Über die orthogonalen Funktionen. X (Unbedingte Konvergenz)

Von KÁROLY TANDORI in Szeged

Einleitung

W. ORLICZ[1] hat den folgenden Satz bewiesen:

Es sei $\{\lambda(n)\}$ eine positive, monoton wachsende Zahlenfolge, und wir nehmen an, daß sie eine Teilfolge $\{\lambda(n_k)\}$ besitzt, mit den Eigenschaften

$$\log n_{k+1} \leqq c \log n_k \qquad (c>0)$$

und

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n_k)} < \infty.$$

Unter der Bedingung

$$\sum a_n^2 \lambda(n) \log^2 n < \infty \tag{1}$$

ist dann die Reihe

$$\sum a_n \varphi_n(x) \tag{2}$$

für jedes orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ unbedingt, d.h. bei jeder Anordnung der Glieder, fast überall konvergent.

In dieser Arbeit werden wir u. a. diesen Satz weitgehend verschärfen[2]).

Wir übereinkommen, immer den Logarithmus mit der Basis 2 zu benutzen. Es wird zur Abkürzung $\nu_k = 2^{2^k}$ gesetzt.

Satz I. *Unter der Bedingung*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^2 \log^2 n \right]^{\frac{1}{2}} < \infty \tag{3}$$

ist die Reihe (2) *für jedes orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ unbedingt konvergent.*

---

[1]) W. ORLICZ, Zur Theorie der Orthogonalreihen, *Bulletin Intern. Acad. Sci. Polonaise Cracovie*, **1927**, 81–115.

[2]) Die Sätze I–III und VI wurden in weniger allgemeiner Form und ohne Beweis angekündigt in der Note: K. TANDORI: Sur la convergence inconditionnelle des séries orthogonales, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **253** (1961), 928–929.

S a t z II. *Es sei $\{a_n\}$ eine positive, monoton abnehmende Koeffizientenfolge. Ist*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^2 \log^2 n\right]^{\frac{1}{2}} = \infty, \tag{4}$$

so gibt es ein im Intervall [0, 1] *orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ derart, daß die Reihe*

$$\sum a_n \Phi_n(x) \tag{5}$$

nicht unbedingt konvergiert; genauer: sie divergiert in einer gewissen Anordnung ihrer Glieder in [0, 1] *fast überall.*

Für den Satz II werden wir zwei Beweise angeben; der erste bezieht sich auf den Fall $\sum \sqrt{\nu_k} a_{\nu_k} 2^k = \infty$, der zweite auf den allgemeinen Fall. Diese zwei Fälle können auch gemeinsam betrachtet werden, aber der Beweis ist im allgemeinen Fall viel komplizierter.

Aus den Sätzen I und II folgt unmittelbar der

S a t z III. *Es sei $\{|a_n|\}$ monoton abnehmend. Damit die Reihe* (2) *für jedes orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ unbedingt konvergiert, ist notwendig und hinreichend, daß die Bedingung* (3) *erfüllt sei.*

Der Satz I enthält also den Satz von W. ORLICZ.

Es kann leicht eingesehen werden, daß für monoton abnehmende, positive Folgen $\{|a_n|\}$ die Bedingung (3) mit

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^2 \log_+^2 \frac{1}{a_n^2}\right]^{\frac{1}{2}} < \infty$$

gleichwertig ist, wobei

$$\log_+ x = \begin{cases} \log x & \text{für } x \geqq 2, \\ 1 & \text{für } 0 < x < 2 \end{cases}$$

bedeutet.

Aus dieser Ungleichung folgt nämlich $\sum a_n^2 < \infty$. Wegen der Monotonie von $\{|a_n|\}$ gilt also $a_n^2 = o(n^{-1})$ und es besteht

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^2 \log^2 n\right]^{\frac{1}{2}} = O(1) \sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^2 \log_+^2 \frac{1}{a_n^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Es bezeichne J bzw. J' die Menge der Indizes n, für die $a_n^2 \geqq n^{-4}$ bzw. $a_n^2 < n^{-4}$ besteht. Dann gelten

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{\substack{\nu_k < n \leqq \nu_{k+1} \\ n \in J}} a_n^2 \log_+^2 \frac{1}{a_n^2}\right]^{\frac{1}{2}} = O(1) \sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^2 \log^2 n\right]^{\frac{1}{2}}$$

und

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{\substack{\nu_k < n \leqq \nu_{k+1} \\ n \in J'}} a_n^2 \log_+^2 \frac{1}{a_n^2}\right]^{\frac{1}{2}} = O(1) \sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} \frac{1}{n^2} |a_n| \log_+^2 \frac{1}{a_n^2}\right]^{\frac{1}{2}} = O(1) \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k^{-\frac{1}{2}} < \infty,$$

woraus auch

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^2 \log_+^2 \frac{1}{a_n^2}\right]^{\frac{1}{2}} = O(1) \sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^2 \log^2 n\right]^{\frac{1}{2}}$$

folgt.

Auf Grund dieser Sätze können auch die folgenden Behauptungen leicht eingesehen werden:

Satz IV. *Damit die Orthogonalreihe* (2) *für jedes orthonormierte System* $\{\varphi_n(x)\}$ *unbedingt konvergiert, ist hinreichend, daß für eine positive, monoton wachsende Zahlenfolge* $\{\lambda(n)\}$ *mit*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda(\nu_k)} < \infty \tag{6}$$

die Ungleichung (1) *erfüllt wird. Sind die Folgen* $\{a_n^2\}$ *und*

$$A_k = \left[\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^2 \log^2 n\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (k = 0, 1, \dots)$$

monoton abnehmend, so ist diese Bedingung auch notwendig.

Satz V. *Damit die Orthogonalreihe* (2) *mit nichtverschwindenden, nach* 0 *konvergierenden Koeffizienten für jedes orthonormierte System* $\{\varphi_n(x)\}$ *unbedingt konvergiert, ist hinreichend, daß für eine positive, monoton wachsende Funktion* $g(x)$ *mit*

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{g(x)} < \infty \tag{7}$$

die Ungleichung

$$\sum a_n^2\, g\left(\log\log \frac{1}{a_n^2}\right) \log^2 \frac{1}{a_n^2} < \infty \tag{8}$$

erfüllt wird. Sind die Folgen a_n^2 *und* $\{A_k\}$ *monoton abnehmend, so ist diese Bedingung auch notwendig.*

Diese Sätze sind Verschärfungen der Sätze von W. Orlicz[3]).

Beweis des Satzes IV. *Hinlänglichkeit* folgt leicht aus (1) und (6) mit Anwendung des Satzes I.

Notwendigkeit. Ist die Orthogonalreihe (2) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ unbedingt konvergent, so gilt (3) auf Grund des Satzes III. $A_k > 0$ ($k = 0, 1, \dots$) kann angenommen werden. Es sei $\lambda(n) = A_k^{-1}$ ($\nu_k < n \leqq \nu_{k+1}$; $k = 0, 1, \dots$) und $\lambda(n) = \lambda(3)$ für $n = 1, 2$. Diese Folge erfüllt die Bedingungen des Satzes IV und mit ihr besteht (1).

Damit haben wir den Satz IV bewiesen.

---

[3]) S. loc. cit. [1]).

B e w e i s d e s S a t z e s V. *Hinlänglichkeit.* Monotonität $a_n^2 \geqq a_{n+1}^2$ $(n=1, 2, \ldots)$ kann angenommen werden. Da aus (8) $\sum a_n^2 < \infty$ folgt, so ist $a_n^2 = o(n^{-1})$. Aus (8) ergibt sich

$$\sum a_n^2\, g(\log\log n) \log^2 n < \infty, \tag{9}$$

d. h. (1) ist mit $\lambda(n) = g(\log\log n)$ erfüllt; diese Folge $\{\lambda(n)\}$ ist positiv, monoton wachsend, und wegen (7) genügt sie der Ungleichung (6). Aus (9) folgt leicht die Ungleichung (3), welche dann die unbedingte Konvergenz der Orthogonalreihe (2) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ sichert.

Notwendigkeit. Ist die Orthogonalreihe (2) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ unbedingt konvergent, so gilt (3). Es sei $g(x) = \min\{k^2, A_k^{-1}\}$ $(k+2 < x \leqq \leqq k+3;\ k=0, 1, \ldots)$; diese Funktion ist positiv, monoton wachsend, und genügt den Bedingungen (7) und $g(x) \leqq x^2$. Aus (3) ergibt sich durch einfache Rechnung

$$\sum a_n^2\, g(\log\log n + 2) \log^2 n < \infty. \tag{10}$$

I bzw. I' bezeichne die Menge der Indizes n mit $a_n^2 \geqq n^{-4}$ bzw. $a_n^2 < n^{-4}$. Dann ist

$$\sum_{n\in I} a_n^2\, g\left(\log\log\frac{1}{a_n^2}\right)\log^2\frac{1}{a_n^2} = O(1) \sum a_n^2\, g(\log\log n^4) \log^2 n < \infty \tag{11}$$

und

$$\sum_{n\in I'} a_n^2\, g\left(\log\log\frac{1}{a_n^2}\right)\log^2\frac{1}{a_n^2} \leqq \sum \frac{1}{n^2}|a_n|\left(\log\log\frac{1}{a_n^2}\right)^2 \log^2\frac{1}{a_n^2} = \tag{12}$$
$$= O(1)\sum n^{-2} < \infty.$$

Aus (11) und (12) folgt (8) auf Grund von (10).

Damit ist Satz V bewiesen.

Durch Anwendung des Satzes II können auch die folgenden Behauptungen leicht bewiesen werden.

S a t z VI. *Es sei $\{\bar\lambda(n)\}$ eine positive, monoton wachsende Zahlenfolge mit*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\bar\lambda(\nu_k)} = \infty. \tag{13}$$

Dann gibt es eine Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ und ein in [0, 1] *orthonormiertes System $\{\Phi_n(x)\}$ derart, daß die Bedingung*

$$\sum a_n^2 \bar\lambda^2(n) \log^2 n < \infty \tag{14}$$

erfüllt wird, jedoch die Orthogonalreihe (5) *nicht unbedingt konvergiert.*

S a t z VII. *Es sei $\bar g(x)$ eine positive, monoton wachsende Funktion mit*

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\bar g(x)} = \infty. \tag{15}$$

Dann gibt es eine positive, monoton nach 0 strebende Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ und ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System $\{\Phi_n(x)\}$ derart, daß die Bedingung

$$\sum a_n^2 \; \bar{g}\left(\log\log\frac{1}{a_n^2}\right)\log^2\frac{1}{a_n^2}<\infty \tag{16}$$

erfüllt ist, jedoch die Orthogonalreihe (5) *nicht unbedingt konvergiert.*

Der Satz VI bzw. VII gibt eine Antwort auf ein Problem von G. ALEXITS[4]) und N. N. WOLKOW—P. L. ULJANOW[5]) bzw. G. ALEXITS[6]).

B e w e i s d e s S a t z e s VI. Wegen (13) ergibt sich durch Anwendung eines bekannten Satzes die Existenz einer positiven, monoton wachsenden Folge $\{\mu(k)\}$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu(k)}<\infty \tag{17}$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\bar{\lambda}(\nu_k)\,\mu(k)}}=\infty. \tag{18}$$

Es sei

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{(\nu_{k+1}-\nu_k)\bar{\lambda}(\nu_{k+1})\,\mu(k+1)2^{k+1}}}\qquad(\nu_k<n\leqq\nu_{k+1};\ k=0,1,\ldots)$$

bzw. $a_n=a_3$ für $n=1, 2$. Aus (18) ergibt sich (4) leicht und durch Anwendung des Satzes II folgt die Existenz eines in $[0, 1]$ orthonormierten Systems $\{\Phi_n(x)\}$ derart, daß die Orthogonalreihe (5) nicht unbedingt konvergiert. Aus (17) erhält man ferner, daß (14) besteht.

Damit ist Satz VI bewiesen.

B e w e i s d e s S a t z e s VII. Auf Grund von (15) kann leicht eine positive, monoton wachsende Funktion $\bar{\bar{g}}(x)$ mit $\bar{\bar{g}}(x)\geqq\bar{g}(x)$ und

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\bar{\bar{g}}(x)}=\infty \tag{19}$$

angegeben werden, für die die Bedingung $\bar{\bar{g}}(x)\leqq 2\bar{\bar{g}}(k)$ $(k\leqq x\leqq k+\frac{1}{2};\ k=1, 2, \ldots)$ erfüllt ist. Bezeichnen wir mit $k_1<\ldots<k_i<\ldots$ sämtliche natürliche Zahlen mit $\bar{\bar{g}}(k_i)\leqq k_i^2$ $(i=1, 2, \ldots)$. Wegen (19) gilt

$$\sum\frac{1}{\bar{\bar{g}}(k_i)}=\infty,$$

---

[4]) G. ALEXITS, *Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen* (Budapest, 1960), 100.

[5]) И. И. ВОЛКОВ—П. Л. УЛЯНОВ, Обзорная статя, Anhang zur russischen Ausgabe des Buches: R. G. COOKE, *Infinite matrices and sequence spaces* (Moskau, 1960), 452—453.

[6]) S. loc. cit. [4]).

woraus die Existenz einer positiven, monoton wachsenden Folge $\{\varkappa(i)\}$ mit

$$\sum \frac{1}{\varkappa(i)} < \infty \quad \text{und} \quad \sum \frac{1}{\sqrt{\bar{\bar{g}}(k_i)\,\varkappa(i)}} = \infty$$

folgt. Es sei $\bar{\varkappa}(i) = \min(i^3, \varkappa(i))$; diese Folge ist positiv, monoton wachsend, weiterhin gelten die Beziehungen

$$(20)\quad \sum \frac{1}{\bar{\varkappa}(i)} < \infty \qquad \text{und} \qquad (21)\quad \sum \frac{1}{\sqrt{\bar{\bar{g}}(k_i)\,\bar{\varkappa}(i)}} = \infty.$$

Es sei

$$a_n = [(\nu_{k_{i+1}} - \nu_{k_i})\bar{\bar{g}}(k_{i+1})\bar{\varkappa}(i+1)]^{-\frac{1}{2}} 2^{-k_{i+1}} \qquad (\nu_{k_i} < n \leqq \nu_{k_{i+1}};\ i = 1, 2, \ldots)$$

bzw. $a_n = a_{\nu_{k_1}} + 1$ $(n = 1, \ldots, \nu_{k_1})$. Dann ist wegen (21)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^2 \log^2 n\right]^{\frac{1}{2}} \geqq \sum_{i=1}^{\infty}\left[\sum_{n=\nu_{k_i}+1}^{\nu_{k_{i+1}}} a_n^2 \log^2 n\right]^{\frac{1}{2}} \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{\infty}\left[\log^2 \nu_{k_{i+1}} \sum_{n=2^{-1}\nu_{k_i+1}}^{\nu_{k_{i+1}}} a_n^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\bar{\bar{g}}(k_{i+1})\,\bar{\varkappa}(i+1)}} = \infty.$$

Daraus ergibt sich auf Grund des Satzes II die Existenz eines in [0, 1] orthonormierten Systems $\{\Phi_n(x)\}$ derart, daß die Orthogonalreihe (5) nicht unbedingt konvergiert. Da infolge unserer Annahme über $\bar{\varkappa}(i)$ und $\bar{\bar{g}}(x)$ für genügend große i

$$\log\log\frac{1}{a_n^2} \leqq k_{i+1} + \frac{1}{2} \qquad (\nu_{k_i} < n \leqq \nu_{k_{i+1}})$$

ist, so gilt auf Grund von (20)

$$\sum a_n^2 \bar{g}\left(\log\log\frac{1}{a_n^2}\right)\log^2\frac{1}{a_n^2} = O(1)\sum\frac{1}{\bar{\varkappa}(i)} < \infty,$$

d. h. (16) ist erfüllt.

