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\theta}+z}{e^{-i\theta}-z} \log |u^*(e^{-i\theta})|\, d\theta\right] = \bar{\varkappa} \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log |u^*(e^{i\theta})|\, d\theta\right]$$

par la substitution $\theta \to 2\pi - \theta$.

d'abord pour les fonctions $u \in \mathsf{A}$, puis, par l'intermédiaire des fonctions auxiliaires u_r, pour toutes les fonctions $u \in \mathsf{H}_T = \mathsf{H}_V$, en particulier pour les fonctions de la classe $\mathsf{E}_T = \mathsf{E}_V$. Or, pour $u \in \mathsf{E}_T$, $u(T^{(0)})^{-1}$ existe en vertu du théorème 2, et $u(V)^{-1}$ existe en vertu de la théorie spectrale des transformations unitaires,

$$u(V)^{-1} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{u(e^{i\theta})} dE_{V,\theta}.^{12)}$$

On conclut que $u(T)^{-1}$ existe aussi,

$$u(T)^{-1} = u(V)^{-1} \oplus u(T^{(0)})^{-1}.$$

Comme $u \in \mathsf{E}_T$ entraîne $u^* \in \mathsf{E}_{T^*}$ (et réciproquement), $u^*(T^*)^{-1}$ existe par la même raison.

Soit h un élément orthogonal au domaine de $u(T)^{-1}$, c'est-à-dire à l'ensemble des valeurs de $u(T)$. On a alors

$$u(T)^* h = 0;$$

comme

$$[u(T)^*]^{-1} = [u^*(T^*)]^{-1}$$

existe, on conclut que

$$h = 0.$$

Donc le domaine de $u(T)^{-1}$ est dense dans $\mathfrak{H}$. (2. 20) est alors une conséquence du fait général que si S^{-1}, S^* et $(S^{-1})^*$ existent, on a

$$(S^{-1})^* = (S^*)^{-1}.$$

Théorème 4. (i) *Soit $w \in \mathsf{H}$ telle que*

(2. 21) $$|w(z)| < 1 \quad \textit{dans } D,$$

(2. 22) $$m(\overset{-1}{w}(C)) = 0.^{13)}$$

Dans ce cas $u \in \mathsf{E}$ entraîne $u \circ w \in \mathsf{E}$.

(ii) *Soit T une contraction de $\mathfrak{H}$, soit $w \in \mathsf{H}_T$ et supposons que les conditions* (2. 21—22) *soient vérifiées. Pour toute fonction $u \in \mathsf{E}$ telle que*

(2. 23) $$E_T(\overset{-1}{w}(C_u^0)) = O, \quad E_T(C_{u\circ w}^0) = O,^{14)}$$

on a $u \in \mathsf{E}_{T'}$, $u \circ w \in \mathsf{E}_T$, et

$$u(T') = u \circ w(T)$$

où T' désigne la contraction $w(T)$.

---

[12]) Notons que $[u(e^{i\theta})]^{-1}$ est la limite de la fonction *continue* $[u_r(e^{i\theta})]^{-1}$ partout sur C sauf les points de l'ensemble borélien C_u^0 qui est de mesure 0 par rapport à la mesure spectrale $E_V(\cdot)$.

[13]) Cela veut dire que $|w(e^{i\theta})| < 1$ presque partout sur C, par rapport à la mesure de Lebesgue.

[14]) Cela veut dire que les valeurs limite $u(w(e^{i\theta})) = \lim u(rw(e^{i\theta}))$, $u \circ w(e^{i\theta}) = \lim u(w(re^{i\theta}))$ $(r \to 1-0)$ existent et sont différentes de 0 presque partout par rapport à la mesure spectrale $E_T(\cdot)$.

D é m o n s t r a t i o n. (i) Soit T une contraction complètement non-unitaire, d'ailleurs quelconque. Grâce à (2. 21), $T' = w(T)$ est une contraction; soit V' la partie unitaire de T'. D'après théorème 1(v), $E_{V'}(C)$ est une restriction de $E_T(\overset{-1}{w}(C))$, qui est égale à O en vertu de l'hypothèse (2. 22) et parce que la mesure spectrale $E_T(\cdot)$ est absolument continue. Donc $E_{V'}(C) = O$, ce qui n'est possible que si l'espace de V' se réduit au seul élément 0, ou, en d'autres termes, si T' est elle-même une contraction complètement non-unitaire. Mais alors $u \in \mathsf{E}$ entraîne que $u(T')^{-1}$ existe. Or $u(T') = u \circ w(T)$ en vertu du théorème 1(v), parce que $u \circ w(z) \in \mathsf{H}$ et

$$E_T(\overset{-1}{w}(C_u)) \leqq E_T(\overset{-1}{w}(C)) = O, \quad E_T(\overset{-1}{w}(C_u)) = O.$$

Donc $u \circ w \in \mathsf{H}$ et $(u \circ w)(T)^{-1}$ existe pour toute contraction complètement non-unitaire T, ce qui veut dire que

$$u \circ w \in \mathsf{E}.$$

(ii) En vertu de (i) on a $u \circ w \in \mathsf{E}$; vu la seconde des conditions (2. 23) cela entraîne $u \circ w \in \mathsf{E}_T$. On a aussi $u \in \mathsf{E}_{T'} = \mathsf{E}_{V'}$ (où V' désigne la partie unitaire de la contraction T'), parce que d'une part $u \in \mathsf{E}$ par hypothèse, d'autre part

$$E_{V'}(C_u^0) = \text{restriction de } E_T(\overset{-1}{w}(C_u^0)) = O$$

en vertu du théorème 1(v) et de la première condition (2. 23).

La relation $u(T') = u \circ w(T)$ est alors une conséquence immédiate du théorème 1(v).

Cela achève la démonstration du théorème 4.

4. Dans les applications il est utile d'avoir des conditions analytiques, suffisantes sinon nécessaires, pour qu'une fonction appartienne à la classe E.

Posons la *définition* suivante: Appelons classe

$$\mathsf{E}^{\text{reg}}$$

la classe des fonctions $u \in \mathsf{H}$ telles que

a) $u(z)$ n'a aucun zéro dans D, et

b) $\left|\dfrac{u(z)}{u(rz)}\right| \leqq K$ pour $|z| < 1$, $0 < r < 1$, K étant une constante indépendante de z et r.

T h é o r è m e 5. *La classe* E^{reg} *est comprise dans la classe* E. *Elle est multiplicative et comprend en particulier*

a) *toutes les fonctions qui sont continues et différentes de* 0 *dans le disque fermé* $\bar{D}$ *et holomorphes dans son intérieur* D;

b) *les fonctions de la forme*

$$(1 - \alpha z)^{\nu}$$

où $|\alpha| \leqq 1$ *et* ν *est un nombre réel* $\geqq 0$.[15])

D é m o n s t r a t i o n. Soit $u \in \mathsf{E}^{\text{reg}}$ et soit $p(\theta)$ une fonction vérifiant les conditions (*) du théorème 2 par rapport à u. Pour r fixé, $0 < r < 1$, la fonction

[15]) On pourrait choisir une branche quelconque de la fonction $(1 - \alpha z)^{\nu}$ dans D, mais, pour être déterminé, nous choisissons la branche qui se réduit au point $z = 0$ à la valeur 1.

$\frac{1}{u(rz)}$ a sa série de Taylor uniformément convergente dans $\bar{D}$, soit

$$\frac{1}{u(rz)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(r)} z^n.$$

On a alors

$$\int_0^{2\pi} \frac{u(e^{i\theta})}{u(re^{i\theta})} p(\theta)\, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(r)} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} u(e^{i\theta}) p(\theta) d\theta = 0. \tag{2.24}$$

Lorsque $r \to 1$,

$$\frac{u(e^{i\theta})}{u(re^{i\theta})}$$

tend vers 1 presque partout, en restant bornée en module par la constante K. En vertu du théorème de convergence de Lebesgue on obtient de (2. 24) dans le cas limite

$$\int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta = 0,$$

donc

$$p(\theta) = 0 \text{ presque partout.}$$

Cela veut dire que la fonction $u(z)$ jouit de la propriété (B), caractéristique pour les éléments de la classe E. Donc $\mathsf{E}^{\text{reg}} \subset \mathsf{E}$.

Il résulte immédiatement de la définition de la classe E^{reg} que cette classe est multiplicative. Si $u(z)$ vérifie les hypothèses sous a), le quotient $\frac{u(z)}{u(rz)}$ est fonction continue des variables z et r dans l'ensemble compact $|z| \leqq 1, 0 \leqq r \leqq 1$, par conséquent cette fonction est bornée, de même que la fonction $u(z)$ elle-même. D'autre part, il est aisé de voir que si $|\alpha| \leqq 1$ et $\nu \geqq 0$, on a

$$\left| \frac{(1-\alpha z)^\nu}{(1-\alpha rz)^\nu} \right| < 2^\nu \quad \text{pour} \quad |z| < 1, \ 0 < r < 1.$$

5. De la représentation (2. 18) il ressort que les fonctions $v \in \mathsf{E}$ ne s'annulent pas dans D. Mais cette propriété n'est pas suffisante. Par exemple, la fonction

$$u_t(z) = \exp\left(t \frac{z+1}{z-1}\right)$$

appartient, pour $t > 0$, à H, et n'a aucun zéro dans D, mais elle n'appartient pas à E. On peut aisément indiquer une contraction complètement non-unitaire T pour laquelle $u_t(T)$ n'a pas d'inverse. En effet, soit, dans l'espace $L^2(0, \infty)$ des fonctions $x(s)$ $(0 \leqq s < \infty)$,

$$(T_t x)(s) = x(s+t).$$

$\{T_t\}_{t\geqq 0}$ est un semi-groupe continu de contractions de $L^2(0, \infty)$. Comme de plus

$$\|T_t x\|^2 = \int_0^\infty |x(s+t)|^2\, ds = \int_t^\infty |x(s)|^2\, ds \to 0 \text{ lorsque } t \to \infty,$$

ce semi-groupe est complètement non-unitaire dans le sens de la Note IV, et par conséquent sa cogénératrice T est une contraction complètement non-unitaire. Comme on a

$$u_t(T) = T_t \qquad (t \geqq 0)$$

en vertu de la Note III (théorème 3), il s'ensuit que $u_t(T)x = 0$ pour toute fonction $x(s)$ qui s'annule en dehors de l'intervalle $0 \leqq s \leqq t$, donc par exemple pour la fonction caractéristique de cet intervalle. Ainsi, pour $t > 0$, $u_t(T)$ n'a pas d'inverse.

