# Über die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen

Von N. ITÔ in Nagoya (Japan) und J. SZÉP in Budapest (Ungarn)

Der Begriff des Quasinormalteilers ist von O. ORE eingeführt worden. Er nennt eine Untergruppe $Q$ der Gruppe $G$ einen Quasinormalteiler, wenn $Q$ mit jeder Untergruppe von $G$ vertauschbar ist (nicht notwendig elementweise, sondern im Ganzen). Über die Quasinormalteiler sind schon viele Ergebnisse bekannt, z. B. die Gruppen, deren sämtliche Untergruppen Quasinormalteiler sind, sind wohlbekannt (IWASAWA). ORE hat bewiesen, daß jeder maximale Quasinormalteiler gleichzeitig ein Normalteiler in der gegebenen Gruppe ist. Von anderen speziellen Quasinormalteilern wissen wir aber wenig. Im folgenden werden wir einige ziemlich allgemeine Sätze für die Quasinormalteiler in endlichen Gruppen beweisen.

Satz 1. *Es sei $Q$ $(\neq 1, G)$ ein Quasinormalteiler, aber kein Normalteiler einer endlichen Gruppe $G$. Bezeichnet dann $N$ den maximalen Normalteiler von $G$ in $Q$, so gilt folgendes:*

a) *$Q/N$ $(\neq 1)$ ist nilpotent,*

b) *$G$ enthält zu jedem Primteiler $p$ der Ordnung von $Q/N$ einen Normalteiler vom Index $p$.*

Der Spezialfall $N=1$ dieses Satzes lautet folgendermaßen:

Satz 1'. *Enthält ein Quasinormalteiler $Q$ $(\neq 1, G)$ einer endlichen Gruppe $G$ keinen echten Normalteiler von $G$, so gilt folgendes:*

a) *$Q$ ist nilpotent,*

b) *$G$ enthält zu jedem Primteiler $p$ der Ordnung von $Q$ einen Normalteiler vom Index $p$.*

Zuerst beweisen wir Satz 1'.

Beweis der Behauptung 1'b). Wir dürfen annehmen, daß $G$ keine $p$-Gruppe ist.

Es sei die Ordnung von $G$ und $Q$ gleich $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ $(\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0)$ bzw. $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$, wobei $p_1, p_2, \dots, p_n$ verschiedene Primzahlen sind. Man kann leicht einsehen, daß $\beta_i < \alpha_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ gilt. Ist nämlich $\beta_i = \alpha_i$ für ein $i$ und bezeichnet $G(p_i)$ eine $p_i$-Sylowuntergruppe von $G$, so folgt aus $QG(p_i) = G(p_i)Q$ (mit Rücksicht auf die Ordnung von $G$) $G(p_i) \subseteqq Q$, also enthält $Q$ alle $p_i$-Sylowuntergruppen von $G$. In diesem Fall enthält $Q$ einen echten Normalteiler von $G$, was ein Widerspruch ist.

Es gilt also $\beta_i < \alpha_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Es sei $\beta_i > 0$ für ein festes $i$. Es sei weiterhin $G(p_k)$ eine $p_k$-Sylowuntergruppe von $G$ mit $k \neq i$. Wir betrachten die Untergruppe $K = QG(p_k)$ $(= G(p_k)Q)$, in welcher Gruppe die Gruppe $Q$ wieder ein Quasinormalteiler ist und jede $p_i$-Sylowuntergruppe $Q(p_i)$ von $Q$ eine Sylowuntergruppe ist. Man kann leicht (wie oben) einsehen, daß $Q$ sämtliche $p_i$-Sylowuntergruppen von $K$ enthält, also ist die durch die $p_i$-Sylowuntergruppen von $Q$ erzeugte Untergruppe $\overline{Q(p_i)}$ von $Q$ ein Normalteiler von $K$. Es ist klar, daß die Gruppe $\overline{(Qp_i)}$ von der Wahl von $G(p_k)$ unabhängig ist, also ist $\overline{Q(p_i)}$ $(\subseteqq Q)$ ein Normalteiler in den Untergruppen $QG(p_k)$ von $G$ $(k=1, 2, \ldots; k \neq i)$. Betrachten wir die durch die nicht zu $p_i$ gehörenden Sylowuntergruppen von $G$ erzeugte Untergruppe $G[p_i]$, die ein Normalteiler in $G$ ist. $\overline{Q(p_i)} \subseteqq Q$ ist (nach der Voraussetzung) kein Normalteiler in $G$, also ist $G[p_i] \subset G$ (sogar auch $QG[p_i] \subset G$). Es ist evident, daß die Faktorgruppe $G/G[p_i]$ eine $p_i$-Gruppe ist, also enthält die Gruppe $G$ einen Normalteiler vom Index $p_i$, w. z. b. w.

Korollar. *Die Ordnung jeder maximalen Untergruppe von $G$ ist durch jede Primzahl teilbar, die ein Teiler der Ordnung von $Q$ und zugleich ein mehrfacher Teiler der Ordnung von $G$ ist.*

Beweis. Würde nämlich die Ordnung der maximalen Untergruppe $M$ die Primzahl $p_i$ mit $\alpha_i > 1, \beta_i > 0$ nicht enthalten, so wäre $M$ eine echte Untergruppe des obigen Normalteilers von $G$ vom Index $p_i$.