Damit haben wir den Satz VII bewiesen.

Es sei z. B.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\nu_{k+1} - \nu_k}\, 2^{k+1}(k+1)} \qquad (\nu_k < n \leqq \nu_{k+1};\ k = 0, 1, \ldots)$$

und $a_n = a_3$ $(n = 1, 2)$. Es besteht offensichtlich (4) und

$$(22)\qquad \sum' a_n^2 \log^2 n < \infty.$$

Aus Satz II ergibt sich die Existenz eines in [0, 1] orthonormierten Systems $\{\Phi_n(x)\}$ derart, daß die Reihe (5) nicht unbedingt konvergiert. Es sei $\{m_k\}$ eine beliebige, im strengen Sinne monoton wachsende Indexfolge. Aus (22) folgt

$$\sum a_{m_k}^2 \log^2 k < \infty.$$

Aus dem wohlbekannten Satz von D. MENCHOFF[7]) und H. RADEMACHER[8]) ergibt sich daraus, daß die Reihe

$$\sum a_{n_k}\Phi_{n_k}(x)$$

fast überall konvergiert. Damit haben wir die folgende Behauptung bewiesen:

Satz VIII. *Es gibt eine Orthogonalreihe* $\sum a_n\varphi_n(x)$, *mit* $\sum a_n^2 \log^2 n < \infty$, *deren jede Teilreihe fast überall konvergiert, die selbst jedoch nicht unbedingt konvergiert.*

Ein ähnliches Resultat für gleichmäßig beschränkte orthonormierte Systeme, aber ohne Bedingung (22), hat das erste Mal – auf einem anderen Weg – P. L. ULJANOW[9]) erhalten.

Wir werden noch zwei Sätze beweisen:

Satz IX. *Es sei* $\{\lambda(n)\}$ *eine positive, monoton wachsende Zahlenfolge mit* (6) *und* $\{|a_{n_m}|\}$ *bezeichne die in abnehmende Anordnung gestellte Folge der absoluten Werte der nicht-verschwindenden Koeffizienten von* (2). *Ist*

$$(2>)\alpha_m \geqq \frac{4\log\log m + 2\log\lambda(m)}{\log m} \qquad (m \geqq m_0), \tag{23}$$

so folgt aus

$$\sum |a_{n_m}|^{2-\alpha_m} < \infty \tag{24}$$

die unbedingte Konvergenz der Orthogonalreihe (2) *für jedes orthonormierte System* $\{\varphi_n(x)\}$.

Satz X. *Es sei* $\bar\lambda(n) = \log\log n$. *Dann gibt es eine Orthogonalreihe* (5) *mit positiven, monoton nichtwachsenden Koeffizienten derart, daß sie nicht unbedingt konvergiert, jedoch*

$$\sum a_n^{2-\bar\alpha_n} < \infty$$

mit

$$\bar\alpha_n = \frac{4\log\log n + 2\log\bar\lambda(n)}{\log n} \qquad (n \geqq n_0)$$

besteht.

Satz IX ist die Verschärfung eines Satzes von G. ALEXITS[10]) und Satz X zeigt, daß die Behauptung des Satzes IX ohne die Bedingung (6) im allgemeinen nicht richtig ist. Der Satz X, der wahrscheinlich sogar für eine beliebige positive, monoton wachsende und die Bedingung (6) nicht erfüllende Folge $\{\lambda(n)\}$ gilt, gibt eine negative Antwort auf ein Problem von G. ALEXITS[11]), ob (24) mit $\alpha_m = \dfrac{4\log\log m}{\log m}$ hinreicht, damit die Orthogonalreihe (2) für jedes orthonormierte System unbedingt konvergiert.

---

[7]) D. MENCHOFF, Sur les séries de fonctions orthogonales (Première partie). *Fundamenta Math.*, **4** (1923), 82–105.

[8]) H. RADEMACHER, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen*, **87** (1922), 112–138.

[9]) П. Л. Ульянов, Расходящиеся ряды Фурье класса L^p ($p \geqq 2$). Доклады акад. наук СССР, **137** (1961), 786–789.

[10]) S. loc. cit. [4]), 97–98.

[11]) S. loc. cit. [4]), 100.

Beweis des Satzes IX. Wegen (24) ist

$$\sum a_{n_m}^2 < \infty.$$

Daraus folgt auf Grund der Monotonie von $\{a_{n_m}^2\}$ für alle genügend große Indizes m

$$\log \frac{1}{a_{n_m}^2} \geqq \log m.$$

Durch einfache Rechnung mithin ergibt sich aus (23)

$$\alpha_m \geqq \frac{4 \log \log m + 2 \log \lambda(m)}{\log \frac{1}{a_{n_m}^2}},$$

also

$$|a_{n_m}|^{-\alpha_m} \geqq \lambda(m) \log^2 m$$

für genügend große m. Daraus und aus (24) folgt

$$\sum a_{n_m}^2 \lambda(m) \log^2 m < \infty.$$

Auf Grund von (6) ergibt sich mit Anwendung des Satzes IV die Behauptung des Satzes IX.

Beweis des Satzes X. Es sei z. B.

$$a_n = \left(n (\log n)^{3+8\frac{\log\log n}{\log n}} (\log \log n)^{2+4\frac{\log\log n}{\log n}}\right)^{-\frac{1}{2}} (\log \log \log n)^{-1} \qquad (n \geqq N)$$

bzw. $a_n = a_N$ $(n=1, \ldots, N-1)$, wo N so gewählt ist, daß diese Folge $\{a_n\}$ monoton abnehmend ausfällt. Eine einfache Rechnung ergibt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^2 \log^2 n\right]^{\frac{1}{2}} \geqq c_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\log(k+1)} \left(2^{2k+2}(k+1)\right)^{-2 2^{-k}(k+1)} \geqq$$

$$\geqq c_2 \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l \log l} = \infty.$$

Aus Satz II ergibt sich die Existenz eines in $[0, 1]$ orthonormierten Systems $\{\Phi_n(x)\}$ derart, daß die Orthogonalreihe (5) nicht unbedingt konvergiert. Für genügend große n gilt aber

$$\log a_n^{-\bar{\alpha}_n} = \frac{\bar{\alpha}_n}{2} \log \frac{1}{a_n^2} =$$

$$= \frac{2 \log \log n + \log \bar{\lambda}(n)}{\log n} \left(\log n + \left(3 + 8 \frac{\log \log n}{\log n}\right) \log \log n + \right.$$

$$\left. + \left(2 + 4 \frac{\log \log n}{\log n}\right) \log \log \log n + 2 \log \log \log \log n\right) \leqq$$

$$\leqq \log \left((\log n)^2 \log \log n\right) \cdot \left(1 + 4 \frac{\log \log n}{\log n}\right)$$

und somit

$$a_n^{-\bar{\alpha}_n} \leqq (\log n)^{2+8\frac{\log\log n}{\log n}} (\log\log n)^{1+4\frac{\log\log n}{\log n}}.$$

Nach der Definition von a_n ergibt sich daraus

$$\sum a_n^{2-\bar{\alpha}_n} = \sum \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)(\log\log\log n)^2} < \infty.$$

Damit ist Satz X bewiesen.

Es bleibt die Frage übrig, ob die Behauptung des Satzes II auch mit einem gleichmäßig beschränkten orthonormierten Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ richtig ist.

§ 1. Beweis des Satzes I

Zum Beweis des Satzes I brauchen wir die Grundidee von W. ORLICZ anzuwenden. Es sei

$$(1.1) \qquad \sum a_{n_l}\varphi_{n_l}(x)$$

eine beliebige Anordnung der Reihe (2). Für eine natürliche Zahl k besteht

$$\nu_k < n_l \leqq \nu_{k+1}$$

für $\nu_{k+1}-\nu_k$ verschiedene Indizes l, diese seien der Reihe nach $l(1,k)<l(2,k)<\dots$ $\dots<l(\nu_{k+1}-\nu_k, k)$. Nach einem bekannten Satz[12]) gibt es für jedes k eine positive Funktion $\delta_k(x)$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$(1.2) \qquad \left|\sum_{i=p}^{q} a_{n_{l(i,k)}}\varphi_{n_{l(i,k)}}(x)\right| \leqq \delta_k(x) \qquad (1 \leqq p < q \leqq \nu_{k+1}-\nu_k)$$

in $[a, b]$ und

$$(1.3) \qquad \int_a^b \delta_k^2(x)\,dx \leqq A(2^{k+1})^2 \sum_{i=1}^{\nu_{k+1}-\nu_k} a^2_{n_{l(i,k)}} \leqq 4A \sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^2 \log^2 n,$$

wo A eine von k und $\{\varphi_n(x)\}$ unabhängige, positive Konstante ist. Aus (3) und (1. 3) folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \delta_k(x)\,dx \leqq (b-a)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_a^b \delta_k^2(x)\,dx\right]^{\frac{1}{2}} \leqq$$

$$\leqq 2(A(b-a))^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^2 \log^2 n\right]^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

---

[12]) S. z. B. loc. cit. [7]) und [8]).

Daraus ergibt sich durch Anwendung des Satzes von B. LEVI

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k(x) < \infty \tag{1.4}$$

fast überall in $[a, b]$. Es sei x ein Punkt, wo (1. 4) erfüllt ist und ε eine beliebige positive Zahl. Dann gibt es einen Index N derart, daß

$$\sum_{k=N}^{\infty} \delta_k(x) < \varepsilon \tag{1.5}$$

ist. Wir wählen nun einen Index M so, daß $n_l > \nu_N$ für $l > M$ erfüllt ist. Für $M < p < q$ erhalten wir dann aus (1. 2) und (1. 5):

$$\left| \sum_{l=p}^{q} a_{n_l} \varphi_{n_l}(x) \right| \leqq \sum_{k=N}^{\infty} \delta_k(x) < \varepsilon.$$

Die Reihe (1. 1) ist also im Punkt x konvergent.

Damit haben wir den Satz I bewiesen.

§ 2. Hilfssätze für den Beweis des Satzes II im Falle $\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\nu_k} a_{\nu_k} 2^k = \infty$

Hilfsatz I. *Es sei $p(\geqq 8)$ eine gerade Zahl. Es läßt sich ein im Intervall $[0, 5]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen*[13]) *$g_l(p; x)$ $(l = 1, \dots, 2p)$ mit folgenden Eigenschaften angeben: Zu jedem Intervall $\delta_k^{(p)} = ((k-1)p^{-1}, kp^{-1})$ $(k = 3.2^{-1}p + 1, \dots, 5.2^{-1}p)$ gibt es von k abhängige natürliche Zahlen $m_1(k)$ bzw. $m_2(k)$ derart, daß die Funktionswerte $g_{2l+1}(p; x)$ $(l = 0, \dots, m_1(k))$ für $x \in \delta_k^{(p)}$ positiv bzw. die Funktionswerte $g_{2l}(p; x)$ $(l = m_2(k), \dots, p)$ für $x \in \delta_k^{(p)}$ negativ sind und*

$$\sum_{l=0}^{m_1(k)} g_{2l+1}(p; x) \geqq B\sqrt{p} \log p \tag{2.1}$$

bzw.

$$\sum_{l=m_2(k)}^{p} g_{2l}(p; x) \leqq -B\sqrt{p} \log p \tag{2.2}$$

gilt, wo A eine von k und p unabhängige, positive Konstante bedeutet. Weiterhin ist jede Funktion $g_l(p; x)$ in jedem Intervall $\delta_k^{(p)}$ konstant.

Dieser Hilfssatz ist eine Verfeinerung eines Satzes von D. MENCHOFF[14]), dessen Beweis von S. KACZMARZ[15]) vereinfacht wurde.

[13]) Eine Funktion in (a, b) heißt eine Treppenfunktion, wenn (a, b) in endlichviele Teilintervalle zerlegt werden kann, derart, daß die Funktion in jedem Teilintervall konstant ist.

[14]) S. z. B. loc. cit. [7]).

[15]) S. KACZMARZ, Notes on orthogonal series. II, *Studia Math.*, 5 (1934), 103—106.

B e w e i s d e s H i l f s s a t z e s I. Es sei

$$\bar{g}_l(p;x)=\frac{1}{k-p-l-1/2} \quad \text{für} \quad x\in\left[\frac{k-1}{p},\frac{k}{p}\right) \qquad (k=1,\dots,4p;\ l=1,\dots,2p).$$

Dann ist

$$\int_0^4 \bar{g}_l^2(p;x)\,dx=\sum_{k=1}^{4p}\frac{1}{(k-p-l-1/2)^2}\,\frac{1}{p},$$

woraus

$$\int_0^4 \bar{g}_l^2(p;x)\,dx\leqq\frac{A_1}{p} \qquad (l=1,\dots,2p) \tag{2.3}$$

folgt, wo A eine von p unabhängige positive Zahl ist.

Ferner erhalten wir durch einfache Rechnung für $i>j$:

$$\alpha_{i,j}=\int_0^4 \bar{g}_i(p;x)\bar{g}_j(p;x)\,dx=\frac{1}{p(i-j)}\left(\sum_{k=1-p-i}^{3p-i}\frac{1}{k-1/2}-\sum_{k=1-p-j}^{3p-j}\frac{1}{k-1/2}\right);$$

somit ist

$$|\alpha_{i,j}|\leqq\frac{2}{p^2} \qquad (i\neq j). \tag{2.4}$$

Um von den im Intervall $[0,4)$ auf diese Weise definierten Funktionen $\bar{g}_l(p;x)$ ein im Intervall $[0,5]$ orthogonales Funktionensystem zu erhalten, erweitern wir diese Funktionen auf das Intervall $[4,5]$ wie folgt: Wir teilen das Intervall $[4,5]$ in $N=2p(2p-1)$ Teilintervalle gleicher Länge $I_{i,j}$ ein $(1\leqq i\leqq 2p,\ 1\leqq j\leqq 2p,\ i\neq j)$. Es sei für $l=1,\dots,2p$

$$\bar{g}_l(p;x)=\begin{cases}\left[\frac{1}{2}N|\alpha_{l,j}|\right]^{\frac{1}{2}} & \text{für} \quad x\in I_{l,j},\\ -\left[\frac{1}{2}N|\alpha_{l,j}|\right]^{\frac{1}{2}}\operatorname{sign}\alpha_{l,j} & \text{für} \quad x\in I_{j,l},\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Die so definierten Treppenfunktionen $\bar{g}_l(p;x)$ bilden offensichtlich ein orthogonales System im Intervall $[0,5]$, ferner ist

$$\int_0^5 \bar{g}_l^2(p;x)\,dx=\int_0^4 \bar{g}_l^2(p;x)\,dx+\sum_{n=1}^{l-1}|\alpha_{l,n}|+\sum_{n=l+1}^{2p}|\alpha_{l,n}|.$$

Hieraus folgt auf Grund von (2.3) und (2. 4)

$$\int_0^5 \bar{g}_l^2(p;\,x)\,dx \leqq \frac{A_2}{p} \qquad (l=1,\,\ldots,\,2p), \tag{2. 5}$$

wo A_2 eine von p unabhängige positive Zahl ist.