3. Les classes H/E, $\mathsf{H}_T/\mathsf{E}_T$ etc. Règles de calcul

1. Nous sommes à même de définir notre calcul fonctionnel dans la forme générale suivante.

Définitions. Soit

$$\mathsf{H}/\mathsf{E}$$

la classe des fonctions $\varphi(z)$, définies dans le disque unité ouvert D, et y admettant la représentation

$$\varphi(z) = \frac{u(z)}{v(z)} \quad \text{où} \quad u(z) \in \mathsf{H}, \quad v(z) \in \mathsf{E}. \tag{3.1}$$

De même, si T est une contraction donnée de l'espace $\mathfrak{H}$, soit

$$\mathsf{H}_T/\mathsf{E}_T$$

la classe des fonctions admettant une représentation de type (3. 1) avec $u(z) \in \mathsf{H}_T$ et $v(z) \in \mathsf{E}_T$. Pour telle fonction $\varphi(z) = \dfrac{u(z)}{v(z)}$ nous posons

$$\varphi(T) = v(T)^{-1} u(T). \tag{3.2}$$

Les classes $\mathsf{H}/\mathsf{E}^{\text{reg}}$, $\mathsf{H}_T/\mathsf{E}_T^{\text{reg}}$, ..., où

$$\mathsf{E}_T^{\text{reg}} = \mathsf{E}_T \cap \mathsf{E}^{\text{reg}},$$

sont définies de manière analogue. Les classes H/E et $\mathsf{H}_T/\mathsf{E}_T$ sont des *algèbres*, tandis que les classes $\mathsf{H}/\mathsf{E}^{\text{reg}}$, $\mathsf{H}_T/\mathsf{E}_T^{\text{reg}}$ sont seulement *multiplicatives*.

Théorème 6. *La définition de $\varphi(T)$ pour $\varphi \in \mathsf{H}_T/\mathsf{E}_T$, donnée par la formule* (3. 2), *ne dépend pas du choix particulier des fonctions u, v dans la représentation* (3. 1). *$\varphi(T)$ est une transformation linéaire fermée, à domaine $\mathfrak{D}_{\varphi(T)}$ dense dans $\mathfrak{H}$. Elle permute à T et à toute transformation linéaire bornée S qui permute à T, c'est-à-dire que*

$$TS = ST \quad \textit{entraîne} \quad \varphi(T)S \supseteq S\varphi(T);$$

en particulier on a

$$v(T)^{-1}u(T) \supseteqq u(T)v(T)^{-1} \quad \textit{pour} \quad u \in \mathsf{H}_T,\ v \in \mathsf{E}_T. \tag{3.3}$$

Pour T normale cette définition de $\varphi(T)$ est compatible avec celle moyennant la décomposition spectrale de T.

Les règles de calcul suivantes sont valables:

(i) $(c\varphi)(T) = c\varphi(T)$ *pour* $c \neq 0$.

(ii) $(\varphi_1 + \varphi_2)(T) \supseteqq \varphi_1(T) + \varphi_2(T)$; *il y a égalité par exemple si*

$$\mathfrak{D}_{\varphi_2(T)} \supseteqq \mathfrak{D}_{(\varphi_1+\varphi_2)(T)},$$

donc en particulier si $\varphi_2 \in \mathsf{H}_T$.

(iii) $(\varphi_1\varphi_2)(T) \supseteqq \varphi_1(T)\varphi_2(T)$; *il y a égalité par exemple si*

$$\mathfrak{D}_{\varphi_2(T)} \supseteqq \mathfrak{D}_{(\varphi_1\varphi_2)(T)},$$

donc en particulier si $\varphi_2 \in \mathsf{H}_T$. De manière plus précise, $\varphi_1(T)\varphi_2(T)$ est la restriction de $(\varphi_1\varphi_2)(T)$ à $\mathfrak{D}_{(\varphi_1\varphi_2)(T)} \cap \mathfrak{D}_{\varphi_2(T)}$.

(iv) *Dans le cas où φ et $\dfrac{1}{\varphi}$ appartiennent simultanément à la classe $\mathsf{H}_T/\mathsf{E}_T$, $\varphi(T)^{-1}$ existe et on a*

$$\varphi(T)^{-1} = \frac{1}{\varphi}(T).$$

(v) *Si $\varphi(z)$ appartient à $\mathsf{H}_T/\mathsf{E}_T$, $\varphi^*(z) = \overline{\varphi(\bar{z})}$ appartient à $\mathsf{H}_{T^*}/\mathsf{E}_{T^*}$ et on a*

$$\varphi(T)^* \subseteqq \varphi^*(T^*).$$

(vi) *Soient les fonctions u, v, w telles que*

$$w \in \mathsf{H}_T, \quad |w(z)| \leqq 1 \ \textit{dans } D, \quad m(\overset{-1}{w}(C)) = 0,$$

$$u \in \mathsf{H},\ E_T(C_{u \circ w}) = O,\ E_T(\overset{-1}{w}(C_u)) = O,$$

$$v \in \mathsf{E},\ E_T(C^0_{v \circ w}) = O,\ E_T(\overset{-1}{w}(C^0_v)) = O. \text{ [16]}$$

Dans ce cas on a pour $\varphi(z) = \dfrac{u(z)}{v(z)}$:

$$\varphi \in \mathsf{H}_{T'}/\mathsf{E}_{T'}, \quad \varphi \circ w \in \mathsf{H}_T/\mathsf{E}_T \quad \textit{et} \quad \varphi(T') = \varphi \circ w(T)$$

où

$$T' = w(T) \quad (\|T'\| \leqq 1).$$

---

[16]) Donc les valeurs limite

$$\begin{matrix} u(w(e^{i\theta})) = \lim u(rw(e^{i\theta})), & u \circ w(e^{i\theta}) = \lim u(w(re^{i\theta})), \\ v(w(e^{i\theta})) = \lim v(rw(e^{i\theta})), & v \circ w(e^{i\theta}) = \lim v(w(re^{i\theta})) \end{matrix} \quad (r \to 1-0)$$

existent et les deux dernières sont différentes de 0, presque partout par rapport à la mesure spectrale $E_T(\cdot)$.

(vii) *Pour* $\varphi \in \mathsf{H}_T/\mathsf{E}_T$, *le spectre de* $S=\varphi(T)$ *est compris dans* $\overline{\varphi(D)}$, *adhérence de l'ensemble des valeurs de la fonction* $\varphi(z)$ *prises dans* D. *Pour toute fonction* $u(s)$, *holomorphe dans un domaine de Cauchy*[17]) *contenant* $\overline{\varphi(D)}$ *et le point à l'infini dans son intérieur*, $u\circ\varphi(z)=u(\varphi(z))$ *appartient à* H_T *et on a*

$$u\circ\varphi(T)=u^{\mathrm{R}}(S)$$

où $u^{\mathrm{R}}(S)$ *désigne la transformation qui correspond à la transformation fermée* S *au sens du calcul fonctionnel de Riesz—Dunford—Taylor* [19].

Démonstration. Soient

$$\varphi(z)=\frac{u(z)}{v(z)},\quad \varphi(z)=\frac{u'(z)}{v'(z)}$$

deux représentations de la même fonction $\varphi(z)$, de type (3. 1), avec

$$u, u'\in \mathsf{H}_T;\quad v, v'\in \mathsf{E}_T.$$

On a alors

$$u(z)v'(z)=u'(z)v(z);$$

en vertu de la propriété multiplicative du calcul fonctionnel pour la classe H_T cela entraîne

$$u(T)v'(T)\; =\; v(T)u'(T),$$

d'où

$$v(T)^{-1}u(T)=v(T)^{-1}v'(T)^{-1}v'(T)u(T)=v'(T)^{-1}v(T)^{-1}u(T)v'(T)=$$
$$=v'(T)^{-1}v(T)^{-1}v(T)u'(T)=v'(T)^{-1}u'(T);$$

la définition donnée $\varphi(T)$ est donc univoque.