Bemerkung 1. Ist $Q$ ein minimaler Quasinormalteiler in $G$ (man nennt einen Quasinormalteiler $Q$ von $G$ minimal, wenn es keinen anderen Quasinormalteiler $Q'$ mit $Q' \subset Q$ in $G$ gibt), der kein Normalteiler ist, so enthält $Q$ keinen Normalteiler von $G$, also bezieht sich die Behauptung b) insbesondere auf die minimalen Quasinormalteiler von $G$.

Bemerkung 2. Wir werden den folgenden Satz mehrmals benützen, der sich aus dem obigen Beweis der Behauptung 1′ b) ergibt:

Ist $\overline{Q(p_i)}$ die durch die $p_i$-Sylowuntergruppen von $Q$ erzeugte Untergruppe von $Q$, so enthält der Normalisator von $\overline{Q(p_i)}$ sämtliche Elemente von $G$, deren Ordnung eine zu $p_i$ prime Primzahlpotenz ist.

Beweis der Behauptung 1′a). Zuerst werden wir beweisen, daß $Q$ eine auflösbare Gruppe ist. Es sei $Q = Q^{(0)} \supseteqq Q^{(1)} \supseteqq \ldots$ die abgeleitete Reihe von $Q$. Es gibt eine kleinste Zahl $n$ mit $Q^{(n)} = Q^{(n+1)} = \ldots = R$. Es sei $P$ eine beliebige Sylowuntergruppe von $G$. Wir zeigen, daß $R$ ein Normalteiler in der Gruppe $PQ (= QP)$ ist. Es sei $S$ das Erzeugnis aller Sylowuntergruppen in $PQ$, die eine zur Ordnung von $P$ relativ prime Ordnungen haben. Es gilt $S \subseteqq Q$ (Bemerkung 2), und $S$ ist ein Normalteiler in $PQ$. Da die Faktorgruppe $PQ/S$ eine $p$-Gruppe ist, so ist $S \supseteqq R$, also ist $S^{(n)} = R$. Dann ist $R$ ein Normalteiler von $PQ$. Da $P$ beliebig ist, ist $R$ ein Normalteiler von $G$, also muß (wegen der Voraussetzung) $R = 1$ sein. Es ist also $Q$ eine auflösbare Gruppe.

Jetzt zeigen wir, daß $Q$ eine nilpotente Gruppe ist. Es sei $G[p]$ die durch die Elemente mit zu $p$ relativ primen Ordnungen erzeugte Untergruppe von $G(p)$ ist eine Primzahl in der Ordnung von $Q$). Es gilt $G[p] \subset G$, ferner ist $G[p]$ ein Normalteiler von $G$ (Beweis der Behauptung a)). Es sei $\overline{Q(p)}$ die in $Q$ durch die $p$-Sylowuntergruppen erzeugte Untergruppe. Wir werden zeigen, daß $\overline{Q(p)}$ eine $p$-Sylowuntergruppe von $Q$ ist. Da $p$ eine beliebige Primzahl der Ordnung von $Q$ ist, so wird hierdurch der Satz bewiesen. Nehmen wir an, daß $\overline{Q(p)}$ keine $p$-Sylowuntergruppe von $Q$ ist. Da $Q$ (also auch $\overline{Q(p)}$) auflösbar ist, gilt die Faktorisation $\overline{Q(p)} = HQ(p)$, $(|H|, |Q(p)|) = 1$ (nach dem bekannten Satz von P. HALL), wo $Q(p)$ eine $p$-Sylowuntergruppe von $Q$ ist. Der Normalisator von $\overline{Q(p)}$ enthält die Gruppe $G[p]$ (Bemerkung 2), also enthält $Q$ jede bezüglich $G[p]$ Konjugierte von $H$. Es gilt aber $xHx^{-1} \subset Q$ für jedes Element $x \in G$ mit $p$-Potenzordnung. Es sei nämlich $\overline{Q[p]}$ die durch die Elemente mit zu $p$ primer Ordnung erzeugte Untergruppe von $Q$. Der Normalisator von $\overline{Q[p]}$ enthält die $p$-Sylowuntergruppen von $G$ (Bemerkung 2). Da $\overline{Q[p]} \supseteqq H$ ist, so enthält $Q$ sämtliche Konjugierten von $H$ (in $G$). Dann hätte $Q$ einen echten Normalteiler von $G$, was ein Widerspruch ist. Damit ist der Satz 1′ bewiesen.

Korollar 1. *Jede Sylowuntergruppe von $Q$ ist ein Quasinormalteiler von $G$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen (nach der Bemerkung 2), daß für jede $p$-Untergruppe $Z$ von $G$ $ZQ(p) = Q(p)Z$ gilt. Dies folgt aus einem Satz von WIELANDT [1]).

Korollar 2. *Aus Korollar 1 folgt, daß jeder minimaler Quasinormalteiler von $G$ (der kein Normalteiler ist) eine $p$-Gruppe ist.*

Beweis des Satzes 1. Ist $N$ ein maximaler Normalteiler von $G$, der eine echte Untergruppe von $Q$ ist, so hat die Faktorgruppe $G/N$ den Quasinormalteiler $Q/N$, der wegen der Maximalität von $N$ keinen Normalteiler von $G/N$ enthält. Wenden wir jetzt Satz 1′ für die Gruppe $G/N$ mit dem Quasinormalteiler $Q/N$ an, so gewinnen wir die Behauptungen des Satzes 1.

Korollar. *Ist der Normalisator von $Q$ in $G$ auflösbar, so ist auch die Gruppe $G$ auflösbar.*

*(Eingegangen am 14. April 1960)*

---

[1]) H. WIELANDT, Über das Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen, *Math. Zeitschrift*, **55** (1951), 1—7, Satz 8.