Ist $x\in\delta_k^{(p)}$ $(3.2^{-1}p<k\leqq 5.2^{-1}p)$, so bezeichne $m_1(k)$ die größte natürliche Zahl, für die $2m_1(k)+1\leqq k-p-1$, und $m_2(k)$ die kleinste natürliche Zahl, für die $k-p\leqq 2m_2(k)$ besteht. Nach der Definition von $\bar{g}_l(p;\,x)$ sind die Funktionswerte $\bar{g}_{2l+1}(p;\,x)$ $(l=0,\,\ldots,\,m_1(k))$ positiv bzw. die Funktionswerte $\bar{g}_{2l}(p;\,x)$ $(l=m_2(k),\,\ldots,\,p)$ negativ und es gilt

$$\sum_{l=0}^{m_1(k)} \bar{g}_{2l+1}(p;\,x) = \sum_{l=0}^{m_1(k)} \frac{1}{k-p-2l-1-1/2} \geqq \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m_1(k)}\frac{1}{l} \geqq A_3\log p$$

bzw.

$$\sum_{l=m_2(k)}^{p} \bar{g}_{2l}(p;\,x) = \sum_{l=m_2(k)}^{p} \frac{1}{k-p-2l-1/2} \leqq -\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{p-m_2(k)}\frac{1}{l} \leqq -A_3\log p,$$

wo A_3 eine von p und k unabhängige, positive Konstante bedeutet. Für die normierten Funktionen

$$g_l(p;\,x)=\bar{g}_l(p;\,x)\left\{\int_0^5 \bar{g}_l^2(p;\,x)\,dx\right\}^{-\frac{1}{2}} \qquad (l=1,\,\ldots,\,2p)$$

ergeben sich dann auf Grund von (2. 5) die Ungleichungen (2. 1) und (2. 2).

Damit ist der Hilfssatz I bewiesen.

H i l f s s a t z II. *Es sei $p(>8)$ eine gerade Zahl und ε eine positive Zahl. Es kann ein im Intervall $[-1-\varepsilon,\,1+\varepsilon]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $f_l(p,\,\varepsilon;\,x)$ $(l=1,\,\ldots,\,2p)$ mit folgenden Eigenschaften angegeben werden: Es gilt*

$$\int_{-1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} f_l(p,\,\varepsilon;\,x)\,dx=0 \qquad (l=1,\,\ldots,\,2p); \tag{2. 6}$$

zu jedem Intervall $\Delta_k^{(p)}=((k-1)p^{-1},\,kp^{-1})$ $(0<k\leqq p)$ gibt es eine von k abhängige natürliche Zahl $\mu_1(k)$ derart, daß die Funktionswerte $f_{2l+1}(p,\,\varepsilon;\,x)$ $(l=0,\,\ldots,\,\mu_1(k))$ für $x\in\Delta_k^{(p)}$ positiv sind und

$$\sum_{l=0}^{\mu_1(k)} f_{2l+1}(p,\,\varepsilon;\,x)\geqq 2C\sqrt{p}\log p \tag{2. 7}$$

besteht, bzw. zu jedem $\Delta_k^{(p)}=((k-1)p^{-1},\,kp^{-1})$ $(-p<k\leqq 0)$ gibt es eine von k abhängige natürliche Zahl $\mu_2(k)$ derart, daß die Funktionswerte $f_{2l}(p,\,\varepsilon;\,x)$ $(l=\mu_2(k),\,\ldots,\,p)$ für $x\in\Delta_k^{(p)}$ positiv sind und

$$\sum_{l=\mu_2(k)}^{p} f_{2l}(p,\,\varepsilon;\,x)\geqq 2C\sqrt{p}\log p \tag{2. 8}$$

besteht, wo C eine von k, p und ε unabhängige positive Konstante bedeutet. Weiterhin ist jede Funktion $f_l(p, \varepsilon; x)$ in jedem $\Delta_k^{(p)}$ konstant.

Beweis des Hilfssatzes II. Es sei, für $l = 1, \ldots, 2p$,

$$f_l(p, \varepsilon; x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} g_l\left(p; x + \dfrac{3}{2}\right) & \text{für } 0 \leqq x \leqq 1, \\ \sqrt{\dfrac{3}{2\varepsilon}} g_l\left(p; \dfrac{3}{\varepsilon}(x-1)\right) & \text{für } 1 < x \leqq 1 + \dfrac{\varepsilon}{2}, \\ \sqrt{\dfrac{5}{2\varepsilon}} g_l\left(p; \dfrac{5}{\varepsilon}(x-1)\right) & \text{für } 1 + \dfrac{\varepsilon}{2} < x \leqq 1 + \varepsilon, \end{cases}$$

wo die $g_l(p; x)$ die im Hilfssatz I erwähnten Funktionen sind; für $-1-\varepsilon \leqq x < 0$ wird $f_l(p, \varepsilon; x) = -f(p, \varepsilon; -x)$ gesetzt.

Offensichtlich sind die Funktionen $f_l(p, \varepsilon; x)$ Treppenfunktionen. Durch einfache Rechnung kann eingesehen werden, daß sie in $[-1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ ein orthonormiertes System bilden und (2. 6) erfüllt ist.

Ist $x \in \Delta_k^{(p)}$ $(0 < k \leqq p)$, so ist $x + 2^{-1}3 \in \delta^{(p)}_{2^{-1}3p+k}$; auf Grund der Definition der Funktionen $f_l(p, \varepsilon; x)$ und (2. 1) ergibt sich daher

$$\sum_{l=0}^{m_1(2^{-1}3p+k)} f_{2l+1}(p, \varepsilon; x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l=0}^{m_1(2^{-1}3p+k)} g_{2l+1}(p; x + 2^{-1}3) \geqq \frac{1}{\sqrt{2}} B\sqrt{p}\log p$$

mit positiven Funktionswerten $f_{2l+1}(p, \varepsilon; x)$ $(l = 0, \ldots, m_1(2^{-1}3p+k))$; also besteht die Abschätzung (2. 7) mit $\mu_1(k) = m_1(2^{-1}3p+k)$ und $2C = B/\sqrt{2}$. Ist aber $x \in \Delta_k^{(p)}$ $(-p < k \leqq 0)$, so ist $-x \in \Delta_{-k+1}^{(p)}$, also gilt $-x + 2^{-1} \cdot 3 \in \delta^{(p)}_{2^{-1}3p-k+1}$. Auf Grund der Definition der Funktionen $f_l(p, \varepsilon; x)$ und (2. 2) ergibt sich mithin

$$\sum_{l=m_2(2^{-1}3p-k+1)}^{p} f_{2l}(p, \varepsilon; x) = -\sum_{l=m_2(2^{-1}3p-k+1)}^{p} f_{2l}(p, \varepsilon; -x) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l=m_2(2^{-1}3p-k+1)}^{p} g_{2l}(p; -x + 2^{-1}3) \geqq \frac{B}{\sqrt{2}}\sqrt{p}\log p$$

mit positiven Funktionswerten $f_{2l}(p, \varepsilon; x)$ $(l = m_2(2^{-1}3p-k+1), \ldots, p)$; also besteht die Abschätzung (2. 8) mit $\mu_2(k) = m_2(2^{-1}3p-k+1)$ und $2C = B/\sqrt{2}$.

Damit ist der Hilfssatz II bewiesen.

Es sei $I = [u, v]$ ein endliches Intervall. Wir setzen

$$f_l(p, \varepsilon; I; x) = \begin{cases} f_l\left(p, \varepsilon; 2\dfrac{1+\varepsilon}{v-u}x - (1+\varepsilon)\dfrac{v+u}{v-u}\right) & \text{für } u < x < v, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(l = 1, \ldots, 2p)$. Ist H eine Teilmenge von $[-1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$, so wird mit $H(I)$ das durch die Transformation $x = \dfrac{v-u}{2(1+\varepsilon)}y + \dfrac{v+u}{2}$ entstehende Bild von H in $[u, v]$ bezeichnet.

Offensichtlich gelten

$$\text{(2.9)} \qquad \operatorname{mes}(\Delta_k^{(p)}(I)) = \frac{\operatorname{mes}(I)}{2(1+\varepsilon)} \operatorname{mes}(\Delta_k^{(p)}).^{16)}$$

und

$$\text{(2.10)} \qquad \int_u^v f_i(p, \varepsilon, I; x) f_j(p, \varepsilon, I; x)\, dx = \frac{\operatorname{mes}(I)}{2(1+\varepsilon)} \int_{-1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} f_i(p, \varepsilon; x) f_j(p, \varepsilon; x)\, dx.$$

Aus (2. 6) ergibt sich

$$\text{(2.11)} \qquad \int_u^v f_l(p, \varepsilon, I; x)\, dx = 0 \qquad (l = 1, \dots, 2p),$$

während aus (2. 7) folgt, daß es eine von k abhängige natürliche Zahl $\mu_1(k)$ gibt, für die

$$\text{(2.12)} \qquad \sum_{l=0}^{\mu_1(k)} f_{2l+1}(p, \varepsilon, I; x) \geqq 2C\sqrt{p}\log p \qquad (x \in \Delta_k^{(p)}(I);\ 0 < k \leqq p)$$

mit positiven Funktionswerten $f_{2l+1}(p, \varepsilon, I; x)$ $(l = 0, \dots, \mu_1(k))$ besteht. Weiterhin folgt aus (2. 8), daß es eine von k abhängige natürliche Zahl $\mu_2(k)$ gibt, für die

$$\text{(2.13)} \qquad \sum_{l=\mu_2(k)}^{p} f_{2l}(p, \varepsilon, I; x) \geqq 2C\sqrt{p}\log p \qquad (x \in \Delta_k^{(p)}(I);\ -p < k \leqq 0)$$

mit positiven Funktionswerten $f_{2l}(p, \varepsilon, I; x)$ $(l = \mu_2(k), \dots, p)$ besteht. Ferner ist jede Funktion $f_l(p, \varepsilon, I; x)$ in jedem $\Delta_k^{(p)}(I)$ konstant.

Hilfssatz III. *Es seien $N(\geqq 3)$ und $a(\geqq 1)$ natürliche Zahlen, weiterhin sei $\{c_n\}$ $(\nu_N < n \leqq \nu_{N+a})$ eine positive, monoton abnehmende Zahlenfolge. Man kann ein im Intervall* $[0, 1]$ *orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\varphi_n(N, a; x) = \varphi_n(a; x)$ $(\nu_N < n \leqq \nu_{N+a})$ mit folgenden Eigenschaften angeben:*

Es gilt

$$\text{(2.14)} \qquad \int_0^1 \varphi_n(a; x)\, dx = 0 \qquad (\nu_N < n \leqq \nu_{N+a});$$

es gibt $\nu_{N+a} - \nu_{N+a-1}$ paarweise disjunkte Intervalle $I_i(a)$ $(\subseteqq [0, 1])$ gleicher Länge mit

$$\text{(2.15)} \qquad \sum_{i=1}^{\nu_{N+a}-\nu_{N+a-1}} \operatorname{mes}(I_i(a)) > \frac{1}{2};$$

es gibt ferner eine Anordnung

$$\sum_{l=1}^{\nu_{N+a}-\nu_N} c_{n(a,l)} \varphi_{n(a,l)}(a; x)$$

[16]) $\operatorname{mes}(H)$ bezeichnet das Lebesguesche Maß der Menge H.

der Summe

$$\sum_{n=\nu_N+1}^{\nu_N+a} c_n \varphi_n(a;\, x)$$

derart, daß für jedes i Indizes $l_1(a, i)$, $l_2(a, i)$ *existieren, so daß die Funktionswerte* $\varphi_{n(a,l)}(a;\, x)$ $(l_1(a, i) \leqq l \leqq l_2(a, i))$ *nicht-negativ sind, und*

$$(2.16)\qquad \sum_{l=l_1(a,i)}^{l_2(a,i)} c_{n(a,l)} \varphi_{n(a,l)}(a;\, x) \geqq C \sum_{r=1}^{a} \sqrt{\nu_{N+r} - \nu_{N+r-1}}\, c_{\nu_{N+r}} \log \nu_{N+r-1} \qquad (x \in I_i(a))$$

besteht. Weiterhin ist jede Funktion $\varphi_n(a;\, x)$ *in jedem* $I_i(a)$ *konstant.*

Beweis des Hilfssatzes III. Wir werden durch Induktion nach a schließen. Wir zeigen zuerst, daß die Behauptung für $a = 1$ richtig ist. Es sei $\varepsilon_1 (< 1)$ eine positive Zahl; wir wenden den Hilfssatz II mit $p = p_1 = 2^{-1}(\nu_{N+1} - \nu_N)$ und $\varepsilon = \varepsilon_1$ an. Es seien

$$\varphi_n(1;\, x) = \sqrt{2(1+\varepsilon_1)}\, f_{n-\nu_N}(p_1, \varepsilon_1, [0, 1];\, x) \qquad (\nu_N < n \leqq \nu_{N+1})$$

und

$$I_i(1) = \Delta_{i-p_1}^{(p_1)}([0, 1]) \qquad (i = 1, \ldots, 2p_1).$$

Auf Grund von (2.10) bilden diese Treppenfunktionen in [0, 1] ein orthonormiertes System, und aus (2. 11) folgt, daß (2. 14) für $a = 1$ erfüllt ist; weiterhin ist jede Funktion $\varphi_n(1;\, x)$ in jedem $I_i(1)$ konstant. Nach (2. 9) ist

$$\sum_{i=1}^{2p_1} \operatorname{mes}(I_i(1)) = \frac{1}{2(1+\varepsilon_1)} \sum_{i=1}^{2p_1} \operatorname{mes}(\Delta_{i-p_1}) > \frac{1}{2},$$

also ist auch (2. 15) für $a = 1$ erfüllt und die Intervalle $I_i(1)$ sind paarweise disjunkt und von gleicher Länge. Die Summe

$$\sum_{n=\nu_N+1}^{\nu_N+1} c_n \varphi_n(1;\, x)$$

ordnen wir folgenderweise an:

$$\sum_{l=1}^{p_1} c_{\nu_N+2l} \varphi_{\nu_N+2l}(1;\, x) + \sum_{l=0}^{p_1-1} c_{\nu_N+2l+1} \varphi_{\nu_N+2l+1}(1;\, x) = \sum_{l=1}^{2p_1} c_{n(1,l)} \varphi_{n(1,l)}(1;\, x).$$

Ist $x \in I_i(1)$, dann ist $2(1+\varepsilon)x - (1+\varepsilon) \in \Delta_{i-p_1}^{(p_1)}$, somit ergibt sich auf Grund von (2. 12) und (2. 13), daß es Indizes $l_1(1, i)$, $l_2(1, i)$ derart gibt, daß die Funktionswerte $\varphi_{n(1,l)}(1;\, x)$ $(l_1(1, i) \leqq l \leqq l_2(1, i))$ positiv sind und

$$\sum_{l=l_1(1,i)}^{l_2(1,i)} c_{n(1,l)} \varphi_{n(1,l)}(1;\, x) \geqq 2C\sqrt{2(1+\varepsilon_1)}\, c_{\nu_{N+1}} \sqrt{p_1} \log p_1 \geqq C\sqrt{\nu_{N+1} - \nu_N}\, c_{\nu_{N+1}} \log \nu_N$$

gilt. Also ist auch (2. 16) für $a = 1$ erfüllt. Damit ist die Behauptung für $a = 1$ bewiesen.

Wir nehmen nun an, daß der Hilfssatz für eine natürliche Zahl $\alpha(\geqq 1)$ schon bewiesen ist. Es sei $\varepsilon_{\alpha+1}$ eine positive Zahl, für die

$$\sum_{i=1}^{\nu_{N+\alpha}-\nu_{N+\alpha-1}} \operatorname{mes}\left(I_i(\alpha)\right) \frac{1}{1+\varepsilon_{\alpha+1}} > \frac{1}{2} \tag{2. 17}$$

besteht. Nach (2. 15) existiert ein solches $\varepsilon_{\alpha+1}$.