Posons pour abréger $u(T)=U$, $v(T)=V$. La transformation

$$\varphi(T)=V^{-1}U$$

est évidemment linéaire; elle est aussi fermée, parce que les hypothèses

$$h_n\in\mathfrak{D}_{\varphi(T)},\quad h_n\to h,\quad \varphi(T)h_n=V^{-1}Uh_n\to g\qquad (n\to\infty)$$

entraînent d'une part $Uh_n\to Uh$, d'autre part $Uh_n=V(V^{-1}Uh_n)\to Vg$, donc

$$Uh=Vg,$$

ce qui montre que

$$h\in\mathfrak{D}_{\varphi(T)}\quad\text{et}\quad \varphi(T)h=V^{-1}Uh=g.$$

(3. 3) s'ensuit de ce que U et V sont bornées et permutables. En effet:

$$V^{-1}U\supseteqq V^{-1}UVV^{-1}=V^{-1}VUV^{-1}=UV^{-1}.$$

Le domaine de V^{-1} est dense dans $\mathfrak{H}$ (*voir* théorème 3), donc le domaine de $\varphi(T)$ est dense aussi.

17) Dans le sens de A. E. Taylor [19].

Si la transformation linéaire bornée S permute à T, elle permute aux fonctions de T de la classe A et même à celles de la classe H_T, parce que ces fonctions de T proviennent des polynomes de T par des passages à la limite. Par conséquent on a

$$\begin{aligned}\varphi(T)\,S &= V^{-1}US = V^{-1}SU \supseteqq V^{-1}SVV^{-1}U = \\ &= V^{-1}VSV^{-1}U = SV^{-1}U = S\,\varphi(T),\end{aligned}$$

c'est-à-dire que S permute aussi à $\varphi(T)$.

Dans le cas où T est une contraction normale, $T=\int z\,dK_z$, ses fonctions $u(T)$, $v(T)$ peuvent être calculées moyennant la décomposition spectrale (*voir* théorème 1(iv)), d'où

$$\begin{aligned}\varphi(T) &= v(T)^{-1}\,u(T) = \left[\int v(z)\,dK_z\right]^{-1}\cdot\int u(z)\,dK_z = \\ &= \int \frac{1}{v(z)}\,dK_z\cdot\int u(z)\,dK_z = \int\frac{u(z)}{v(z)}\,dK_z = \int \varphi(z)\,dK_z.\end{aligned}$$

Les règles de calcul (i)—(iv) s'obtiennent aisément. (i) est manifeste. Pour obtenir (ii) et (iii) envisageons deux fonctions,

$$\varphi_i(z) = \frac{u_i(z)}{v_i(z)} \quad (i=1,2), \quad \text{avec} \quad u_i \in \mathsf{H}_T,\ v_i \in \mathsf{E}_T,$$

et posons pour abréger $U_i = u_i(T)$, $V_i = v_i(T)$. Puisque

$$\varphi_1+\varphi_2 = \frac{u_1v_2+u_2v_1}{v_1v_2}, \quad \varphi_1\varphi_2 = \frac{u_1u_2}{v_1v_2},$$

on a par définition

$$(\varphi_1+\varphi_2)(T) = V_1^{-1}V_2^{-1}(U_1V_2+U_2V_1), \quad (\varphi_1\varphi_1)(T) = V_1^{-1}V_2^{-1}U_1U_2.$$

Faisant usage de (3. 3) on obtient

$$\begin{aligned}(\varphi_1+\varphi_2)(T) &\supseteqq V_1^{-1}V_2^{-1}U_1V_2 + V_2^{-1}V_1^{-1}U_2V_1 \supseteqq \\ &\supseteqq V_1^{-1}U_1V_2^{-1}V_2 + V_2^{-1}U_2V_1^{-1}V_1 = \varphi_1(T)+\varphi_2(T).\end{aligned}$$

Par la même raison

$$\varphi_1(T)+\varphi_2(T) = [(\varphi_1+\varphi_2)-\varphi_2](T)+\varphi_2(T) \supseteqq [(\varphi_1+\varphi_2)(T)-\varphi_2(T)]+\varphi_2(T).$$

Dans le cas où $\mathfrak{D}_{\varphi_2(T)} \supseteqq \mathfrak{D}_{(\varphi_1+\varphi_2)(T)}$ il en résulte

$$\varphi_1(T)+\varphi_2(T) \supseteqq (\varphi_1+\varphi_2)(T),$$

donc, vu que l'inclusion opposée est toujours valable, on a dans ce cas

$$\varphi_1(T)+\varphi_2(T) = (\varphi_1+\varphi_2)(T).$$

De (3. 3) il s'ensuit aussi

$$(\varphi_1\varphi_2)(T) = V_1^{-1}V_2^{-1}U_1U_2 \supseteqq V_1^{-1}U_1V_2^{-1}U_2 = \varphi_1(T)\,\varphi_2(T).$$

L'inclusion

$$\mathfrak{D}_{\varphi_1(T)\varphi_2(T)} \subseteqq \mathfrak{D}_{(\varphi_1\varphi_2)(T)} \cap \mathfrak{D}_{\varphi_2(T)}$$

est alors manifeste. Pour démontrer l'assertion plus précise dans (iii) il ne reste donc qu'à prouver l'inclusion opposée, c'est-à-dire que

$$h \in \mathfrak{D}_{(\varphi_1\varphi_2)(T)} \cap \mathfrak{D}_{\varphi_2(T)} \quad \text{entraîne} \quad h \in \mathfrak{D}_{\varphi_1(T)\varphi_2(T)}.$$

Or cela découle de ce que

$$V_1 \cdot (\varphi_1\varphi_2)(T)\,h = V_1 V_1^{-1}\, V_2^{-1}\, U_1 U_2 h = V_2^{-1}\, U_1 U_2 h =$$
$$= V_2^{-1}\, U_1 V_2\, \varphi_2(T)\,h = V_2^{-1}\, V_2 U_1\, \varphi_2(T)\,h = U_1 \varphi_2(T) h;$$

en effet cette relation entraîne

$$\varphi_1(T)\,\varphi_2(T)\,h = V_1^{-1}\, U_1 \varphi_2(T)\,h = (\varphi_1\varphi_2)(T)\,h.$$

De cette façon on a établi (ii) et (iii).

(iv) dérive de la proposition plus précise dans (iii) si l'on l'applique au couple $\varphi, \dfrac{1}{\varphi}$ dans l'un ordre ou l'autre, en remarquant que $\left(\varphi \dfrac{1}{\varphi}\right)(T) = \left(\dfrac{1}{\varphi}\,\varphi\right)(T) = 1(T) = I$.

Ad (v): Lorsque $\varphi(z) = u(z)/v(z)$, on a évidemment $\varphi^*(z) = u^*(z)/v^*(z)$ et par conséquent

$$\varphi^*(T^*) = v^*(T^*)^{-1}\, u^*(T^*) = v(T)^{*-1}\, u(T)^* = [v(T)^{-1}]^*\, u(T)^* =$$
$$= [u(T)\, v(T)^{-1}]^* \supseteqq \varphi(T)^*,$$[18])

parce que (3. 3) entraîne

$$[u(T)\, v(T)^{-1}]^* \supseteqq [v(T)^{-1}\, u(T)]^*.$$

Ad (vi): En appliquant théorème 1(v) et théorème 4(ii) on obtient que $u \in \mathsf{H}_{T'}$, $v \in \mathsf{E}_{T'}$, $u \circ w \in \mathsf{H}_T$, $v \circ w \in \mathsf{E}_T$, et

$$u(T') = u \circ w(T), \quad v(T') = v \circ w(T).$$

Puisque

$$\varphi = \frac{u}{v}, \quad \varphi \circ w = \frac{u \circ w}{v \circ w},$$

on en déduit que $\varphi \in \mathsf{H}_{T'}/\mathsf{E}_{T'}$, $\varphi \circ w \in \mathsf{H}_T/\mathsf{E}_T$ et

$$\varphi(T') = v(T')^{-1}\, u(T') = [v \circ w(T)]^{-1}\, [u \circ w(T)] = \varphi \circ w(T).$$

Ad (vii): Soit ζ un point à distance positive de l'ensemble des valeurs de $\varphi(z)$ prises dans D; $\varphi(z) = \dfrac{u(z)}{v(z)}$, $u \in \mathsf{H}_T$, $v \in \mathsf{E}_T$. La fonction

$$r_\zeta(z) = \frac{1}{\zeta - \varphi(z)}$$

---

[18]) On fait usage ici de ce que pour A bornée $(AB)^* = B^*A^*$; *cf.* [15], p. 29.

est holomorphe et bornée dans D, et $r_\zeta(e^{i\theta})$ existe en tous les points où $u(e^{i\theta})$ et $v(e^{i\theta})$ existent et $v(e^{i\theta}) \neq 0$, donc presque partout par rapport à $E_T(\cdot)$. Cela veut dire que $r_\zeta(z) \in \mathsf{H}_T$. Par (iv) on a

$$r_\zeta(T) = [\zeta I - \varphi(T)]^{-1}$$

et cette transformation est bornée. Donc ζ appartient à l'ensemble résolvant de $\varphi(T)$. Le reste de la proposition peut être démontré tout comme dans le cas des fonctions $\varphi(z)$ bornées (*voir* [17], théorème 2).

2. De ces raisonnements il ressort qu'il est important de savoir dans quelles conditions y a-t-il égalité dans la relation (3. 3)? Nous allons en établir une condition suffisante.