Wir wenden den Hilfssatz II mit $p = p_{\alpha+1} = 2^{-1}(\nu_{N+\alpha+1} - \nu_{N+\alpha})(\nu_{N+\alpha} - \nu_{N+\alpha-1})^{-1}$ und $\varepsilon = \varepsilon_{\alpha+1}$ an. Es sei

$$\varphi_n(\alpha+1; x) = \begin{cases} \varphi_n(\alpha; x) \quad \text{für} \quad \nu_N < n \leqq \nu_{N+\alpha}, \\ \left[\dfrac{2(1+\varepsilon_{\alpha+1})}{\mu(\alpha)}\right]^{\frac{1}{2}} f_{n-\nu_{N+\alpha}-(j-1)2p_{\alpha+1}}\left(p_{\alpha+1}, \varepsilon_{\alpha+1}, I_j(\alpha); x\right) \text{ für} \\ \qquad \nu_{N+\alpha}+(j-1)2p_{\alpha+1} < n \leqq \nu_{N+\alpha}+j2p_{\alpha+1} \quad (1 \leqq j \leqq \nu_{N+\alpha}-\nu_{N+\alpha-1}), \end{cases}$$

wo $\mu(\alpha) = \operatorname{mes}(I_j(a))$ $(j = 1, \ldots, \nu_{N+\alpha}-\nu_{N+\alpha-1})$ bedeutet, ferner sei

$$I_{(j-1)2p_{\alpha+1}+s}(\alpha+1) = \Delta_{s-p_{\alpha+1}}^{(p_{\alpha+1})}(I_j(\alpha)) \qquad (1 \leqq j \leqq \nu_{N+\alpha}-\nu_{N+\alpha-1};\ 1 \leqq s \leqq 2p_{\alpha+1}).$$

Aus der Induktionsannahme und aus (2. 10), (2. 11) folgt leicht, daß diese Treppenfunktionen in $[0, 1]$ ein orthonormiertes System bilden. Aus der Induktionsannahme und aus (2. 11) folgt dann, daß (2. 14) für $a = \alpha+1$ richtig ist. Offensichtlich ist jede Funktion $\varphi_n(\alpha+1; x)$ in jedem $I_j(\alpha+1)$ konstant. Aus der Induktionsannahme und aus den Beziehungen (2. 9) und (2. 17) ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{\nu_{N+\alpha+1}-\nu_{N+\alpha}} \operatorname{mes}\left(I_i(\alpha+1)\right) = \sum_{j=1}^{\nu_{N+\alpha}-\nu_{N+\alpha-1}} \sum_{s=1}^{2p_{\alpha+1}} \operatorname{mes}\left(\Delta_{s-p_{\alpha+1}}^{(p_{\alpha+1})}(I_j(\alpha+1))\right) =$$

$$= \frac{1}{2(1+\varepsilon_{\alpha+1})} \sum_{j=1}^{\nu_{N+\alpha}-\nu_{N+\alpha-1}} \operatorname{mes}\left(I_j(\alpha)\right) \sum_{s=1}^{2p_{\alpha+1}} \operatorname{mes}\left(\Delta_{s-p_{\alpha+1}}^{(p_{\alpha+1})}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\nu_{N+\alpha}-\nu_{N+\alpha-1}} \operatorname{mes}\left(I_j(\alpha)\right) \frac{1}{1+\varepsilon_{\alpha+1}} > \frac{1}{2},$$

also ist auch (2. 15) für $a = \alpha+1$ erfüllt. Offensichtlich sind die Intervalle $I_j(\alpha+1)$ paarweise disjunkt und von gleicher Länge.

Wir werden endlich durch Induktion beweisen, daß auch (2. 16) für $a = \alpha+1$ erfüllt ist. Nach der Induktionsannahme und nach der Definition der Funktionen $\varphi_n(\alpha+1; x)$ $(\nu_N < n \leqq \nu_{N+\alpha})$ gibt es nämlich Indizes $l_1(\alpha, 1)$, $l_2(\alpha, 1)$, so daß die Funktionswerte $\varphi_{n(\alpha,l)}(\alpha+1; x)$ $(l_1(\alpha, 1) \leqq l \leqq l_2(\alpha, 1))$ für $x \in I_1(\alpha)$ positiv sind und

$$\sum_{l=l_1(\alpha,1)}^{l_2(\alpha,1)}{}' c_{n(\alpha,l)} \varphi_{n(\alpha,l)}(\alpha+1; x) \geqq C \sum_{r=1}^{\alpha} \sqrt{\nu_{N+r}-\nu_{N+r-1}}\, c_{\nu_{N+r}} \log \nu_{N+r-1} \tag{2. 18}$$
$$(x \in I_1(\alpha))$$

besteht. Aus (2. 12) und (2. 13) folgt weiter auf Grund der Definition der Funktionen $\varphi_n(\alpha+1; x)$ und der Intervalle $I_i(\alpha+1)$, daß es für $1 \leqq i \leqq p_{\alpha+1}$ einen Index $\bar{\mu}_1(i)$ bzw. für $p_{\alpha+1} < i \leqq 2p_{\alpha+1}$ einen Index $\bar{\mu}_2(i)$ mit folgenden Eigenschaften gibt: die

Funktionswerte $\varphi_{\nu_{N+\alpha}+2m+1}(\alpha+1; x)$ $(0 \leqq m \leqq \bar{\mu}_1(i))$ für $x \in I_i(\alpha+1)$ $(1 \leqq i \leqq p_{\alpha+1})$ bzw. die Funktionswerte $\varphi_{\nu_{N+\alpha+2m}}(\alpha+1; x)$ $(\mu_2(i) \leqq m \leqq p_{\alpha+1})$ für $x \in I_i(\alpha+1)$ $(p_{\alpha+1} < i \leqq 2p_{\alpha+1})$ sind positiv und es gilt

$$\sum_{m=0}^{\bar{\mu}_1(i)} c_{\nu_{N+\alpha}+2m+1} \varphi_{\nu_{N+\alpha}+2m+1}(\alpha+1; x) \geqq \tag{2.19}$$

$$\geqq 2C \left[\frac{2(1+\varepsilon_{\alpha+1})}{\mu(\alpha)} p_{\alpha+1} \right]^{\frac{1}{2}} c_{\nu_{N+\alpha+1}} \log p_{\alpha+1}$$

bzw.

$$\sum_{m=\bar{\mu}_2(i)}^{p_{\alpha+1}} c_{\nu_{N+\alpha}+2m} \varphi_{\nu_{N+\alpha}+2m}(\alpha+1; x) \geqq \tag{2.20}$$

$$\geqq 2C \left[\frac{2(1+\varepsilon_{\alpha+1})}{\mu(\alpha)} p_{\alpha+1} \right]^{\frac{1}{2}} c_{\nu_{N+\alpha+1}} \log p_{\alpha+1}.$$

Die Glieder der Summe

$$\sum_{n=\nu_N+1}^{\nu_{N+\alpha}+2p_{\alpha+1}} c_n \varphi_n(\alpha+1; x)$$

ordnen wir folgenderweise an:

$$\sum_{l=1}^{l_1(\alpha,1)-1} c_{n(\alpha,l)} \varphi_{n(\alpha,l)}(\alpha+1; x) + \sum_{m=1}^{p_{\alpha+1}} c_{\nu_{N+\alpha}+2m} \varphi_{\nu_{N+\alpha}+2m}(\alpha+1; x) +$$

$$+ \sum_{l=l_1(\alpha,1)}^{l_2(\alpha,1)} c_{n(\alpha,l)} \varphi_{n(\alpha,l)}(\alpha+1; x) + \sum_{m=0}^{p_{\alpha+1}-1} c_{\nu_{N+\alpha}+2m+1} \varphi_{\nu_{N+\alpha}+2m+1}(\alpha+1; x) +$$

$$+ \sum_{l=l_2(\alpha,1)+1}^{\nu_{N+\alpha}-\nu_N} c_{n(\alpha,l)} \varphi_{n(\alpha,l)}(\alpha+1; x) = \sum_{l=1}^{\nu_{N+\alpha}+2p_{\alpha+1}-\nu_N} c_{r_l} \varphi_{r_l}(\alpha+1; x).$$

Da nach der Induktionsannahme $(\mu(\alpha))^{-1} \geqq \nu_{N+\alpha} - \nu_{N+\alpha-1}$ gilt, ergibt sich aus (2. 18), (2. 19) und (2. 20), daß für jedes i $(1 \leqq i \leqq 2p_{\alpha+1})$ Indizes $l_1(i)$, $l_2(i)$ existieren, für welche die Funktionswerte $\varphi_{r_l}(\alpha+1; x)$ $(l_1(i) \leqq l \leqq l_2(i))$ im Falle $x \in I_i(\alpha+1)$ positiv sind und

$$\sum_{l=l_1(i)}^{l_2(i)} c_{r_l} \varphi_{r_l}(\alpha+1; x) \geqq C \sum_{r=1}^{\alpha+1} \sqrt{\nu_{N+r} - \nu_{N+r-1}}\, c_{\nu_{N+r}} \log \nu_{N+r-1}$$

besteht. Weiterhin, nach der Induktionsannahme und der obigen Anordnung gibt es für jedes $j (1 < j \leqq \nu_{N+\alpha} - \nu_{N+\alpha-1})$ Indizes $k_1(j)$, $k_2(j)$ für welche die Funktionswerte $\varphi_{r_l}(\alpha+1; x)$ $(k_1(j) \leqq l \leqq k_2(j))$ im Falle $x \in I_j(\alpha)$ nicht-negativ sind und

$$\sum_{l=k_1(j)}^{k_2(j)} c_{r_l} \varphi_{r_l}(\alpha+1; x) \geqq C \sum_{r=1}^{\alpha} \sqrt{\nu_{N+r} - \nu_{N+r-1}}\, c_{\nu_{N+r}} \log \nu_{N+r-1}$$

gilt.

Es sei j_0 $(1 \leqq j_0 < \nu_{N+\alpha} - \nu_{N+\alpha-1})$ eine natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Summe

$$\sum_{n=\nu_N+1}^{\nu_{N+\alpha}+2j_0 p_{\alpha+1}} c_n \varphi_n(\alpha+1;\, x)$$

eine Anordnung

$$\sum_{l=1}^{\nu_{N+\alpha}+2j_0 p_{\alpha+1}-\nu_N} c_{\bar r_l} \varphi_{\bar r_l}(\alpha+1;\, x)$$

mit folgender Eigenschaft hat: Für jedes i $(1 \leqq i \leqq 2j_0 p_{\alpha+1})$ existieren Indizes $\bar l_1(i)$, $\bar l_2(i)$ derart, daß die Funktionswerte $\varphi_{\bar r_l}(\alpha+1;\, x)$ $(\bar l_1(i) \leqq l \leqq \bar l_2(i))$ im Falle $x \in I_i(\alpha+1)$ nicht-negativ sind und

$$\sum_{l=\bar l_1(i)}^{\bar l_2(i)} c_{\bar r_l} \varphi_{\bar r_l}(\alpha+1;\, x) \geqq C \sum_{r=1}^{\alpha+1} \sqrt{\nu_{N+r} - \nu_{N+r-1}}\, c_{\nu_{N+r}} \log \nu_{N+r-1} \tag{2.21}$$

besteht. Weiterhin gibt es für jedes j $(j_0 < j \leqq \nu_{N+\alpha} - \nu_{N+\alpha-1})$ Indizes $\bar k_1(j)$, $\bar k_2(j)$, für welche die Funktionswerte $\varphi_{\bar r_l}(\alpha+1;\, x)$ $(\bar k_1(j) \leqq l \leqq \bar k_2(j))$ im Falle $x \in I_j(\alpha)$ nicht-negativ sind und

$$\sum_{l=\bar k_1(j)}^{\bar k_2(j)} c_{\bar r_l} \varphi_{\bar r_l}(\alpha+1;\, x) \geqq C \sum_{r=1}^{\alpha} \sqrt{\nu_{N+r} - \nu_{N+r-1}}\, c_{\nu_{N+r}} \log \nu_{N+r-1} \tag{2.22}$$

gilt. Aus (2. 12) und (2. 13) folgt auf Grund der Definition der Funktionen $\varphi_n(\alpha+1;\, x)$ und der Intervalle $I_i(\alpha+1)$, daß es für $2j_0 p_{\alpha+1} < i \leqq (2j_0+1)p_{\alpha+1}$ einen Index $\bar{\bar\mu}_1(i)$ $(< p_{\alpha+1})$ bzw. für $(2j_0+1)p_{\alpha+1} < i \leqq 2(j_0+1)p_{\alpha+1}$ einen Index $\bar{\bar\mu}_2(i)$ mit folgenden Eigenschaften gibt: Die Funktionswerte $\varphi_{\nu_{N+\alpha}+2j_0 p_{\alpha+1}+2m+1}(\alpha+1;\, x)$ $(0 \leqq m \leqq \bar{\bar\mu}_1(i))$ sind für $x \in I_i(\alpha+1)$ bzw. die Funktionswerte $\varphi_{\nu_{N+\alpha}+2j_0 p_{\alpha+1}+2m}(\alpha+1;\, x)$ $(\mu_2(i) \leqq m \leqq p_{\alpha+1})$ für $x \in I_i(\alpha+1)$ positiv und es gelten die Ungleichungen

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\bar{\bar\mu}_1(i)} c_{\nu_{N+\alpha}+2j_0 p_{\alpha+1}+2m+1} \varphi_{\nu_{N+\alpha}+2j_0 p_{\alpha+1}+2m+1}(\alpha+1;\, x) \geqq \\ \geqq 2C\left[\frac{2(1+\varepsilon_{\alpha+1})}{\mu(\alpha)}\, p_{\alpha+1}\right]^{\frac{1}{2}} c_{\nu_{N+\alpha+1}} \log p_{\alpha+1}\end{aligned} \tag{2.23}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\sum_{m=\bar{\bar\mu}_2(i)}^{p_{\alpha+1}} c_{\nu_{N+\alpha}+2j_0 p_{\alpha+1}+2m} \varphi_{\nu_{N+\alpha}+2j_0 p_{\alpha+1}+2m}(\alpha+1;\, x) \geqq \\ \geqq 2C\left[\frac{2(1+\varepsilon_{\alpha+1})}{\mu(\alpha)}\, p_{\alpha+1}\right]^{\frac{1}{2}} c_{\nu_{N+\alpha+1}} \log p_{\alpha+1}.\end{aligned} \tag{2.24}$$

Die Glieder der Summe

$$\sum_{n=\nu_N+1}^{\nu_{N+\alpha}+2(j_0+1)p_{\alpha+1}} c_n \varphi_n(\alpha+1;\, x)$$

ordnen wir folgenderweise an:

$$\sum_{l=1}^{\bar{k}_1(j_0+1)-1} c_{\bar{r}_l}\varphi_{\bar{r}_l}(\alpha+1;\,x) + \sum_{m=1}^{p_{\alpha+1}} c_{\nu_{N+\alpha}+2j_0p_{\alpha+1}+2m}\varphi_{\nu_{N+\alpha}+2j_0p_{\alpha+1}+2m}(\alpha+1;\,x) +$$

$$+ \sum_{l=\bar{k}_1(j_0+1)}^{\bar{k}_2(j_0+1)} c_{\bar{r}_l}\varphi_{\bar{r}_l}(\alpha+1;\,x) +$$

$$+ \sum_{m=0}^{p_{\alpha+1}-1} c_{\nu_{N+\alpha}+2j_0p_{\alpha+1}+2m+1}\varphi_{\nu_{N+\alpha}+2j_0p_{\alpha+1}+2m+1}(\alpha+1;\,x) +$$

$$+ \sum_{l=\bar{k}_2(j_0+1)+1}^{\nu_{N+\alpha}+2j_0p_{\alpha+1}-\nu_N} c_{\bar{r}_l}\varphi_{\bar{r}_i}(\alpha+1;\,x) = \sum_{l=1}^{\nu_{N+\alpha}+2(j_0+1)p_{\alpha+1}-\nu_N} c_{\varrho_l}\varphi_{\varrho_l}(\alpha+1;\,x).$$

Nach der Induktionsannahme und nach der Definition der Funktionen $\varphi_n(\alpha+1;\,x)$ ergibt sich aus (2. 21), (2. 22), (2. 23) und (2. 24), daß zu jedem $i\,(1\leqq i\leqq 2(j_0+1)p_{\alpha+1})$ Indizes $\lambda_1(i), \lambda_2(i)$ existieren, für welche die Funktionswerte $\varphi_{\varrho_l}(\alpha+1;\,x)$ $(\lambda_1(i)\leqq l\leqq\lambda_2(i))$ im Falle $x\in I_i(\alpha+1)$ nicht-negativ sind und die Beziehung

$$\sum_{l=\lambda_1(i)}^{\lambda_2(i)} c_{\varrho_l}\varphi_{\varrho_l}(\alpha+1;\,x)\geqq C\sum_{r=1}^{\alpha+1}\sqrt{\nu_{N+r}-\nu_{N+r-1}}\,c_{\nu_{N+r}}\log\nu_{N+r-1}$$

besteht. Weiterhin gibt es für jedes $j\,(j_0+1<j\leqq\nu_{N+\alpha}-\nu_{N+\alpha-1})$ Indizes $\varkappa_1(j), \varkappa_2(j)$, für welche die Funktionswerte $\varphi_{\varrho_l}(\alpha+1;\,x)\,(\varkappa_1(j)\leqq l\leqq\varkappa_2(j))$ im Falle $x\in I_j(\alpha)$ nicht-negativ sind und

$$\sum_{l=\varkappa_1(j)}^{\varkappa_2(j)} c_{\varrho_l}\varphi_{\varrho_l}(\alpha+1;\,x)\geqq C\sum_{r=1}^{\alpha}\sqrt{\nu_{N+r}-\nu_{N+r-1}}\,c_{\nu_{N+r}}\log\nu_{N+r-1}$$

gilt. Mittels Induktion ergibt sich also, daß die Beziehung (2. 16) in einer gewissen Anordnung für jedes $i\,(1\leqq i\leqq\nu_{N+\alpha+1}-\nu_{N+\alpha})$ besteht.