Théorème 7. *Supposons que les fonctions $u(z)$, $v(z)$ sont définies et continues dans le disque fermé unité $\overline{D}$ et n'ont pas de zéros en commun dans $\overline{D}$. De plus soit $u \in \mathsf{H}$ et $v \in \mathsf{E}_T$.*[19]

On a alors

$$v(T)^{-1}\, u(T) = u(T)\, v(T)^{-1} \tag{3. 4}$$

et, pour $\varphi = \dfrac{u}{v}$,

$$\varphi(T)^* = \varphi^*(T^*). \tag{3. 5}$$

Démonstration. Les fonctions $u(z)$, $v(z)$ sont continues dans $\overline{D}$, holomorphes dans D, et n'ont pas de zéros en commun dans $\overline{D}$. Ces conditions entraînent qu'il existe deux fonctions, $a(z)$ et $b(z)$, continues dans $\overline{D}$ et holomorphes dans D, telles que

$$a(z)\, u(z) + b(z)\, v(z) = 1;$$

voir p. ex. Carleson [2]. En posant, pour simplifier l'écriture, $a(T) = A$, $u(T) = U$ etc., on aura alors

$$AU + BV = I.$$

Faisant usage de cette relation et de la relation

$$A\, V^{-1} \subseteqq V^{-1} A,$$

valable d'après (3. 3), on obtient

$$V^{-1} U = (AU + BV)\, V^{-1} U = UAV^{-1} U + BVV^{-1} U \subseteqq$$

$$\subseteqq UV^{-1} AU + BU = U(V^{-1} AU + B) = UV^{-1}(AU + VB) = UV^{-1},$$

ce qui, comparé à la relation

$$V^{-1} U \supseteqq U\, V^{-1},$$

valable d'après (3. 3), fournit

$$V^{-1} U = UV^{-1},$$

donc (3. 4).

[19]) Puisque $u(z)$ est continue dans $\overline{D}$, on a $u \in \mathsf{H}_T$ pour toute contraction T.

Pour obtenir (3. 5) on n'a qu'à répéter l'argument dans la démonstration de l'assertion (v) du théorème 6, faisant usage cette fois-ci de l'égalité (3. 4) au lieu de l'inclusion (3. 3).

Corollaire. *Si* $\varphi_i(z)=\frac{u_i(z)}{v_i(z)}$ $(i=1,2)$, *où* $u_i\in \mathsf{H}_T$, $v_i\in \mathsf{E}_T$, *et le couple* u_1, v_2 *vérifie les hypothèses du théorème* 7, *on a*

$$(\varphi_1\varphi_2)(T)=\varphi_1(T)\cdot\varphi_2(T).$$

Démonstration. Puisque $v_2(T)^{-1}u_1(T)=u_1(T)\,v_2(T)^{-1}$, on a en effet

$$(\varphi_1\varphi_2)(T)=v_1(T)^{-1}\,v_2(T)^{-1}\,u_1(T)\,u_2(T)=v_1(T)^{-1}\,u_1(T)\,v_2(T)^{-1}\,u_2(T)=$$
$$=\varphi_1(T)\cdot\varphi_2(T).$$

4. Représentation de $\varphi(T)$ comme limite de $\varphi_r(T)$

Dans le § 1 on a défini les fonctions de la contraction T pour la classe H_T à partir de la classe A, notamment par un passage à la limite forte:

$$u_r(T)\to u(T)\qquad (r\to 1).$$

Or, pour une fonction $\varphi(z)$ quelconque, holomorphe dans D, la fonction

$$\varphi_r(z)=\varphi(rz)\qquad (0<r<1)$$

appartient à la classe A, donc $\varphi_r(T)$ a un sens et on peut se demander si l'on peut arriver à $\varphi(T)$ par un passage à la limite analogue, à partir de $\varphi_r(T)$, et cela pour toutes les fonctions $\varphi(z)$ appartenant à la classe $\mathsf{H}_T/\mathsf{E}_T$, où du moins à une sous-classe de celle-ci. C'est ce que nous allons rechercher dans ce paragraphe.

Théorème 8. (i) *Soit T une contraction de l'espace $\mathfrak{H}$ et soit* $\varphi(z)=\frac{u(z)}{v(z)}\in$ $\in \mathsf{H}_T/\mathsf{E}_T$. *Supposons que pour un $h\in\mathfrak{H}$ on ait*

$$\sup_{0<r<1}\|\varphi_r(T)h\|<\infty. \tag{4. 1}$$

Dans ce cas h appartient à $\mathfrak{D}_{\varphi(T)}$ et on a pour $r\to 1$

$$\varphi_r(T)h\rightharpoonup\varphi(T)h\quad\text{(convergence faible)}.$$

(ii) *Dans le cas particulier où les fonctions $u(z)$, $v(z)$ sont continues dans le disque fermé $\overline{D}$, n'ayant pas de zéros en commun dans $\overline{D}$, et si de plus $u\in\mathsf{H}$, $v\in\mathsf{E}_T^{\mathrm{reg}}$, le domaine de $\varphi(T)$ est constitué précisément de ceux éléments $h\in\mathfrak{H}$ pour lesquels la condition* (4. 1) *est vérifiée, et pour ces éléments h on a même*

$$\varphi_r(T)h\to\varphi(T)h\qquad\text{(convergence forte)}.$$

Démonstration. *Ad* (i): Soit $\varphi(z)=\frac{u(z)}{v(z)}$ et envisageons une suite $r_n\to 1$. Grâce à l'hypothèse (4. 1) on peut tirer de cette suite une suite partielle

$\{\varrho_n\}$ pour laquelle $g_n = \varphi_{\varrho_n}(T)h$ converge faiblement; désignons cette limite faible par g.

Montrons que

$$v_{\varrho_n}(T)g_n \rightharpoonup v(T)g. \tag{4.2}$$

En effet, pour $f \in \mathfrak{H}$ quelconque on a

$$(v_{\varrho_n}(T)g_n - v(T)g\,, f) = (v(T)(g_n - g) + (v_{\varrho_n}(T) - v(T))g_n, f) =$$
$$= (g_n - g, v(T)^*f) + (g_n, v_{\varrho_n}(T)^*f - v(T)^*f) \to 0$$

parce que

$$v_{\varrho_n}(T)^* = v^*_{\varrho_n}(T^*) \to v^*(T^*) = v(T)^*.$$

D'autre part on a

$$v_{\varrho_n}(T)g_n = v_{\varrho_n}(T)\varphi_{\varrho_n}(T)h = u_{\varrho_n}(T)h \to u(T)h; \tag{4.3}$$

comparé à (4. 2) cela donne

$$v(T)g = u(T)h, \text{ donc } h \in \mathfrak{D}_{\varphi(T)}, \quad \varphi(T)h = v(T)^{-1}u(T)h = g.$$

Nous avons ainsi démontré que $h \in \mathfrak{D}_{\varphi(T)}$ et que toute suite $r_n \to 1$ contient une suite partielle $\varrho_n \to 1$ pour laquelle

$$\varphi_{\varrho_n}(T)h \rightharpoonup \varphi(T)h \qquad (n \to \infty).$$

De ce résultat il s'ensuit que

$$\varphi_r(T)h \rightharpoonup \varphi(T)h \qquad (r \to 1).$$

En effet, en cas contraire il y aurait un $f \in \mathfrak{H}$ et une suite $r_n \to 1$ tels que

$$|(\varphi_{r_n}(T)h - \varphi(T)h, f)| \geqq \varepsilon > 0.$$

Cela contredirait l'existence d'une suite partielle $\{\varrho_n\}$ de $\{r_n\}$ pour laquelle

$$\varphi_{\varrho_n}(T)h \rightharpoonup \varphi(T)h.$$

Cela achève la démonstration de (i).

Ad (ii): De l'hypothèse $v(z) \in \mathsf{E}_T^{\text{reg}}$ il s'ensuit que la fonction

$$w(r; z) = \frac{v(z)}{v(rz)}$$

appartient, pour toute valeur fixée du paramètre r $(0 < r < 1)$, à la classe H_T, de plus qu'elle est bornée par une constante indépendante de r et que $w(r; e^{i\theta}) \to 1$ en tous les points $e^{i\theta} \notin C_v^0$, c'est-à-dire presque partout par rapport à la mesure spectrale $\mathsf{E}_T(\cdot)$, lorsque $r \to 1$. Cela entraîne

$$v_r(T)^{-1}v(T) = w(r; T) \to I \quad (r \to 1),$$

en vertu du théorème 1 (iii).

D'autre part, les autres hypothèses sur les fonctions $u(z)$ et $v(z)$ entraînent, en vertu du théorème 7,

$$\varphi(T)=u(T)v(T)^{-1},$$

d'où il s'ensuit que tout élément $h\in\mathfrak{D}_{\varphi(T)}$ est de la forme

$$h=v(T)g.$$

Par conséquent on a

$$\varphi_r(T)h=v_r(T)^{-1}u_r(T)h=v_r(T)^{-1}u_r(T)v(T)g=v_r(T)^{-1}v(T)u_r(T)g=w(r;T)u_r(T)g\to$$
$$\to u(T)g=u(T)v(T)^{-1}h=\varphi(T)h$$

lorsque $r\to 1$.

Cela achève la démonstration.

5. Fonctions limitées par un secteur

En vue d'applications ultérieures nous envisagerons dans ce paragraphe des fonctions $\varphi(z)$ dont les valeurs sont comprises dans un certain secteur du plan des nombres complexes, d'ouverture au plus égale à $\frac{\pi}{2}$.

Nous commençons par des fonctions de la classe simple A.