Damit haben wir den Hilfssatz III vollständig bewiesen.

Hilfssatz III wird in folgender Form angewendet:

Hilfssatz IV. *Es seien $N(\geqq 3)$ und $a(\geqq 1)$ natürliche Zahlen, ferner $\{c_n\}$ $(\nu_N<n\leqq\nu_{N+a})$ eine positive, monoton abnehmende Folge. Man kann ein im Intervall* $[0, 1]$ *orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\varphi_n(N, a;\,x)$ $(\nu_N<n\leqq\nu_{N+a})$ und eine einfache Menge*[17] *$F(N, a)$ $(\subseteqq[0, 1])$ mit folgenden Eigenschaften angeben:*

Es gelten die Beziehungen

$$\operatorname{mes}(F(N, a))>2^{-1},\quad \int_0^1\varphi_n(N, a;\,x)\,dx=0\qquad(\nu_N<n\leqq\nu_{N+a});$$

und es gibt für die Summe

$$\sum_{n=\nu_N+1}^{\nu_{N+a}} c_n\varphi_n(N, a;\,x)$$

[17]) Eine Menge heißt einfach, wenn sie die Vereinigung endlichvieler Intervalle ist.

eine Anordnung

$$\sum_{l=\nu_N+1}^{\nu_{N+a}} c_{n_l}\varphi_{n_l}(N, a; x)$$

derart, daß für jedes $x\in F(N,a)$ *von* x *abhängige Indizes* $n(x)$, $m(x)$ $(\nu_N<n(x)<m(x)\leqq \nu_{N+a})$ *existieren mit*

$$\sum_{l=n(x)}^{m(x)} c_{n_l}\varphi_{n_l}(N, a; x)\geqq C\sum_{r=1}^{a}\sqrt{\nu_{N+r}-\nu_{N+r-1}}\log \nu_{N+r-1}\cdot c_{\nu_{N+r}}.$$

Es sei $I=[u,v]$ ein endliches Intervall. Wir setzen

$$\varphi_n(N, a, I; x)=\begin{cases}\varphi_n\left(N, a; \dfrac{x-u}{v-u}\right) & \text{für} \quad u<x<v,\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

$(\nu_N<n\leqq\nu_{N+a})$ und $F(N,a,I)$ bezeichne das mittels der Transformation $y=(v-u)x$ erhaltene Bild von $F(N,a)$ im Intervall I.

Es ist

$$\text{(2.25)} \qquad \operatorname{mes}\bigl(F(N,a,I)\bigr)>2^{-1}\operatorname{mes}(I).$$

Für die Treppenfunktionen $\varphi_n(N,a,I;x)$ bestehen die Beziehungen

$$\text{(2. 26)} \qquad \int_u^v \varphi_i(N,a,I;x)\varphi_j(N,a,I;x)\,dx=\operatorname{mes}(I)\int_0^1\varphi_i(N,a;x)\varphi_j(N,a;x)\,dx,$$

$$\text{(2. 27)} \qquad \int_u^v \varphi_n(N,a,I;x)\,dx=0.$$

Für $x\in F(N,a,I)$ existieren offensichtlich von x abhängige Indizes $n(x)$, $m(x)$ $(\nu_N<n(x)<m(x)\leqq\nu_{N+a})$ derart, daß

$$\text{(2. 28)} \qquad \sum_{l=n(x)}^{m(x)} c_{n_l}\varphi_{n_l}(N,a,I;x)\geqq C\sum_{r=1}^{a}\sqrt{\nu_{N+r}-\nu_{N+r-1}}\,2^{N+r-1}c_{\nu_{N+r}}$$

gilt.

§ 3. Beweis des Satzes II im Falle $\sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{\nu_k}a_{\nu_k}2^k=\infty$.

Ist

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{\nu_k}a_{\nu_k}2^k=\infty,$$

so existiert eine im strengen Sinne monoton wachsende Indexfolge $\{N_m\}$ $(N_1=4)$, für welche die Abschätzung

$$\text{(3. 1)} \qquad \sum_{r=1}^{N_{m+1}-N_m}\sqrt{\nu_{N_m+r}-\nu_{N_m+r-1}}\,2^{N_m+r-1}a_{\nu_{N_m+r}}\geqq 1 \qquad (m=1,2,\dots)$$

gilt.

Mittels Induktion werden wir ein in [0, 1] orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ und eine Folge von einfachen Mengen $F_m(\subseteqq [0, 1])$ $(m=1, 2, \ldots)$ mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

a) Die Mengen F_m sind stochastisch unabhängig und für jedes m gilt

$$\operatorname{mes}(F_m) > \frac{1}{2}; \tag{3. 2}$$

b) die Summe

$$\sum_{n=\nu_{N_m}+1}^{\nu_{N_{m+1}}} a_n \Phi_n(x)$$

läßt sich derart in

$$\sum_{l=\nu_{N_m}+1}^{\nu_{N_{m+1}}} a_{n_l} \Phi_{n_l}(x)$$

anordnen, daß es für jedes $x \in F_m$ Indizes $n_m(x)$, $m_m(x)$ $(\nu_{N_m} < n_m(x) < m_m(x) \leqq \nu_{N_{m+1}})$ gibt mit

$$\sum_{l=n_m(x)}^{m_m(x)} a_{n_l} \Phi_{n_l}(x) \geqq C. \tag{3. 3}$$

Es sei zunächst

$$\Phi_n(x) = \operatorname{sign} \sin 2^n \pi x \qquad (1 \leqq n \leqq \nu_{N_1}).$$

Wir teilen das Intervall [0, 1] in endlichviele Teilintervalle I_r $(1 \leqq r \leqq \varrho)$ derart ein, daß die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq \nu_{N_1})$ in jedem I_r konstant sind. Wir wenden den Hilfssatz IV mit $N=N_1$, $a=N_2-N_1$, $c_n=a_n$ $(\nu_{N_1} < n \leqq \nu_{N_2})$ an und setzen

$$\Phi_n(x) = \sum_{r=1}^{\varrho} \varphi_n(N_1, N_2-N_1, I_r;\, x) \qquad (\nu_{N_1} < n \leqq \nu_{N_2}),$$

$$F_1 = \bigcup_{r=1}^{\varrho} F(N_1, N_2-N_1, I_r).$$

Aus (2. 26) und (2. 27) folgt, daß die Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq \nu_{N_2})$ in [0, 1] ein orthonormiertes System bilden. Aus (2. 25) folgt, daß (3. 2) für $m=1$ erfüllt ist. Aus (2. 28) und (3. 1) folgt, daß b) für $m=1$ richtig ist. Die Menge F_1 ist offensichtlich einfach.

Es sei $\mu(>1)$ eine natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq \nu_{N_\mu})$ und die einfachen Mengen $F_m(\subseteqq [0, 1])$ $(1 \leqq m \leqq \mu-1)$ schon derart definiert sind, daß diese Funktionen in [0, 1] ein orthonormiertes System bilden und die Mengen F_m stochastisch unabhängig sind, ferner daß (3. 2) und b) für $m=1, \ldots$ $\ldots, \mu-1$ erfüllt sind. Dann kann das Intervall [0, 1] in endlichviele Teilintervalle J_s $(1 \leqq s \leqq \sigma)$ eingeteilt werden derart, daß in jedem J_s die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq \nu_{N_\mu})$ konstant bleiben und jede Menge F_m $(1 \leqq m < \mu)$ die Vereinigung gewisser J_s ist. Wir wenden den Hilfssatz IV mit $N=N_\mu$, $a=N_{\mu+1}-N_\mu$, $c_n=a_n$ $(\nu_{N_\mu}<n\leqq\nu_{N_{\mu+1}})$ an und setzen

$$\Phi_n(x)=\sum_{s=1}^{\sigma}\varphi_n(N_\mu, N_{\mu+1}-N_\mu, J_s;\, x)\qquad (\nu_{N_\mu}<n\leqq\nu_{N_{\mu+1}}),$$

$$F_\mu=\bigcup_{s=1}^{\sigma}F(N_\mu, N_{\mu+1}-N_\mu, J_s).$$

Aus (2. 26) und (2. 27) folgt, daß die Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ $(1\leqq n\leqq\nu_{N_{\mu+1}})$ in $[0, 1]$ ein orthonormiertes System bilden. Aus (2. 25) folgt, daß (3. 2) für $m=\mu$ erfüllt ist. Aus (2. 28) und (3. 1) folgt, daß b) für $m=\mu$ richtig ist. F_μ ist offensichtlich einfach und die Mengen F_m $(m=1, \dots, \mu)$ sind stochastisch unabhängig. Durch Induktion erhalten wir also das System $\{\Phi_n(x)\}$ und die Folge $\{F_m\}$ mit den erwähnten Eigenschaften.

Wir betrachten die unter b) angegebene Anordnung

$$\sum_{l=1}^{\infty}a_{n_l}\Phi_{n_l}(x) \tag{3. 4}$$

der Orthogonalreihe (5), deren Existenz soeben bewiesen wurde (hierbei setzen wir $n_l=l$ für $l=1, \dots, \nu_{N_1}$). Ist $x\in\overline{\lim}_{n\to\infty} F_m$, so besteht (3. 3) für unendlich viele m. Wegen $\nu_{N_m}<n_{m}(x)<m_m(x)\leqq\nu_{N_{m+1}}$ $(m=1, 2, \dots)$ folgt daraus, daß die Reihe (3. 4) im Punkt x divergiert. Da die Mengen F_m stochastisch unabhängig sind und (3. 2) für jedes m gilt, ergibt sich durch Anwendung des zweiten Borel—Cantellischen Lemmas

$$\operatorname{mes}\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} F_m\right)=1.$$

Also divergiert die Reihe (3. 4) in $[0, 1]$ fast überall.

Damit haben wir den Satz II im Falle $\sum\sqrt{\bar{\nu}_k}a_{\nu_k}2^k=\infty$ bewiesen.

§ 4. Hilfssätze für den Beweis des Satzes II im Falle $\sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{\bar{\nu}_k}a_{\nu_k}2^k<\infty$

Hilfssatz V. *Es sei* $\{\bar{\varphi}_k(x)\}$ $(k=1, \dots, 2K)$ *ein im Intervall* $[0, \bar{a}]$ *orthonormiertes System von Treppenfunktionen,* c_k $(k=1, \dots, 2K)$ *reelle Zahlen,* $\bar{I}_l=(\bar{u}_l, \bar{v}_l)$ $(\subseteqq[0, \bar{a}])$ $(l=1, \dots, L)$ *paarweise disjunkte Intervalle gleicher Länge* I *mit* $LI<\bar{a}$, $\bar{u}_{l+1}\geqq\bar{v}_l$ $(l=1, \dots, L-1)$, ϱ_l *positive Zahlen und* $\varrho^2=\varrho_1^2+\dots+\varrho_L^2$. *Wir nehmen an, daß jede Funktion* $\bar{\varphi}_k(x)$ *in jedem* $\bar{I}_l$ *konstant ist und für jedes* l *Indizes* $\varkappa_1(l)$, $\varkappa_2(l)$ *existieren mit*

$$c_1\bar{\varphi}_1(x)+c_3\bar{\varphi}_3(x)+\dots+c_{2\varkappa_1(l)+1}\bar{\varphi}_{2\varkappa_1(l)+1}(x)\geqq\varrho_l$$

und

$$c_{2\varkappa_2(l)}\bar{\varphi}_{2\varkappa_2(l)}(x)+c_{2\varkappa_2(l)+2}\bar{\varphi}_{2\varkappa_2(l)+2}(x)+\dots+c_{2K}\bar{\varphi}_{2K}(x)\leqq-\varrho_l$$

für $x\in\bar{I}_l$ $(l=1, \dots, L)$. *Dann gibt es ein in* $[0, 1]$ *orthonormiertes System von Treppen-*

funktionen $\varphi_k(x)$ $(k=1, \ldots, 2K)$ *und paarweise disjunkte Intervalle* $I_l=(u_l, v_l)$ $(\subseteqq[0, 1]; l=1, \ldots, L)$ *mit* $u_{l+1}\geqq v_l$ $(l=1, \ldots, L-1)$ *derart, daß*

$$c_1\varphi_1(x)+c_3\varphi_3(x)+\ldots+c_{2\varkappa_1(l)+1}\varphi_{2\varkappa_1(l)+1}(x)\geqq\sqrt{2I}\varrho,$$

$$c_{2\varkappa_2(l)}\varphi_{2\varkappa_2(l)}(x)+c_{2\varkappa_2(l)+2}\varphi_{2\varkappa_2(l)+2}(x)+\ldots+c_{2K}\varphi_{2K}(x)\leqq-\sqrt{2I}\varrho$$

für $x\in I_l$ *und*

$$\operatorname{mes}(I_l)=\frac{1}{2}\varrho^{-2}\varrho_l^2 \qquad (l=1, \ldots, L)$$

bestehen. Weiterhin ist jede Funktion $\varphi_k(x)$ *in jedem* I_l *konstant.*

Einen ähnlichen Hilfssatz habe ich schon früher benützt[18]).

Beweis des Hilfssatzes V. Es sei $\varrho_0=\bar{u}_0=\bar{v}_0=0$, $\mu_{L+1}=\bar{v}_{L+1}=\bar{a}$ und

$$s=\sum_{l=1}^{L+1}(\bar{u}_l-\bar{v}_{l-1}).$$

Wir setzen:

$$u_l=2^{-1}\varrho^{-2}\sum_{i=0}^{l-1}\varrho_i^2+2^{-1}s^{-1}\sum_{i=1}^{l}(\bar{u}_i-\bar{v}_{i-1}) \qquad (l=1, \ldots, L+1)$$

und

$$v_l=2^{-1}\varrho^{-2}\sum_{i=0}^{l}\varrho_i^2+2^{-1}s^{-1}\sum_{i=1}^{l}(\bar{u}_i-\bar{v}_{i-1}) \qquad (l=0, \ldots, L).$$

Es ist $0=v_0\leqq u_1<v_1\leqq\ldots\leqq u_L<v_L\leqq u_{L+1}=1$. Es sei $I_l=(u_l, v_l)$ $(l=1, \ldots, L)$ und

$$\varphi_k(x)=\begin{cases}\sqrt{2s}\,\bar{\varphi}_k(\bar{v}_l+2s(x-v_l)), & x\in(v_l, u_{l+1}) \quad (l=0, \ldots, L),\\ \sqrt{2I}\,\dfrac{\varrho}{\varrho_l}\,\bar{\varphi}_k\!\left(\bar{u}_l+2I\varrho^2\,\dfrac{x-u_l}{\varrho_l^2}\right), & x\in(u_l, v_l) \quad (l=1, \ldots, L),\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

$(k=1, \ldots, 2K)$.

Offensichtlich erfüllen diese Funktionen und diese Intervalle alle die erforderten Bedingungen.

Damit ist Hilfssatz V bewiesen.

Hilfssatz VI. *Es sei* $a(\geqq 576)$ *eine durch* 16 *teilbare natürliche Zahl, b eine positive ganze Zahl und* $\{d_n\}$ $(n=1, \ldots, ab)$ *eine positive, monoton abnehmende Zahlenfolge mit* $d_{(i-1)a+j}=d_{ia}$ $(j=1, \ldots, a;\ i=1, \ldots, b)$; $m(k)$ *bezeichne die Anzahl derjenigen Indizes n, für welche* $(k-1)d_{ab}^2<d_n^2\leqq kd_{ab}^2$ *besteht und es sei*

$$N=\sum_{k\geqq 1}km(k)(\geqq ab).$$

[18]) K. Tandori, Über die Divergenz der Orthogonalreihen, *Publicationes Math. Debrecen,* **8** (1961), 291–307.

N ist durch 16 teilbar und im Falle $d_{ab}^2 \geqq A^{-1} d_1^2$ $(A>0)$ gilt

$$N \leqq ab(A+1). \tag{4.1}$$

Man kann ein im Intervall $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $f_n(x)$ $(n=1, \ldots, ab)$ mit der folgenden Eigenschaft angeben. Es gibt paarweise disjunkte Intervalle $J_k = (\alpha_k, \beta_k)$ $(\subseteqq [0, 1])$ $(k=1, \ldots, M)$ mit $\alpha_{k+1} \geqq \beta_k$,

$$M \leqq \frac{1}{2} N^2, \tag{4.2}$$

$$\max(\mathrm{mes}(J_1), \ldots, \mathrm{mes}(J_M)) \leqq 2 \min(\mathrm{mes}(J_1), \ldots, \mathrm{mes}(J_M)) \tag{4.3}$$

und

$$\sum_{k=1}^{M} \mathrm{mes}(J_k) = \frac{1}{2} \tag{4.4}$$

derart, daß jede Funktion $f_n(x)$ in jedem J_k konstant ist. Weiterhin hat die Summe

$$\sum_{n=1}^{ab} d_n f_n(x)$$

eine Anordnung

$$\sum_{m=1}^{ab} d_{n_m} f_{n_m}(x)$$

derart, daß es für jedes k $(k=1, \ldots, M)$ Indizes $m_1(k)$, $m_2(k)$ gibt, für die im Falle $x \in J_k$ die Funktionswerte $f_{n_{2\mu-1}}(x)$ $(\mu=1, \ldots, m_1(k))$ positiv und die Funktionswerte $f_{n_{2\mu}}(x)$ $(\mu=m_2(k), \ldots, 2^{-1}ab)$ negativ sind und

$$\sum_{\mu=1}^{m_1(k)} d_{n_{2\mu-1}} f_{n_{2\mu-1}}(x) \geqq D \left[\sum_{n=1}^{ab} d_n^2 \log^2 \frac{d_1^2 + \ldots + d_{ab}^2}{d_n^2} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.5}$$

bzw.

$$\sum_{\mu=m_2(k)}^{2^{-1}ab} d_{n_{2\mu}} f_{n_{2\mu}}(x) \leqq -D \left[\sum_{n=1}^{ab} d_n^2 \log^2 \frac{d_1^2 + \ldots + d_{ab}^2}{d_n^2} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.6}$$

mit einer positiven, von a, b, $\{d_n\}$ und x unabhängigen Konstante D gelten.

Einen ähnlichen Hilfssatz habe ich schon vorherig mitgeteilt[19]).

B e w e i s d e s H i l f s s a t z e s VI. Nach der Definition von N besteht (4. 1). Bezeichne $g_l(p; x)$ für $l=1, \ldots, 2p$ mit $p=2^{-1}N$ die im Hilfssatz I erwähnten Funktionen. Nach ihrer Definition und nach (2. 5) gilt

$$g_l(p; x) = \gamma_l \frac{\sqrt{p}}{k-p-l-1/2} \quad \text{für} \quad x \in \left[\frac{k-1}{p}, \frac{k}{p}\right) \quad (k=1, \ldots, 4p;\ l=1, \ldots, 2p),$$

[19]) S. loc. cit. [18]).

wo

$$\gamma_l \geqq \gamma(>0) \qquad (l=1, \ldots, 2p) \tag{4.7}$$

ist. Es sei $\bar{g}_l(p; x) = g_l(p; x)$ $(l=1, \ldots, 2p-1)$ und $\bar{g}_0(p; x) = g_{2p}(p; x)$.

Für jedes n $(n=1, \ldots, ab)$ bezeichne q_n jene natürliche Zahl, für welche $(q_n-1)d_{ab}^2 < d_n^2 \leqq q_n d_{ab}^2$ besteht. Offensichtlich ist $q_1+\ldots+q_{ab} = N$, $1 \leqq q_n \leqq a^{-1}N$, $2^{-1}d_{ab}^2 \leqq d_n^2 q_n^{-1}$, $q_n \geqq q_{n+1}$ $(n=1, \ldots, ab)$ und $q_n=1$ $((b-1)a<n\leqq ba)$. Die Zahlen

$$1, 2, \ldots, \frac{a}{4}, a+1, a+2, \ldots, a+\frac{a}{4}, 2a+1, 2a+2, \ldots, 2a+\frac{a}{4}, \ldots$$

$$\ldots, (b-1)a+1, (b-1)a+2, \ldots, (b-1)a+\frac{a}{4}$$

$$\frac{a}{4}+1, \frac{a}{4}+2, \ldots, \frac{3}{4}a, a+\frac{a}{4}+1, a+\frac{a}{4}+2, \ldots, a+\frac{3}{4}a,$$

$$2a+\frac{a}{4}+1, 2a+\frac{a}{4}+2, \ldots, 2a+\frac{3}{4}a, \ldots$$

$$\ldots, (b-2)a+\frac{a}{4}+1, (b-2)a+\frac{a}{4}+2, \ldots, (b-2)a+\frac{3}{4}a,$$

$$(b-1)a+\frac{a}{4}+1, (b-1)a+\frac{a}{4}+2, \ldots, (b-1)a+\frac{3}{4}a,$$

$$(b-1)a+\frac{3}{4}a+1, (b-1)a+\frac{3}{4}a+2, \ldots, ba,$$

$$(b-2)a+\frac{3}{4}a+1, (b-2)a+\frac{3}{4}a+2, \ldots, (b-1)a,$$

$$(b-3)a+\frac{3}{4}a+1, (b-3)a+\frac{3}{4}a+2, \ldots, (b-2)a, \ldots$$

$$\ldots, a+\frac{3}{4}a+1, a+\frac{3}{4}a+2, \ldots, 2a, \frac{3}{4}a+1, \frac{3}{4}a+2, \ldots, a$$

bezeichnen wir in dieser Anordnung mit n_m $(m=1,\ldots, ab)$. Nach dem Obigen ist für jedes μ $q_{n_1}+q_{n_3}+\ldots+q_{n_{2\mu-1}} = q_{n_2}+q_{n_4}+\ldots+q_{n_{2\mu}}$. Sei $q_{n_0}=q_{n_{-1}}=0$ und dann setzen wir

$$\bar{f}_{n_{2\mu-1}}(x) = \frac{1}{\sqrt{q_{n_{2\mu-1}}}} \sum_{l=q_{n_{-1}}+q_{n_1}+\ldots+q_{n_{2\mu-3}}}^{q_{n_{-1}}+q_{n_1}+\ldots+q_{n_{2\mu-3}}+q_{n_{2\mu-1}}-1} \bar{g}_{2l+1}(p; x) \qquad (\mu=1, \ldots, 2^{-1}ab)$$

und

$$\bar{f}_{n_{2\mu}}(x) = \frac{1}{\sqrt{q_{n_{2\mu}}}} \sum_{l=q_{n_0}+q_{n_2}+\ldots+q_{n_{2\mu-2}}}^{q_{n_0}+q_{n_2}+\ldots+q_{n_{2\mu-2}}+q_{n_{2\mu}}-1} \bar{g}_{2l}(p; x) \qquad (\mu=1, \ldots, 2^{-1}ab).$$

Offensichtlich bilden diese Treppenfunktionen in [0, 5] ein orthonormiertes System und jede Funktion ist in jedem Intervall $((k-1)p^{-1}, kp^{-1})$ $(k=2^{-1}3p+1, \ldots, 2^{-1}5p)$ konstant.

Es sei $x \in ((k-1)p^{-1}, kp^{-1})$ $(2^{-1}3p<k\leqq 2^{-1}5p)$. Dann gibt es natürliche Zahlen $\mu_1(k)$, $\mu_2(k)$ derart, daß $2(q_{n_1}+q_{n_3}+\ldots+q_{n_{2\mu_1(k)-1}})\leqq k-p<2(q_{n_1}+q_{n_3}+\ldots+q_{n_{2\mu_1(k)-1}}+q_{n_{2\mu_1(k)+1}})$ bzw. $2(q_{n_2}+q_{n_4}+\ldots+q_{n_{2\mu_2(k)-4}})<k-p\leqq 2(q_{n_2}+q_{n_4}+\ldots+q_{n_{2\mu_2(k)-4}}+q_{n_{2\mu_2(k)-2}})$, d. h.

$$N-2\sum_{\mu=\mu_2(k)-2}^{2^{-1}ab} q_{n_{2\mu}}<k-p\leqq N-2\sum_{\mu=\mu_2(k)}^{2^{-1}ab} q_{n_{2\mu}}.$$

Da nach dem Obigen $4^{-1}N+1\leqq k-p\leqq 4^{-1}3N$ und

$$\sum_{\mu=1}^{8^{-1}ab} q_{n_{2\mu-1}} = \sum_{\mu=8^{-1}3ab+1}^{2^{-1}ab} q_{n_{2\mu}} = 8^{-1}N, \quad \sum_{\mu=1}^{8^{-1}3ab} q_{n_{2\mu-1}} = \sum_{\mu=8^{-1}ab+1}^{2^{-1}ab} q_{n_{2\mu}} = 8^{-1}3N$$

ist, ergibt sich $8^{-1}ab\leqq\mu_1(k)\leqq 8^{-1}3ab$ bzw. $8^{-1}ab+2\leqq\mu_2(k)\leqq 8^{-1}3ab+1$ und $\mu_1(k)$ bzw. $\mu_2(k)$ nimmt alle ganzzahligen Werte aus dem Intervall $[8^{-1}ab, 8^{-1}3ab]$ bzw. $[8^{-1}ab+2, 8^{-1}3ab+1]$ an. Nach der Definition der Funktionen $\bar{f}_n(x)$ sind die Funktionswerte $\bar{f}_{n_{2\mu-1}}(x)$ $(\mu=1, \ldots, \mu_1(k))$ positiv bzw. die Funktionswerte $\bar{f}_{n_{2\mu}}(x)$ $(\mu=\mu_2(k), \ldots, 2^{-1}ab)$ negativ; auf Grund von (4. 7) ergibt sich durch einfache Rechnung

$$\sum_{\mu=1}^{\mu_1(k)} d_{n_{2\mu-1}}\bar{f}_{n_{2\mu-1}}(x) \geqq \frac{\gamma}{4}\sqrt{N}\, d_{ab}\log\frac{N}{q_{n_{2\mu_1(k)+1}}} \tag{4. 8}$$

und

$$\sum_{\mu=\mu_2(k)}^{2^{-1}ab} d_{n_{2\mu}} f_{n_{2\mu}}(x) \leqq -\frac{\gamma}{4}\sqrt{N}\, d_{ab}\log\frac{N}{q_{n_{2\mu_2(k)-2}}}. \tag{4. 9}$$

Es seien $k_1<k_2<\ldots<k_{\overline{M}}$ jene natürliche Zahlen k, für welche $2^{-1}3p<k\leqq 2^{-1}5p$ und $2(q_{n_1}+q_{n_3}+\ldots+q_{n_{2\mu_1(k)-1}})\neq k-p$ gilt. Offensichtlich ist $\overline{M}=p-4^{-1}ab\geqq 4^{-1}N$. Nach den Definitionen von $\mu_1(k)$ und $\mu_2(k)$ gilt $\mu_1(k_i)=\mu_2(k_i)-2$, also $2\mu_1(k_i)+1<<2\mu_2(k_i)-2$ $(i=1, \ldots, \overline{M})$. Nach dem Obigen ergeben sich mithin aus (4. 8) und (4. 9) für $x\in \bar{I}^*=((k_i-1)p^{-1}, k_ip^{-1})$ $(i=1, \ldots, \overline{M})$ die Abschätzungen

$$\sum_{\mu=1}^{\mu_1(k_i)} d_{n_{2\mu-1}}\bar{f}_{n_{2\mu-1}}(x) \geqq \frac{\gamma}{4}\sqrt{N}\, d_{ab}\log\frac{N}{q_{n_{2\mu_1(k_i)+1}}}$$

und

$$\sum_{\mu=\mu_2(k_i)}^{2^{-1}ab} d_{n_{2\mu}}\bar{f}_{n_{2\mu}}(x) \leqq -\frac{\gamma}{4}\sqrt{N}\, d_{ab}\log\frac{N}{q_{n_{2\mu_1(k_i)+1}}}.$$

Durch Anwendung des Hilfssatzes V mit

$$\varrho_i=\frac{\gamma}{4}\sqrt{N}\, d_{ab}\log\frac{N}{q_{n_{2\mu_1(k_i)+1}}},\quad \bar{I}_i=\bar{I}_i^*\ (i=1, \ldots, \overline{M}),\quad \varrho=\sqrt{\sum_{i=1}^{\overline{M}}\varrho_i^2}$$

ergibt sich ein in [0, 1] orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\{f_n(x)\}$ mit folgender Eigenschaft: Es gibt paarweise disjunkte Intervalle $I_i = (u_i, v_i)$ ($\subseteq [0, 1]$) ($i = 1, \ldots, \overline{M}$) mit $u_{i+1} \geqq v_i$ und

$$\text{mes}\,(I_i) = \frac{1}{2}\,\varrho^{-2}\varrho_i^2, \tag{4.10}$$

so daß im Falle $x \in I_i$ die Ungleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{\mu_1(k_i)} d_{n_{2\mu-1}} f_{n_{2\mu-1}}(x) \geqq \sqrt{2p^{-1}}\,\varrho \tag{4.11}$$

und

$$\sum_{\mu=\mu_2(k_i)}^{2^{-1}ab} d_{n_{2\mu}} f_{n_{2\mu}}(x) \leqq -\sqrt{2p^{-1}}\,\varrho \tag{4.12}$$

bestehen. Weiterhin ist jede Funktion $f_n(x)$ in jedem I_i konstant.