Théorème 9. *Soit* $\varphi(z)\in A$ *et telle que*

$$|\arg\varphi(z)|\leqq\alpha\frac{\pi}{2}\quad pour\quad |z|\leqq 1, \tag{5.1}$$

où

$$0\leqq\alpha\leqq 1.$$

On a alors pour toute contraction T *de l'espace* $\mathfrak{H}$ *et pour tout* $h\in\mathfrak{H}$:

$$|\arg(\varphi(T)h,h)|\leqq\alpha\frac{\pi}{2}. \tag{5.2}$$

Si de plus

$$0\leqq\alpha<\frac{1}{2}, \tag{5.3}$$

les inégalités suivantes sont valables:

(i) $\mathrm{Re}(\varphi(T)h,\varphi(T)^*h)\geqq\cos\alpha\pi\cdot\max\{\|\varphi(T)h\|^2,\|\varphi(T)^*h\|^2\}$,

(ii) $\|\varphi(T)h\|\geqq\cos\alpha\pi\cdot\|\varphi(T)^*h\|,\quad \|\varphi(T)^*h\|\geqq\cos\alpha\pi\cdot\|\varphi(T)h\|$,

(iii) $\mathrm{Re}(\varphi(T)h,[\mathrm{Re}\,\varphi(T)]h)\geqq\cos^2\frac{\alpha\pi}{2}\cdot\|\varphi(T)h\|^2$,

(iv) $\dfrac{\cos^2\frac{\alpha\pi}{2}}{\cos\alpha\pi}\cdot\|\varphi(T)h\|\geqq\|[\mathrm{Re}\,\varphi(T)]h\|\geqq\cos^2\frac{\alpha\pi}{2}\cdot\|\varphi(T)h\|$,

(v) $\|[\mathrm{Im}\,\varphi(T)]h\|\leqq\mathrm{tg}\frac{\alpha\pi}{2}\cdot\|[\mathrm{Re}\,\varphi(T)]h\|$, *où*

$$\operatorname{Re}\varphi(T)=\frac{1}{2}[\varphi(T)+\varphi(T)^*],\qquad \operatorname{Im}\varphi(T)=\frac{1}{2i}[\varphi(T)-\varphi(T)^*].$$

D é m o n s t r a t i o n. En vertu de (1. 4) on a

$$\varphi(T)=\operatorname{pr}\varphi(U_T),$$

d'où l'on obtient

$$|\arg(\varphi(T)h,h)|=|\arg(\varphi(U_T)h,h)|=\left|\arg\int_0^{2\pi}\varphi(e^{i\theta})\,d(E_{T,\theta}h,h)\right|\leqq$$

$$\leqq\max_\theta|\arg\varphi(e^{i\theta})|\leqq\alpha\frac{\pi}{2},$$

c'est-à-dire (5. 2).

Faisons l'hypothèse (5. 3). De (5. 1) il s'ensuit

$$|\arg[\varphi(z)]^2|\leqq\alpha\pi<\frac{\pi}{2},$$

d'où

$$\operatorname{Re}[\varphi(z)]^2\geqq\cos\alpha\pi\cdot|\varphi(z)|^2$$

et par conséquent

$$\operatorname{Re}(\varphi(T)h,\varphi(T)^*h)=\operatorname{Re}(\varphi(T)^2h,h)=\operatorname{Re}(\varphi(U_T)^2h,h)=$$

$$=\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}[\varphi(e^{i\theta})]^2\,d(E_{T,\theta}h,h)\geqq\cos\alpha\pi\int_0^{2\pi}|\varphi(e^{i\theta})|^2\,d(E_{T,\theta}h,h)=$$

$$=\begin{cases}\cos\alpha\pi\cdot\|\varphi(U_T)h\|^2\geqq\cos\alpha\pi\cdot\|\varphi(T)h\|^2,\\ \cos\alpha\pi\cdot\|\varphi(U_T)^*h\|^2\geqq\cos\alpha\pi\cdot\|\varphi(T)^*h\|^2;\end{cases}$$

on a fait usage ici des relations

$$\varphi(T)^2=\operatorname{pr}\varphi(U_T)^2,\quad \varphi(T)^*=\operatorname{pr}\varphi(U_T)^*,$$

provenant de ce que $T^n=\operatorname{pr}U_T^n$ $(n=0,1,\ldots)$. Nous avons ainsi démontré (i). La constante $\cos\alpha\pi$ est la meilleure possible, ce qu'on voit par l'exemple $\varphi(z)\equiv e^{\frac{i\alpha\pi}{2}}$.

Les autres inégalités dérivent de (i) comme il suit.

(ii) s'obtient de (i) par l'inégalité de Schwarz:

$$\operatorname{Re}(\varphi(T)h,\varphi(T)^*h)\leqq\|\varphi(T)h\|\cdot\|\varphi(T)^*h\|.$$

(iii) résulte immédiatement:

$$\operatorname{Re}(\varphi(T)h,[\operatorname{Re}\varphi(T)]h)=\frac{1}{2}\|\varphi(T)h\|^2+\frac{1}{2}\operatorname{Re}(\varphi(T)h,\varphi(T)^*h)\geqq$$

$$\geqq\frac{1}{2}(1+\cos\alpha\pi)\cdot\|\varphi(T)h\|^2=\cos^2\frac{\alpha\pi}{2}\cdot\|\varphi(T)h\|^2.$$

La seconde inégalité (iv) découle de (iii) par l'inégalité de Schwarz. La première inégalité (iv) résulte de la première inégalité (ii):

$$\|[\operatorname{Re}\varphi(T)]h\| \leqq \frac{1}{2}[\|\varphi(T)h\| + \|\varphi(T)^*h\|] \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\cos\alpha\pi}\right)\cdot\|\varphi(T)h\| = \frac{\cos^2\frac{\alpha\pi}{2}}{\cos\alpha\pi}\cdot\|\varphi(T)h\|.$$

Finalement, (v) dérive de (i) de la manière suivante. Par (i)

$$2\operatorname{Re}\big(\varphi(T)h,\ \varphi(T)^*h\big) \geqq \cos\alpha\pi\cdot[\|\varphi(T)h\|^2 + \|\varphi(T)^*h\|^2];$$

comme

$$\cos\alpha\pi = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha\pi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha\pi}{2}},$$

on obtient par un raisonnement évident

$$\|\varphi(T)h\|^2 - 2\operatorname{Re}\big(\varphi(T)h,\ \varphi(T)^*h\big) + \|\varphi(T)^*h\|^2 \leqq$$

$$\leqq \operatorname{tg}^2\frac{\alpha\pi}{2}[\|\varphi(T)h\|^2 + 2\operatorname{Re}\big(\varphi(T)h,\ \varphi(T)^*h\big) + \|\varphi(T)^*h\|^2],$$

ce qui fournit (v).

Théorème 9^{bis}. *Soit* $\varphi(z)=\dfrac{u(z)}{v(z)}$ *comme dans le théorème* 8 (ii), *c'est-à-dire que* $u(z)$ *et* $v(z)$ *soient continues dans* $\bar{D}$, *sans zéros en commun, et* $u\in \mathsf{H}$, $v\in \mathsf{E}_T^{\text{reg}}$. *Supposons de plus que*

$$|\arg\varphi(z)| \leqq \frac{\alpha\pi}{2} \quad \textit{pour} \quad |z|<1$$

où

$$0\leqq\alpha\leqq 1.$$

L'inégalité (5.2) *est alors valable pour* $\varphi(T)$. *Si de plus*

$$0\leqq\alpha<\frac{1}{2},$$

les transformations $\varphi(T)$, $\varphi(T)^*$, *et par conséquent aussi les transformations*

$$\operatorname{Re}\varphi(T)=\frac{1}{2}[\varphi(T)+\varphi(T)^*] \quad \textit{et} \quad \operatorname{Im}\varphi(T)=\frac{1}{2i}[\varphi(T)-\varphi(T)^*],$$

ont le même domaine $\mathfrak{D}$, *et les inégalités* (i) — (v) *du théorème* 9 *restent valables pour tout* $h\in\mathfrak{D}$. *De plus,* $\operatorname{Re}\varphi(T)$ *est une transformation autoadjointe positive.*

D é m o n s t r a t i o n. La fonction $\varphi_r(z)=\varphi(rz)$ appartient à la classe A pour tout r fixé, $0<r<1$, donc on peut appliquer le théorème 9 à $\varphi_r(T)$. Puisque

$$\varphi(T)=\lim_{r\to 1}\varphi_r(T)$$

en vertu du théorème 8 (ii), l'inégalité (5. 2) sera valable aussi pour $\varphi(T)$ et $h\in\mathfrak{D}_{\varphi(T)}$. En vertu du même théorème 8, $\mathfrak{D}_{\varphi(T)}$ est constitué des éléments h pour lesquels

$$\sup_r\|\varphi_r(T)h\|<\infty. \tag{5.4}$$

De même, $\mathfrak{D}_{\varphi(T)^*}$ est constitué des éléments h pour lesquels

$$\sup_r\|\varphi_r(T)^*h\|<\infty, \tag{5.5}$$

parce que $\varphi_r(T)^*=\varphi_r^*(T^*)$ et, en vertu du théorème 7, $\varphi(T)^*=\varphi^*(T^*)$. Or les conditions (5. 4), (5. 5) sont équivalentes en vertu des inégalités

$$\|\varphi_r(T)h\|\geqq\cos\alpha\pi\cdot\|\varphi_r(T)^*h\|,\quad \|\varphi_r(T)^*h\|\geqq\cos\alpha\pi\cdot\|\varphi_r(T)h\|.$$

Donc $\mathfrak{D}_{\varphi(T)}=\mathfrak{D}_{\varphi(T)^*}$, et comme pour un élément h de ce domaine commun $\mathfrak{D}$

$$\varphi(T)h=\lim_{r\to 1}\varphi_r(T)h,$$

$$\varphi(T)^*h=\varphi^*(T^*)h=\lim_{r\to 1}\varphi_r^*(T^*)h=\lim_{r\to 1}\varphi_r(T)^*h,$$

les inégalités (i)—(v) du théorème 9 seront valables aussi dans le cas limite $r=1$.