Nach dem Obigen ist $4^{-1}ab+1 \leqq 2\mu_1(k)+1 \leqq 4^{-1}3ab+1$ und für $2^{-1}3p+1 < k < 2^{-1}5p$ nimmt $2\mu_1(k)+1$ jeden Wert $2r+1$ ($4^{-1}ab+1 < 2r+1 < 4^{-1}3ab+1$) genau $2q_{n_{2r+1}}$-mal an, somit nimmt $2\mu_1(k_i)+1$ für $1 \leqq i \leqq \overline{M}$ jeden Wert $2r+1$ ($4^{-1}ab+1 \leqq 2r+1 \leqq 4^{-1}3ab-1$) genau $(2q_{n_{2r+1}}-1)$-mal an. Daraus folgt, daß $q_{n_{2\mu_1(k_i)+1}}$ für $1 \leqq i \leqq \overline{M}$ jeden Wert $q_{(j-1)a+1}$ ($j = 1, \ldots, b$) genau $4^{-1}a(2q_{(j-1)a+1}-1)$-mal annimmt. Daraus erhalten wir

$$\varrho \geqq 8^{-1}\gamma\sqrt{N}\left[d_{ab}^2 \sum_{j=1}^{b} aq_{(j-1)a+1} \log^2 \frac{N}{q_{(j-1)a+1}}\right]^{\frac{1}{2}} = 8^{-1}\gamma\sqrt{N}\left[\sum_{n=1}^{ab} q_n d_{ab}^2 \log^2 \frac{N}{q_n}\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 8^{-1}\gamma\sqrt{N}\left[\sum_{n=1}^{ab} q_n d_{ab}^2 \log^2 \frac{q_1 d_{ab}^2 + \ldots + q_{ab} d_{ab}^2}{q_n d_{ab}^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

somit ist

$$\varrho \geqq 16^{-1}\gamma\sqrt{N}\left[\sum_{n=1}^{ab} d_n^2 \log^2 \frac{d_1^2 + \ldots + d_{ab}^2}{d_n^2}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.13}$$

Aus (4. 10) ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{\overline{M}} \text{mes}\,(I_i) = \frac{1}{2}. \tag{4.14}$$

Mit geeigneter Einteilung der Intervalle I_i bekommt man paarweise disjunkte Intervalle $J_k = (\alpha_k, \beta_k)$ ($k = 1, \ldots, M$) mit $\alpha_{k+1} \geqq \beta_k$, für die (4. 3) erfüllt ist. Jede Funktion $f_n(x)$ ist offensichtlich in jedem J_k konstant und auf Grund von (4. 11), (4. 12), (4. 13) und (4. 14) sind (4. 4), (4. 5) und (4. 6) erfüllt. Wegen (4. 10) ist

$$2^{-1}\overline{M}^{-1}\log^{-2}N \leqq \text{mes}\,(I_i) \leqq 2^{-1}\overline{M}^{-1}\log^2 N \qquad (i = 1, \ldots, \overline{M}),$$

man kann also M derart wählen, daß auch (4. 2) besteht.

Damit haben wir Hilfssatz VI bewiesen.

Hilfssatz VII. *Es sei ε eine positive Zahl, $a(\geqq 576)$ eine durch 16 teilbare natürliche Zahl, b eine positive ganze Zahl und $\{d_n\}$ $(n=1, \ldots, ab)$ eine positive, monoton abnehmende Zahlenfolge mit $d_{(i-1)a+j} = d_{ia}$ $(j=1, \ldots, a;\ i=1, \ldots, b)$; $m(k)$ bezeichne die Anzahl derjenigen Indizes n, für die $(k-1)d_{ab}^2 < d_n^2 \leqq k d_{ab}^2$ besteht und sei*

$$N = \sum_{k \geqq 1} k m(k) (\geqq ab).$$

N ist durch 16 teilbar und im Falle $d_{ab}^2 \geqq A^{-1} d_1^2$ $(A > 0)$ gilt $N \leqq ab(A+1)$. Man kann ein im Intervall $[-1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $h_n(x)$ $(n=1, \ldots, ab)$ mit folgender Eigenschaft angeben: Es gilt

$$\int_{-1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} h_n(x)\, dx = 0 \qquad (n=1, \ldots, ab);$$

es gibt paarweise disjunkte Intervalle δ_k $(k=1, \ldots, 2M)$ gleicher Länge mit

$$2M \leqq a^2 b^2 (A+1)^2 \tag{4. 15}$$

und

$$\sum_{k=1}^{2M} \operatorname{mes}(\delta_k) = 2, \tag{4. 16}$$

jede Funktion $h_n(x)$ ist in jedem δ_k konstant. Weiterhin hat die Summe

$$\sum_{n=1}^{ab} d_n h_n(x)$$

eine Anordnung

$$\sum_{m=1}^{ab} d_{n_m} h_{n_m}(x)$$

derart, daß es für jedes k $(1 \leqq k \leqq 2M)$ Indizes $m_1(k)$ bzw. $m_2(k)$ gibt, für die im Falle $x \in \delta_k$ $(k = M+1, \ldots, 2M)$ die Funktionswerte $h_{n_{2\mu-1}}(x)$ $(\mu=1, \ldots, m_1(k))$ positiv und im Falle $x \in \delta_k$ $(k=1, \ldots, M)$ die Funktionswerte $h_{n_{2\mu}}(x)$ $(\mu = m_2(k), \ldots$ $\ldots, 2^{-1}ab)$ positiv sind und

$$\sum_{\mu=1}^{m_1(k)} d_{n_{2\mu-1}} h_{n_{2\mu-1}}(x) \geqq R \left[\sum_{n=1}^{ab} d_n^2 \log^2 \frac{d_1^2 + \ldots + d_{ab}^2}{d_n^2} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\sum_{\mu=m_2(k)}^{2^{-1}ab} d_{n_{2\mu}} h_{n_{2\mu}}(x) \geqq R \left[\sum_{n=1}^{ab} d_n^2 \log^2 \frac{d_1^2 + \ldots + d_{ab}^2}{d_n^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

gelten, wobei R eine von $\varepsilon, a, b, \{d_n\}$ und x unabhängige positive Konstante ist.

Beweis des Hilfssatzes VII. Die Bezeichnungen des Hilfssatzes VI wollen wir beibehalten. Es sei $\sigma = \min(\operatorname{mes}(J_1), \ldots, \operatorname{mes}(J_M))$. Wir setzen $\bar{\delta}_k = (\alpha_k, \alpha_k + \sigma)$ $(k=1, \ldots, M)$. Diese sind paarweise disjunkte Intervalle gleicher Länge und wegen (4. 3), (4. 4) gilt

$$1 > S = \sum_{k=1}^{M} \operatorname{mes}(\bar{\delta}_k) \geqq 4^{-1}.$$

Mit $\overline{\overline{\delta}}_k\,(k=1, \ldots, M+1)$ bezeichnen wir der Reihe nach die Intervalle $[0, \alpha_1]$, $[\alpha_1+\sigma, \alpha_2], \ldots, [\alpha_{M-1}+\sigma, \alpha_M], [\alpha_M+\sigma, 1]$. Es sei $w_0=0$, $w_l=\alpha_l+\sigma$ $(l=1, \ldots, M)$ und

$$z_l = 1+\frac{\varepsilon}{1-S}\sum_{k=1}^{l} \operatorname{mes}(\overline{\overline{\delta}}_k) \qquad (l=0, \ldots, M+1).$$

Wir setzen

$$h_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{S}{2}}\, f_n(S(x-S^{-1}(l-1)\sigma)+\alpha_l), & S^{-1}(l-1)\sigma \leqq x < S^{-1}l\sigma \quad (l=1, \ldots, M), \\ \sqrt{\dfrac{1-S}{2\varepsilon}}\, f_n\left(\dfrac{1-S}{\varepsilon}(x-z_{l-1})+w_{l-1}\right), & z_{l-1} \leqq x < z_l \quad (l=1, \ldots, M+1), \end{cases}$$

$h_n(x) = -h_n(-x)$ für $-1-\varepsilon<x<0$ $(n=1, \ldots, ab)$. Weiterhin bezeichne δ_k für $k=M+1, \ldots, 2M$ die Intervalle $(S^{-1}(k-M-1)\sigma, S^{-1}(k-M)\sigma)$, während für $k=1, \ldots, M$ das durch die Transformation $x=-y$ entstehende Bild von δ_k $(k=2M, 2M-1, \ldots, M+1)$.

Auf Grund des Hilfssatzes VI sind alle Bedingungen des Hilfssatzes VII für diese Funktionen und Intervalle offensichtlich erfüllt.

Es sei nun $I=[u, v]$ ein endliches Intervall. Wir setzen

$$h_n(I;\, x) = \begin{cases} h_n\left(2\dfrac{1+\varepsilon}{v-u}x-(1+\varepsilon)\dfrac{v+u}{v-u}\right), & u<x<v, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(n=1, \ldots, ab)$; $\delta_k(I)$ bezeichne das durch die Transformation $x=\dfrac{v-u}{2(1+\varepsilon)}y+\dfrac{v+u}{2}$ in $[u, v]$ entstehende Bild von δ_k. Offensichtlich gelten die Beziehungen

$$\operatorname{mes}(\delta_k(I)) = \frac{\operatorname{mes}(I)}{2(1+\varepsilon)}\operatorname{mes}(\delta_k), \tag{4.17}$$

$$\int_u^v h_n(I;\, x)h_m(I;\, x)\,dx = \frac{\operatorname{mes}(I)}{2(1+\varepsilon)}\int_{-1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} h_n(I;\, x)h_m(I;\, x)\,dx \tag{4.18}$$

und

$$\int_u^v h_n(I;\, x)\,dx=0 \qquad (n=1, \ldots, ab), \tag{4.19}$$

weiterhin gibt es für jedes k $(1\leqq k\leqq 2M)$ von k abhängige Indizes $m_1(k)$ bzw. $m_2(k)$ derart, daß im Falle $x\in\delta_k$ die Funktionswerte $h_{n_{2\mu-1}}(I;\, x)$ $(\mu=1, \ldots, m_1(k))$ oder die Funktionswerte $h_{n_{2\mu}}(I;\, x)$ $(\mu=m_2(k), \ldots, 2^{-1}ab)$ positiv sind und die Ungleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{m_1(k)} d_{n_{2\mu-1}}h_{n_{2\mu-1}}(I;\, x) \geqq Q\left[\sum_{n=1}^{ab} d_n^2 \log^2 \frac{d_1^2+\ldots+d_{ab}^2}{d_n^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{4.20}$$

oder

$$(4.21)\qquad \sum_{\mu=m_2(k)}^{2^{-1}ab} d_{n_{2\mu}} h_{n_{2\mu}}(I;\, x) \geqq Q\left[\sum_{n=1}^{ab} d_n^2 \log^2 \frac{d_1^2+\ldots+d_{ab}^2}{d_n^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

mit einer positiven, von a, b, $\{d_n\}$ und x unabhängigen Konstante Q bestehen.

Es seien $(4\leqq)\, r_1<\ldots<r_i<\ldots$ ganze Zahlen und $\{c_n\}$ eine positive, monoton abnehmende Zahlenfolge, für welche die Bedingungen $c_{\nu_{r_{i+1}}} \geqq A_i^{-1} c_{\nu_{r_i}}$ $(i=1, 2, \ldots)$ und

$$(4.22)\qquad \nu_{r_{i+1}} \geqq \nu_{r_i}^9 (A_i+1)^4 \qquad (i=1, 2, \ldots)$$

mit positiven A_i erfüllt sind. Wir werden zwei Folgen $\{\bar{N}_i\}$, $\{\bar{M}_i\}$ von natürlichen Zahlen mit

$$(4.23)\qquad \bar{N}_i \leqq \nu_{r_i}^4 (A_i+1)^2 \qquad (i=1, 2, \ldots)$$

und

$$(4.24)\qquad \bar{M}_i \geqq \nu_{r_i-1} \qquad (i=1, 2, \ldots)$$

definieren. Es sei $\bar{M}_1=\nu_{r_1}$. Wir wenden den Hilfssatz VI mit $a=\bar{M}_1$, $b=\nu_{r_1}-1$, $d_{(l-1)\bar{M}_1+j} = c_{(l+1)\nu_{r_1}}$ $(l=1, \ldots, \nu_{r_1}-1;\, j=1, \ldots, \nu_{r_1})$ an. Die entsprechende Zahl $2M$ bezeichnen wir mit $\bar{N}_1$. Nach (4. 15) ist (4. 23) erfüllt. Sind die Zahlen $\bar{M}_1, \ldots, \bar{M}_{i_0-1}$, $\bar{N}_1, \ldots, \bar{N}_{i_0-1}$ $(i_0>1)$ derart definiert, daß die Beziehungen (4. 23) und (4. 24) für $i=1, \ldots, i_0-1$ bestehen, so sei $\bar{M}_{i_0}$ jene mit 16 teilbare natürliche Zahl, für welches $\bar{N}_{i_0-1}^{-1}\nu_{r_{i_0}}-16<\bar{M}_{i_0} \leqq \bar{N}_{i_0-1}^{-1}\nu_{r_{i_0}}$ gilt. Wegen (4. 22) und der Induktionsannahme ist (4. 24) für $i=i_0$ erfüllt. Dann wenden wir den Hilfssatz VI mit $a=\bar{M}_{i_0}$, $b=\nu_{r_{i_0}}-1$, $d_{(l-1)\bar{M}_{i_0}+j} = c_{(l+1)\nu_{r_{i_0}}}$ $(l=1, \ldots, \nu_{r_{i_0}}-1;\; j=1, \ldots, \bar{M}_{i_0})$ an; die entsprechende Zahl $2M$ bezeichnen wir mit $\bar{\bar{N}}_{i_0}$. Es sei $\bar{N}_{i_0} = \bar{\bar{N}}_{i_0}\bar{N}_{i_0-1}$. Nach (4. 15) ist (4. 23) auch für $i=i_0$ erfüllt. Die Folgen $\{\bar{N}_i\}$, $\{\bar{M}_i\}$ ergeben sich somit durch Induktion.

Hilfssatz VIII. *Es sei $\{r_i\}$ eine Folge von natürlichen Zahlen $(4\leqq r_1<r_2<\ldots<r_i<\ldots)$ und $\{c_n\}$ eine positive monoton abnehmende Zahlenfolge: wir nehmen an, daß $c_{\nu_{r_{i+1}}} \geqq A_i^{-1}c_{\nu_{r_i}}$ $(i=1, 2, \ldots)$ und (4. 22) mit positiven A_i erfüllt sind. $\{\bar{M}_i\}$, $\{\bar{N}_i\}$ seien Folgen von natürlichen Zahlen (definiert wie in obigen), für die (4. 23), (4. 24) erfüllt sind, die $\bar{M}_i$ seien außerdem durch 16 teilbar $(i=1, 2, \ldots,)$. Es seien i_0 (>1), a^* natürliche Zahlen. Man kann ein im Intervall $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\varphi_n(i_0, a^*;\, x) = \varphi_n(a^*;\, x)$ $(\nu_{r_i}<n\leqq \nu_{r_i}+(\nu_{r_i}-1)\bar{M}_i\bar{N}_{i-1};\; i_0\leqq i\leqq i_0+a^*)$ mit folgenden Eigenschaften angeben:*

Es gilt

$$(4.25)\qquad \int_0^1 \varphi_n(a^*;\, x)\, dx=0;$$

es gibt $\bar{N}_{i_0+a^*}$ paarweise disjunkte Intervalle $I_l(a^*)$ $(\subseteqq[0, 1])$ gleicher Länge mit

$$(4.26)\qquad \sum_{l=1}^{\bar{N}_{i_0+a^*}} \operatorname{mes}(I_l(a^*))>\frac{1}{2};$$

es gibt ferner eine Anordnung

$$\sum_{k=1}^{(\nu_{n_{i_0}}-1)\overline{M}_{i_0}\overline{N}_{i_0-1}+\dots+(\nu_{r_{i_0+a^*}}-1)\overline{M}_{i_0+a^*}\overline{N}_{i_0+a^*-1}} c_{n_k}\varphi_{n_k}(a^*;x)$$

der Summe

$$\sum_{i=0}^{a^*}\ \sum_{n=\nu_{r_{i_0+i}}+1}^{\nu_{r_{i_0+i}}+(\nu_{r_{i_0+i}}-1)\overline{M}_{i_0+i}\overline{N}_{i_0+i-1}} c_n\varphi_n(a^*;x)$$

derart, daß für alle Indizes l natürliche Zahlen $k_1(l)$, $k_2(l)$ existieren, so daß die Funktionswerte $\varphi_{n_k}(a^*;x)$ $(k_1(l)\leqq k\leqq k_2(l))$ nicht-negativ sind und die untere Abschätzung

$$(4.27)\qquad \sum_{k=k_1(l)}^{k_2(l)} c_{n_k}\varphi_{n_k}(a^*;x)\geqq \eta\sum_{i=i_0}^{i_0+a^*}2^{r_i}\left[\overline{N}_{i-1}\sum_{m=1}^{\nu_{r_i}-1}\overline{M}_i c^2_{(m+1)\nu_{r_i}}\right]^{\frac{1}{2}}\qquad (x\in I_l(a^*))$$

mit einer von i_0, a^*, x und von der Folge $\{c_n\}$ unabhängigen positiven Konstante η gilt. Außerdem ist jede Funktion $\varphi_n(a^*;x)$ in jedem $I_l(a^*)$ konstant.