D'après (5. 2) on a

$$(\operatorname{Re}\varphi(T)h,\,h)=\operatorname{Re}(\varphi(T)h,\,h)\geqq 0\quad\text{pour}\quad h\in\mathfrak{D},$$

donc $\operatorname{Re}\varphi(T)$ est une transformation symétrique positive. Pour démontrer qu'elle est autoadjointe il suffit donc de prouver que

$$(I+\operatorname{Re}\varphi(T))\mathfrak{D}=\mathfrak{H}.$$ [20]

Or on a par l'inégalité (v) et par la positivité de $\operatorname{Re}\varphi(T)$:

$$\|\operatorname{Im}\varphi(T)h\|\leqq c\|(I+\operatorname{Re}\varphi(T)h\|\quad\text{où}\quad c=\operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{2}<1;$$

par conséquent il existe une transformation linéaire bornée B, qu'on peut supposer définie partout dans $\mathfrak{H}$, telle que

$$\operatorname{Im}\varphi(T)=B[I+\operatorname{Re}\varphi(T)]\quad\text{et}\quad\|B\|\leqq c.$$

Par conséquent

$$I+\varphi(T)=I+\operatorname{Re}\varphi(T)+i\operatorname{Im}\varphi(T)=(I+iB)(I+\operatorname{Re}\varphi(T)).$$

Or $(I+\varphi(T))\mathfrak{D}=\mathfrak{H}$, parce que -1 n'appartient pas au spectre de $\varphi(T)$ (*voir* théo-

---

[20]) Nous empruntons un raisonnement à l'article [8] de KATO.

rème 6 (vii)), et $I+iB$ est un automorphisme de $\mathfrak{H}$ puisque $\|iB\|<1$. Il en résulte que

$$(I+\mathrm{Re}\,\varphi(T))\mathfrak{D}=(I+iB)^{-1}(I+\varphi(T))\mathfrak{D}=(I+iB)^{-1}\mathfrak{H}=\mathfrak{H},$$

ce qui achève la démonstration.

6. Calcul fonctionnel pour les transformations accrétives maximum. Puissances d'ordre fractionnaire

1. Dans ce paragraphe nous envisagerons les transformations linéaires A de l'espace $\mathfrak{H}$ qui sont reliées par les formules cayleyennes réciproques

$$A=(I-T)^{-1}(I+T), \qquad T=(A-I)(A+I)^{-1}, \tag{6.1}$$

aux contractions T de $\mathfrak{H}$ telles que 1 n'est pas une valeur propre de T. Ces transformations A sont *fermées*, de domaine $\mathfrak{D}_A$ *dense* dans $\mathfrak{H}$, et peuvent être caractérisées par chacune des propriétés suivantes[21]):

(a) $-A$ est la *génératrice infinitésimale* d'un semi-groupe continu $\{T_s\}_{s\geqq 0}$ de contractions de $\mathfrak{H}$.

(b) A est fermée, de domaine $\mathfrak{D}_A$ dense dans $\mathfrak{H}$; A et A^* sont *accrétives.*[22])

(c) A est accrétive et n'admet pas de prolongement propre accrétif.

Nous ne nous reporterons pas dans la suite à ces propriétés, tout ce qui nous sera nécessaire étant la relation (6. 1) entre A et sa transformée cayleyenne T; mais en vue de leur propriété (c) nous appellerons ces transformations A: *accrétives maximum.*

Remarquons que si A est accrétive maximum ayant la transformée cayleyenne T, A^* est aussi accrétive maximum et sa transformée cayleyenne est égale à T^*.

Observons de plus qu'une transformation normale A (bornée ou non) est accrétive maximum si, et seulement si son spectre est situé dans le demi-plan $\mathrm{Re}\, s\geqq 0$ des nombres complexes s.

Envisageons l'application

$$z\to s=\frac{1+z}{1-z}\equiv\omega(z), \qquad s\to z=\frac{s-1}{s+1},$$

du disque unité $D=\{z:|z|<1\}$ sur le demi-plan de droite

$$S=\{s:\mathrm{Re}\, s>0\}.$$

Toute fonction $f(s)$, définie et holomorphe dans le demi-plan S, engendre par cette application une fonction définie et holomorphe dans le disque D, notamment la fonction

$$f\circ\omega(z)=f\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

21) Pour (a) et (c) *voir* [16], [17] ou [12]: (b) peut être démontrée de manière analogue.

22) Une transformation linéaire A sera appelée *accrétive* si

$$\mathrm{Re}(Ah, h)\geqq 0 \text{ pour tout } h\in\mathfrak{D}_A,$$

terminologie proposée par FRIEDRICHS [6], p. 337.

Soit A une transformation accrétive maximum et soit T sa transformée cayleyenne (6. 1). Nous *définissons* les fonctions de A par la formule

(6. 2) $$f(A) = f \circ \omega(T),$$

pour toute fonction $f(s)$ dans S, pour laquelle $f \circ \omega(T)$ se trouve définie, c'est-à-dire pour laquelle

$$f \circ \omega \in \mathsf{H}_T/\mathsf{E}_T.$$

De cette façon, le calcul fonctionnel que nous venons de développer pour les contractions donne naissance à un calcul fonctionnel pour les transformations accrétives maximum.

T n'ayant pas la valeur propre 1, il en est de même pour sa dilatation unitaire minimum U_T (*voir* [17], théorème 1) et par conséquent $\mathsf{E}_T(\{1\}) = O$. La classe H_T comprend donc toutes les fonctions $u(z) \in \mathsf{H}$ qui sont continues dans $\bar{D} - \{1\}$, et la classe E_T comprend toutes les fonctions $v(z) \in \mathsf{E}$ qui sont continues et différentes de 0 dans $\bar{D} - \{1\}$. Comme l'application en question applique $\bar{D} - \{1\}$ sur le demi-plan $\bar{S} = \{s: \operatorname{Re} s \geqq 0\}$ (le point $s = \infty$ non compris), on voit que la classe des fonctions admises $f(s)$ dans S comprend en particulier toutes les fonctions qui sont continues et bornées dans $\bar{S}$, et holomorphes dans S. De cette façon, notre calcul fonctionnel $f(s) \to f(A)$ embrasse ceux développés dans les articles [5] et [10] où l'on n'a envisagé que telles fonctions „régulières". Observons qu'on a en particulier

$$f(A) = cI \quad \text{pour} \quad f(s) \equiv c \quad \text{(constante)},$$

parce que $f \circ \omega(z) \equiv c$ dans D.

2. Envisageons la fonction

$$f(s) \equiv s^\alpha \text{ [23]}$$

où l'exposant α est réel non-négatif. On a

$$f \circ \omega(z) \equiv \omega^\alpha(z) = \frac{u^\alpha(z)}{v^\alpha(z)}$$

où

$$u^\alpha(z) \equiv (1+z)^\alpha, \quad v^\alpha(z) \equiv (1-z)^\alpha.$$

Ces fonctions u^α, v^α sont continues dans $\bar{D}$, holomorphes dans D, de plus v^α appartient à la classe $\mathsf{E}^{\mathrm{reg}}$ (*voir* théorème 5) et ne s'annule qu'au point $z = 1$, donc

$$\omega^\alpha \in \mathsf{H}_T/\mathsf{E}_T^{\mathrm{reg}};$$

par conséquent $f(A)$ a un sens,

$$f(A) = \omega^\alpha(T) = v^\alpha(T)^{-1} u^\alpha(T).$$

Pour $f(A)$ on employera la notation A^α, ce qui sera légitimée dès que nous montrons que

$$A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^{\alpha+\beta} = A^\alpha A^\beta \quad (\text{pour } \alpha, \beta \geqq 0).$$

---

[23]) Pour ζ avec $\operatorname{Re} \zeta \geqq 0$ on entendra par ζ^α toujours la valeur $e^{\alpha \log \zeta}$ où l'on choisit pour $\log \zeta$ la détermination pour laquelle

$$|\operatorname{Im}[\log \zeta]| \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Or $A^0=I$ parce que $\omega^0(z)=1$; puis

$$A^1=\omega^1(T)=v^1(T)^{-1}u^1(T)=(I-T)^{-1}(I+T)=A;$$

finalement

$$A^{\alpha+\beta}=\omega^{\alpha+\beta}(T)=(\omega^\alpha\cdot\omega^\beta)(T)=\omega^\alpha(T)\cdot\omega^\beta(T)=A^\alpha A^\beta$$

en vertu du corollaire au théorème 7, vu que $u^\alpha(z)$ et $v^\beta(z)$ sont continues dans $\bar{D}$, ne s'annulent pas simultanément dans $\bar{D}$, et $u^\alpha(z)\in \mathsf{H}_T$, $v^\beta(z)\in \mathsf{E}_T^{\mathrm{reg}}$.

Comme on a évidemment $(\omega^\alpha)^*=\omega^\alpha$, il s'ensuit du théorème 7 que

$$(A^\alpha)^*=[\omega^\alpha(T)]^*=\omega^\alpha(T^*)=(A^*)^\alpha.$$

On a $\operatorname{Re}\omega(z)\geqq 0$ et par conséquent

$$|\arg\omega^\alpha(z)|\leqq\frac{\alpha\pi}{2}$$

dans D, donc on peut appliquer le théorème 9^{bis} à la transformation $A^\alpha=\omega^\alpha(T)$ et son adjointe $(A^\alpha)^*$.

Envisageons alors les trois fonctions

$$u^\beta(z)=(1+z)^\beta,\quad v^\beta(z)=(1-z)^\beta,\quad w_\alpha(z)=\frac{u^\alpha(z)-v^\alpha(z)}{u^\alpha(z)+v^\alpha(z)}$$

où

$$0\leqq\beta\quad\text{et}\quad 0\leqq\alpha\leqq 1;$$

et montrons que ces fonctions vérifient les hypothèses du théorème 6 (vi).

En effet, comme $u^\alpha(z), v^\alpha(z)$ ne s'annulent pas simultanément et leurs valeurs dans $\bar{D}$ sont comprises dans le secteur

$$\left\{\zeta:\ |\arg\zeta|\leqq\frac{\alpha\pi}{2}\right\},$$

il s'ensuit dans le cas $0\leqq\alpha<1$ que $u^\alpha(u)+v^\alpha(z)$ ne s'annule pas dans $\bar{D}$ et par conséquent $w_\alpha(z)$ est continue dans $\bar{D}$ et holomorphe dans D; on voit aisément aussi que

$$|w_\alpha(z)|<1\quad\text{dans}\quad\bar{D}$$

sauf le point $z=1$ où $w_\alpha(z)=1$ et le point $z=-1$ où $w_\alpha(z)=-1$. Par conséquent $m(\overset{-1}{w}(C))=m(\{\pm 1\})=0$. Les mêmes faits subsistent aussi dans le cas $\alpha=1$ puisque $w_1(z)\equiv z$. D'autre part, les ensembles

$$\overset{-1}{w}_\alpha(C_{u^\beta}),\quad C_{u^\beta\circ w_\alpha},\quad \overset{-1}{w}_\alpha(C^0_{v^\beta}),\quad C^0_{v^\beta\circ w_\alpha}$$

sont de mesure O par rapport à la mesure spectrale $E_T(\cdot)$, les deux premiers de ces ensembles étant vides et les deux autres se réduisant au seul point $z=1$.

On peut donc appliquer le théorème 6 (vi). Il résulte que

$$T_\alpha=w_\alpha(T)$$

est une contraction, $\omega^\beta(T_\alpha)$ et $\omega^\beta\circ w_\alpha(T)$ existent, et

$$\omega^\beta(T_\alpha)=\omega^\beta\circ w_\alpha(T). \tag{6.3}$$

Or on a

$$\omega^{\beta}\circ w_{\alpha}(z)=\left(\frac{1+w_{\alpha}(z)}{1-w_{\alpha}(z)}\right)^{\beta}=\left(\frac{u^{\alpha}(z)}{v^{\alpha}(z)}\right)^{\beta}=\omega^{\alpha\beta}(z),$$

donc (6. 3) veut dire

$$\omega^{\beta}(T_{\alpha})=A^{\alpha\beta}. \tag{6. 4}$$

Pour $\beta=1$ cette relation prend la forme

$$A^{\alpha}=\omega^{1}(T_{\alpha})=v^{1}(T_{\alpha})^{-1}u^{1}(T_{\alpha})=(I-T_{\alpha})^{-1}(I+T_{\alpha}),$$

ce qui montre que la transformation A^{α} est aussi accrétive maximum, sa transformée cayleyenne étant égale à T_{α}. On a alors $f(A^{\alpha})=f\circ\omega(T_{\alpha})$ pour toutes les fonctions $f(s)$ pour lesquelles $f\circ\omega(T_{\alpha})$ a un sens, en particulier $(A^{\alpha})^{\beta}=\omega^{\beta}(T_{\alpha})$. Donc (6. 4) veut dire

$$(A^{\alpha})^{\beta}=A^{\alpha\beta}\quad(0\leqq\alpha\leqq 1;\ \beta\geqq 0).\text{[24]} \tag{6. 5}$$

Soit, pour $0\leqq\alpha\leqq 1$, $\{T_{\alpha,t}\}_{t\geqq 0}$ le semi-groupe de contractions dont la génératrice infinitésimale est $-A^{\alpha}$, donc la cogénératrice infinitésimale est $T_{\alpha}=w_{\alpha}(T)$; dans la Note III [17] on a démontré que

$$T_{\alpha,t}=u_t(T_{\alpha})=u_t\big(w_{\alpha}(T)\big)$$

où

$$u_t(z)=\exp\left(-t\,\frac{1+z}{1-z}\right).$$

Cette fonction étant bornée dans D en module (par 1) et continue dans $\overline{D}-\{1\}$, on peut appliquer le théorème 6 (vi) sur les fonctions composées; il en résulte

$$T_{\alpha,t}=e_{\alpha,t}(T) \tag{6. 6}$$

où

$$e_{\alpha,t}(z)=u_t\circ w_{\alpha}(z)=\exp\left(-t\,\frac{1+w_{\alpha}(z)}{1-w_{\alpha}(z)}\right)=\exp\left[-t\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}\right]=e^{-ts^{\alpha}}. \tag{6. 7}$$

Lorsque $0\leqq\alpha<1$, le semi-groupe $\{T_{\alpha,t}\}$ peut être prolongé des valeurs réelles non-négatives du paramètre t aux valeurs complexes de t situées dans le secteur

$$\overline{S}_{1-\alpha}=\left\{t\colon |\arg t|\leqq(1-\alpha)\,\frac{\pi}{2}\right\},$$

et cela de sorte que ce prolongement soit aussi un semi-groupe de contractions et de plus $T_{\alpha,t}$ dépende, pour α fixé, analytiquement de t dans le secteur ouvert

$$S_{1-\alpha}=\left\{t\colon |\arg t|<(1-\alpha)\,\frac{\pi}{2}\right\}.$$

[24]) La restriction $\alpha\leqq 1$ est motivée par le fait que A^{α} n'est pas nécessairement une transformation accrétive maximum pour $\alpha>1$.

En effet, comme

$$|\arg(ts^\alpha)| \leqq |\arg t| + \alpha |\arg s| \leqq \frac{\pi}{2}$$

donc

$$\mathrm{Re}(ts^\alpha) \geqq 0 \quad \text{pour} \quad t \in \overline{S}_{1-\alpha}, \; s \in S = S_1,$$

la fonction $e_{\alpha,t}(z)$, définie par la même formule (6. 7) pour $t \in \overline{S}_{1-\alpha}$, $z \in D$, appartient à la classe H_T, de plus

$$|e_{\alpha,t}(z)| \leqq 1 \quad \text{dans} \quad D,$$

$$e_{\alpha,0}(z) = 1, \quad e_{\alpha,t_1+t_2}(z) = e_{\alpha,t_1}(z) \cdot e_{\alpha,t_2}(z).$$

Par conséquent, les transformations correspondantes

$$T_{\alpha,t} = e_{\alpha,t}(T)$$

sont des contractions et forment un semi-groupe:

$$T_{\alpha,0} = I, \quad T_{\alpha,t_1+t_2} = T_{\alpha,t_1} \cdot T_{\alpha,t_2} \qquad (t_1, t_2 \in \overline{S}_{1-\alpha}).$$

Pour montrer que ce semi-groupe est analytique, fixons un point $t_0 > 0$ et un autre, t, situé dans le cercle maximum autour de t_0, contenu dans le secteur $\overline{S}_{1-\alpha}$, c'est-à-dire tel que

$$|t - t_0| < \varrho_0 = t_0 \cos \frac{\alpha\pi}{2}.$$

Envisageons le développement

$$e^{-ts^\alpha} = e^{-(t-t_0)s^\alpha} \cdot e^{-t_0 s^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t-t_0}{\varrho_0}\right)^n b_n(s) \quad (s \in S) \tag{6. 8}$$

où

$$b_n(s) = \frac{(-1)^n}{n!} (\varrho_0 s^\alpha)^n e^{-t_0 s^\alpha};$$

on a

$$|b_n(s)| \leqq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} |\varrho_0 s^\alpha|^m \exp(-t_0 \mathrm{Re}\, s^\alpha) = \exp[\varrho_0 |s^\alpha| - t_0 \,\mathrm{Re}\, s^\alpha] \leqq 1$$

parce que

$$\mathrm{Re}\, s^\alpha \geqq |s^\alpha| \cos \frac{\alpha\pi}{2} \quad \text{pour} \quad s \in \overline{S}.$$

Le développement (6. 8) est donc uniformément convergente dans $\overline{S}$, d'où l'on conclut, en passant aux transformations linéaires correspondantes,

$$T_{\alpha,t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{\varrho_0^n} B_n \tag{6. 9}$$

où

$$B_n = b_n(A) = b_n \circ \omega(T), \quad \|B_n\| \leqq 1.$$

Cela achève la démonstration du fait que $T_{\alpha,t}$ est fonction analytique de t dans $S_{1-\alpha}$.

Résumons nos résultats:

Théorème 10. *Soit A une transformation accrétive maximum de l'espace $\mathfrak{H}$ et soit $A^\alpha(\alpha \geqq 0)$ la transformation qui correspond à la fonction s^α au sens du calcul fonctionnel $f(s) \to f(A)$, défini au début de ce paragraphe. A^α est une transformation linéaire fermée, à domaine $\mathfrak{D}_\alpha$ dense dans $\mathfrak{H}$, et on a*

$$A^0 = I; \quad A^1 = A; \quad A^{\alpha+\beta} = A^\alpha A^\beta \quad (\alpha, \beta \geqq 0);$$

$$(A^\alpha)^* = (A^*)^\alpha \qquad (\alpha \geqq 0).$$

Pour $0 \leqq \alpha \leqq 1$ la transformation A^α est accrétive maximum elle aussi et on a

$$(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta} \qquad (\beta \geqq 0);$$

de plus

$$|\arg(A^\alpha h, h)| \leqq \frac{\alpha\pi}{2} \quad \textit{pour} \quad h \in \mathfrak{D}_\alpha.$$

Pour $0 \leqq \alpha < 1$ le semi-groupe de contractions $\{T_{\alpha,t}\}_{t \geqq 0}$, engendré par la génératrice infinitésimale $-A^\alpha$, peut être étendu aux valeurs complexes du paramètre t situées dans le secteur $|\arg t| \leqq (1-\alpha)\frac{\pi}{2}$, de sorte que $\{T_{\alpha,t}\}$ soit un semi-groupe continu dans ce secteur, analytique dans l'intérieur du secteur.

Pour $0 \leqq \alpha < \frac{1}{2}$ les transformations A^α, $A^{\alpha *}$, et par conséquent aussi

$$\mathrm{Re}\, A^\alpha = \frac{1}{2}(A^\alpha + A^{\alpha *}) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Im}\, A^\alpha = \frac{1}{2i}(A^\alpha - A^{\alpha *}),$$

ont toutes le même domaine $\mathfrak{D}_\alpha$; $\mathrm{Re}\, A^\alpha$ est positive autoadjointe; de plus les inégalités suivantes sont valables pour $h \in \mathfrak{D}_\alpha$:

(i) $\mathrm{Re}(A^\alpha h, A^{\alpha *} h) \geqq \cos \alpha\pi \cdot \max\{\|A^\alpha h\|^2, \|A^{\alpha *} h\|^2\}$;

(ii) $\|A^\alpha h\| \geqq \cos \alpha\pi \cdot \|A^{\alpha *} h\|, \quad \|A^{\alpha *} h\| \geqq \cos \alpha\pi \cdot \|A^\alpha h\|$;

(iii) $\mathrm{Re}\left(A^\alpha h, [\mathrm{Re}\, A^\alpha] h\right) \geqq \cos^2 \frac{\alpha\pi}{2} \cdot \|A^\alpha h\|^2$;

(iv) $\dfrac{\cos^2 \frac{\alpha\pi}{2}}{\cos \alpha\pi} \|A^\alpha h\| \geqq \|[\mathrm{Re}\, A^\alpha] h\| \geqq \cos^2 \frac{\alpha\pi}{2} \cdot \|A^\alpha h\|$;

(v) $\|[\mathrm{Im}\, A^\alpha] h\| \leqq \mathrm{tg} \frac{\alpha\pi}{2} \cdot \|[\mathrm{Re}\, A^\alpha] h\|$.

3. Puissances d'ordre fractionnaire des transformations linéaires A d'un espace de Hilbert ou de Banach, telles que $-A$ soit la génératrice infinitésimale d'un semi-groupe de contractions, ont été définies par plusieurs auteurs, utilisant de différentes méthodes. La définition proposée par Bochner [2] et Phillips [11], à laquelle les autres sont équivalentes (*voir* [20] et [7]), introduit A^α $(0<\alpha<1)$ moyennant le semi-groupe à un paramètre

$$T_{\alpha,t}=e^{-tA^\alpha} \quad (t\geqq 0).^{25)}$$

Notamment, on définit

$$T_{\alpha,t}=\int_0^\infty T_\tau\, d\gamma_{\alpha,t}(\tau) \tag{6.10}$$

où

$$T_\tau=e^{-\tau A}$$

et la mesure $d\gamma_{\alpha,t}(\tau)\geqq 0$ est définie par l'intégrale de Laplace

$$e^{-ts^\alpha}=\int_0^\infty e^{-\tau s}\, d\gamma_{\alpha,t}(\tau) \qquad (t\geqq 0,\ \operatorname{Re} s\geqq 0,\ 0<\alpha<1).$$

Pour établir l'équivalence de notre définition de A^α aux précédentes, il suffit donc de montrer que le semi-groupe $\{T_{\alpha,t}\}$ tel que nous l'avons obtenu par notre calcul fonctionnel, notamment par la formule (6. 6), vérifie la formule (6. 10), du moins dans le sens faible de l'intégrale. Or la fonction $e_{\alpha,t}(z)$ (*voir* (6. 7)) appartient à H_T, par conséquent

$$T_{\alpha,t}=e_{\alpha,t}(T)=\operatorname{pr} e_{\alpha,t}(U_T),$$

d'où il s'ensuit pour $h\in\mathfrak{H}$:

$$\begin{aligned}(T_{\alpha,t}h, h)&=(e_{\alpha,t}(U_T)h, h)=\int_0^{2\pi} e_{\alpha,t}(e^{i\theta})\, d(E_{T,\theta}h, h)=\\
&=\int_0^{2\pi}\exp\left[-t\left(i\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\right)^\alpha\right]d(E_{T,\theta}h, h)=\\
&=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^\infty\exp\left[-\tau\left(i\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\right)\right]d\gamma_{\alpha,t}(\tau)\right\}d(E_{T,\theta}h, h)=\\
&=\int_0^\infty\left\{\int_0^{2\pi}\exp\left(-\tau\, i\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\right)d(E_{T,\theta}h, h)\right\}d\gamma_{\alpha,t}(\tau)=\\
&=\int_0^\infty (e_{1,\tau}(U_T)h, h)\, d\gamma_{\alpha,t}(\tau)=\int_0^\infty (T_\tau h, h)\, d\gamma_{\alpha,t}(\tau),\end{aligned}$$

l'inversion de l'ordre des intégrations étant permise parce que la mesure $d\gamma_{\alpha,t}(\tau)\cdot d(E_{T,\theta}h, h)$ (dans $0\leqq\tau<\infty, 0\leqq\theta\leqq 2\pi$) est finie et la fonction $\exp\left(-i\tau\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\right)$ est borélienne et bornée. Cela prouve (6. 10) et l'équivalence de notre définition de A^α aux autres, précédentes, dans le cas de l'espace de Hilbert.

25) Cette notation veut indiquer ici seulement que $\{T_{\alpha,t}\}$ est le semi-groupe dont la génératrice infinitésimale est égale à $-A^\alpha$.

L'analyticité de $\{T_{\alpha,t}\}$ dans un secteur a été démontrée par YOSIDA [20]; le fait que A^α et $A^{\alpha *}$ ont le même domaine $\mathfrak{D}_\alpha$ pour $0 \leqq \alpha < \frac{1}{2}$ et vérifient les inégalités du théorème 10, a été démontré (partiellement avec d'autres facteurs constants) par KATO [8], [9].

Notre méthode de traiter du problème des puissances fractionnaires a l'avantage de placer ce problème dans le cadre d'un calcul fonctionnel plus général et fournit même quelques résultats plus précis, comme par exemple les formules $A^{\alpha+\beta} = A^\alpha A^\beta$ et $(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}$ y compris l'égalité des domaines des transformations en question.

Ouvrages cités

[1] A. BEURLING, On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, *Acta Math.*, **81** (1949), 239–255.

[2] S. BOCHNER, Diffusion equations and stochastic processes, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **35** (1949), 368–370.

[3] L. CARLESON, On bounded analytic functions and closure problems, *Arkiv för Mat.*, **2** (1952), 283–291.

[4] P. FATOU, Séries trigonométriques et séries de Taylor, *Acta Math.*, **30** (1906), 335–400.

[5] C. FOIAŞ, On Hille's spectral theory and operational calculus for semi-groups of operators in Hilbert space, *Compositio Math.*, **14** (1959), 71–73.

[6] K. O. FRIEDRICHS, Symmetric positive linear differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **11** (1958), 333–418.

[7] T. KATO, Note on fractional powers of linear operators, *Proc. Japan Acad.*, **36** (1960), 94–96.

[8] ——— Fractional powers of dissipative operators, *J. Math. Soc. Japan*, **13** (1961), 246–274.

[9] ——— A generalization of the Heinz inequality (to be published).

[10] H. LANGER, Ein Zerspaltungssatz für Operatoren im Hilbertraum, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **12** (1961), 441–445.

[11] R. S. PHILLIPS, On the generation of semi-groups of linear operators, *Pacific J. Math.*, **2** (1952), 343–369.

[12] ——— Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **90** (1959), 193–254.

[13] F. RIESZ, Über die Randwerte einer analytischen Funktion, *Math. Zeitschr.*, **18** (1923), 87–95.

[14] G. SZEGŐ, Über die Randwerte einer analytischen Funktion, *Math. Ann.*, **84** (1921), 232–244.

[15] B. SZ.-NAGY, *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes* (Berlin, 1942).

[16] ——— Sur les contractions de l'espace de Hilbert. II, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 1–15.

[17] B. SZ.-NAGY et C. FOIAŞ, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. III, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 26–46.

[18] ——— Sur les contractions de l'espace de Hilbert. IV, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 251–259.

[19] A. E. TAYLOR, Spectral theory of closed distributive operators, *Acta Math.*, **84** (1951), 189–224.

[20] K. YOSIDA, Fractional powers of infinitesimal generators and the analyticity of the semi-groups generated by them, *Proc. Japan Acad.*, **36** (1960), 86–89.

(Reçu le 15 novembre 1961)