B e w e i s d e s H i l f s s a t z e s VIII. Wir werden durch Induktion nach a^* schließen. Wir zeigen zuerst die Behauptung für $a^*=0$. Es sei ε_{i_0} (<1) eine positive Zahl. Wir teilen das Intervall $[0,1]$ in $\overline{N}_{i_0-1}$ Teilintervalle I^*_λ $(\lambda=1,\dots,\overline{N}_{i_0-1})$ gleicher Länge. Wir wenden den Hilfssatz VII mit $\varepsilon=\varepsilon_{i_0}$, $a=\overline{M}_{i_0}$, $b=\nu_{r_{i_0}}-1$ und $d_{(i-1)\overline{M}_{i_0}+j}=c_{(i+1)\nu_{r_{i_0}}}$ $(i=1,\dots,\nu_{r_{i_0}}-1;\,j=1,\dots,\overline{M}_{i_0})$ an; die entsprechende Zahl $2M$ bezeichnen wir mit $\overline{\overline{N}}_{i_0}$. Es sei weiterhin $I_{k+(\lambda-1)\overline{\overline{N}}_{i_0}}(0)=\delta_k(I^*_\lambda)$ $(k=1,\dots,\overline{\overline{N}}_{i_0};\ \lambda=1,\dots,\overline{N}_{i_0-1})$.

Für jedes λ $(\lambda=1,\dots,\overline{N}_{i_0-1})$ bedeutet Z_λ die geordnete Menge der natürlichen Zahlen

$$\nu_{r_{i_0}}+(\lambda-1)\overline{M}_{i_0}+1,\ \nu_{r_{i_0}}+(\lambda-1)\overline{M}_{i_0}+2,\ \dots,\ \nu_{r_{i_0}}+\lambda\overline{M}_{i_0},$$

$$\nu_{r_{i_0}}+\overline{M}_{i_0}\overline{N}_{i_0-1}+(\lambda-1)\overline{M}_{i_0}+1,\ \nu_{r_{i_0}}+\overline{M}_{i_0}\overline{N}_{i_0-1}+(\lambda-1)\overline{M}_{i_0}+2,\ \dots$$

$$\dots,\ \nu_{r_{i_0}}+\overline{M}_{i_0}\overline{N}_{i_0-1}+\lambda\overline{M}_{i_0},$$

$$\nu_{r_{i_0}}+2\overline{M}_{i_0}\overline{N}_{i_0-1}+(\lambda-1)\overline{M}_{i_0}+1,\ \nu_{r_{i_0}}+2\overline{M}_{i_0}\overline{N}_{i_0-1}+(\lambda-1)\overline{M}_{i_0}+2,\ \dots$$

$$\dots,\ \nu_{r_{i_0}}+2\overline{M}_{i_0}\overline{N}_{i_0-1}+\lambda\overline{M}_{i_0},\ \dots,\ \nu_{r_{i_0}}+(\nu_{r_{i_0}}-2)\overline{M}_{i_0}\overline{N}_{i_0-1}+(\lambda-1)\overline{M}_{i_0}+1,\ \nu_{r_{i_0}}+$$

$$+(\nu_{r_{i_0}}-2)\overline{M}_{i_0}\overline{N}_{i_0-1}+(\lambda-1)\overline{M}_{i_0}+2,\ \dots,\ \nu_{r_{i_0}}+(\nu_{r_{i_0}}-2)\overline{M}_{i_0}\overline{N}_{i_0-1}+\lambda\overline{M}_{i_0}$$

und werden die Funktionen

$$\left[\frac{2(1+\varepsilon_{i_0})}{\operatorname{mes}(I^*_\lambda)}\right]^{\frac{1}{2}} h_m(I^*_\lambda;x)\qquad (m=1,\dots,(\nu_{r_{i_0}}-1)\overline{M}_{i_0})$$

der Reihe nach mit $\varphi_n(0;x)$ $(n\in Z_\lambda)$ bezeichnet.

Wegen (4. 18) bilden diese Treppenfunktionen in [0, 1] ein orthonormiertes System. Wegen (4. 19) ist (4. 25) für $\nu_{r_{i_0}} < n \leqq \nu_{r_{i_0}} + (\nu_{r_{i_0}} - 1)\, \bar{M}_{i_0} \bar{N}_{i_0-1}$ erfüllt. Jede Funktion $\varphi_n(0; x)$ ist in jedem $I_l(0)$ konstant. Wegen (4. 16) und (4. 17) ist (4. 26) für $a^* = 0$ erfüllt. Es sei λ eine natürliche Zahl $(1 \leqq \lambda \leqq \bar{N}_{i_0-1})$. Nach dem Hilfssatz VIII können wegen (4. 20) oder (4. 21) (wo die Glieder der Summen positiv sind), wegen der Monotonie der Folge $\{c_n\}$ und wegen (4. 24) die Funktionen $\varphi_n(0; x)$ $(n \in Z_\lambda)$ in eine Anordnung $\varphi_{n(k,\lambda)}(0; x)$ $(k = 1, \ldots, (\nu_{r_{i_0}} - 1)\bar{M}_{i_0})$ gestellt werden derart, daß für jedes l $((\lambda-1)\bar{\bar{N}}_{i_0} < l \leqq \lambda \bar{\bar{N}}_{i_0})$ Indizes $m_1(l)$ oder $m_2(l)$ existieren, für welche die Abschätzungen

$$\sum_{\mu=1}^{m_1(l)} c_{n(2\mu-1,\lambda)} \varphi_{n(2\mu-1,\lambda)}(0; x) \geqq \eta 2^{r_{i_0}} \left[\bar{N}_{i_0-1} \sum_{m=1}^{\nu_{r_{i_0}}-1} \bar{M}_{i_0} c^2_{(m+1)\nu_{r_{i_0}}} \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (x \in I_l(0))$$

oder

$$\sum_{\mu=m_2(l)}^{2^{-1}(\nu_{r_{i_0}}-1)\bar{M}_{i_0}} c_{n(2\mu,\lambda)} \varphi_{n(2\mu,\lambda)}(0; x) \geqq \eta 2^{r_{i_0}} \left[N_{i_0-1} \sum_{m=1}^{\nu_{r_{i_0}}-1} \bar{M}_{i_0} c^2_{(m+1)\nu_{r_{i_0}}} \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (x \in I_l(0))$$

mit $\eta = (2\sqrt{2})^{-1} Q$ gelten. Daraus ergibt sich unmittelbar, daß (4. 27) in einer gewissen Anordnung für $a^* = 0$ erfüllt ist.

Es sei $\alpha(>1)$ eine natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Behauptung für $a^* = \alpha - 1$ schon bewiesen ist. Es sei $\varepsilon_{i_0+\alpha}(<1)$ eine positive Zahl, für die

$$\text{(4. 28)} \qquad \sum_{l=1}^{\bar{N}_{i_0+\alpha-1}} \operatorname{mes}(I_l(\alpha-1)) \frac{1}{1+\varepsilon_{i_0+\alpha}} > \frac{1}{2}$$

besteht. (Nach (4. 26) existiert ein solches $\varepsilon_{i_0+\alpha}$.) Wir wenden den Hilfssatz VII mit $\varepsilon = \varepsilon_{i_0+\alpha}$, $a = \bar{M}_{i_0+\alpha}$, $b = \nu_{r_{i_0+\alpha}} - 1$ und $d_{(i-1)\bar{M}_{i_0+\alpha}+j} = c_{(i+1)\nu_{r_{i_0+\alpha}}}$ $(i = 1, \ldots, \nu_{r_{i_0+\alpha}} - 1;$ $j = 1, \ldots, \bar{M}_{i_0+\alpha})$ an; die so erhaltenen Funktionen bezeichnen wir mit $\bar{h}_m(x)$ $(m = 1, \ldots, (\nu_{r_{i_0+\alpha}} - 1)\bar{M}_{i_0+\alpha})$ und die entsprechende Zahl $2M$ bezeichnen wir mit $\bar{\bar{N}}_{i_0+\alpha}$. Es sei $I_{k+(\lambda-1)\bar{\bar{N}}_{i_0+\alpha}}(\alpha) = \delta_k(I_\lambda(\alpha-1))$ $(k = 1, \ldots, \bar{\bar{N}}_{i_0+\alpha}; \lambda = 1, \ldots, \bar{N}_{i_0+\alpha-1})$ und

$$\varphi_n(\alpha; x) = \varphi_n(\alpha-1; x) \; (\nu_{r_i} < n \leqq (\nu_{r_i} - 1)\bar{M}_i \bar{N}_{i-1}; \quad i = i_0, \ldots, i_0+\alpha-1).$$

Für jedes λ $(\lambda = 1, \ldots, \bar{N}_{i_0+\alpha-1})$ bedeutet $Z_\lambda^{(\alpha)}$ die geordnete Menge der natürlichen Zahlen

$$\nu_{r_{i_0+\alpha}} + (\lambda-1)\bar{M}_{i_0+\alpha} + 1,\; \nu_{r_{i_0+\alpha}} + (\lambda-1)\bar{M}_{i_0+\alpha} + 2, \ldots, \nu_{r_{i_0+\alpha}} + \lambda \bar{M}_{i_0+\alpha},$$

$$\nu_{r_{i_0+\alpha}} + \bar{M}_{i_0+\alpha}\bar{N}_{i_0+\alpha-1} + (\lambda-1)\bar{M}_{i_0+\alpha} + 1,\; \nu_{r_{i_0+\alpha}} + \bar{M}_{i_0+\alpha}\bar{N}_{i_0+\alpha-1} + (\lambda-1)\bar{M}_{i_0+\alpha} + 2, \ldots$$
$$\ldots, \nu_{r_{i_0+\alpha}} + \bar{M}_{i_0+\alpha}\bar{N}_{i_0+\alpha-1} + \lambda \bar{M}_{i_0+\alpha},$$

$$\nu_{r_{i_0+\alpha}} + 2\bar{M}_{i_0+\alpha}\bar{N}_{i_0+\alpha-1} + (\lambda-1)\bar{M}_{i_0+\alpha} + 1,\; \nu_{r_{i_0+\alpha}} + 2\bar{M}_{i_0+\alpha}\bar{N}_{i_0+\alpha-1} + (\lambda-1)\bar{M}_{i_0+\alpha} + 2, \ldots$$
$$\ldots, \nu_{r_{i_0+\alpha}} + 2\bar{M}_{i_0+\alpha}\bar{N}_{i_0+\alpha-1} + \lambda \bar{M}_{i_0+\alpha}, \ldots, \nu_{r_{i_0+\alpha}} + (\nu_{r_{i_0+\alpha}} - 2)\bar{M}_{i_0+\alpha}\bar{N}_{i_0+\alpha-1} +$$
$$+ (\lambda-1)\bar{M}_{i_0+\alpha} + 1,\; \nu_{r_{i_0+\alpha}} + (\nu_{r_{i_0+\alpha}} - 2)\bar{M}_{i_0+\alpha}\bar{N}_{i_0+\alpha-1} + (\lambda-1)\bar{M}_{i_0+\alpha} + 2, \ldots$$
$$\ldots, \nu_{r_{i_0+\alpha}} + (\nu_{r_{i_0+\alpha}} - 2)\bar{M}_{i_0+\alpha}\bar{N}_{i_0+\alpha-1} + \lambda \bar{M}_{i_0+\alpha}$$

und werden die Funktionen

$$\left[\frac{2(1+\varepsilon_{i_0+\alpha})}{\operatorname{mes}(I_\lambda(\alpha-1))}\right]^{\frac{1}{2}} \bar{h}_m(I_\lambda(\alpha-1);\,x) \qquad (m=1,\ldots,(\nu_{r_{i_0+\alpha}}-1)\bar{M}_{i_0+\alpha})$$

der Reihe nach mit $\varphi_n(\alpha;x)$ $(n\in Z_\lambda^{(\alpha)})$ bezeichnet. Wegen (4. 18) und (4. 19) bilden die Treppenfunktionen $\varphi_n(\alpha;x)$ $(\nu_{r_i}<n\leqq \nu_{r_i}+(\nu_{r_i}-1)\bar{M}_i\bar{N}_{i-1};\ i=i_0,\ldots,i_0+\alpha)$ in $[0,1]$ ein orthonormiertes System. Wegen (4.19) ist (4. 25) auch für die Indizes n mit $\nu_{r_{i_0+\alpha}}<n\leqq \nu_{r_{i_0+\alpha}}+(\nu_{r_{i_0+\alpha}}-1)\,\bar{M}_{i_0+\alpha}\bar{N}_{i_0+\alpha-1}$ erfüllt. Jede Funktion $\varphi_n(\alpha;x)$ ist in jedem $I_l(\alpha)$ konstant. Wegen (4. 16), (4. 17) und (4. 28) ist (4. 26) für $a^*=\alpha$ erfüllt. Es sei λ eine natürliche Zahl $(1\leqq\lambda\leqq\bar{N}_{i_0+\alpha-1})$. Nach dem Hilfssatz VII können wegen (4. 20) oder (4. 21) (wo die Glieder der Summen positiv sind), wegen der Monotonie der Folge $\{c_n\}$ und wegen (4. 24) die Funktionen $\varphi_n(\alpha;x)$ $(n\in Z_\lambda^{(\alpha)})$ in eine Anordnung $\varphi_{\bar{n}(k,\lambda)}(\alpha;x)$ $(k=1,\ldots,(\nu_{r_{i_0+\alpha}}-1)\bar{M}_{i_0+\alpha})$ gestellt werden derart, daß für jedes l $((\lambda-1)\bar{\bar{N}}_{i_0+\alpha}<l\leqq\lambda\bar{\bar{N}}_{i_0+\alpha})$ Indizes $\bar{m}_1(l)$ oder $\bar{m}_2(l)$ existieren, für die die Ungleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{\bar{m}_1(l)} c_{\bar{n}(2\mu-1,\lambda)}\varphi_{\bar{n}(2\mu-1,\lambda)}(\alpha;\,x)\geqq\eta 2^{r_{i_0+\alpha}}\left[\bar{N}_{i_0+\alpha-1}\sum_{m=1}^{\nu_{r_{i_0+\alpha}}-1}\bar{M}_{i_0+\alpha}c^2_{(m+1)\nu_{r_{i_0+\alpha}}}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (x\in I_l(\alpha))$$

und

$$\sum_{\mu=\bar{m}_2(l)}^{2^{-1}(\nu_{r_{i_0+\alpha}}-1)\bar{M}_{i_0+\alpha}} c_{\bar{n}(2\mu,\lambda)}\varphi_{\bar{n}(2\mu,\lambda)}(\alpha;\,x)\geqq\eta 2^{r_{i_0+\alpha}}\left[\bar{N}_{i_0+\alpha-1}\sum_{m=1}^{\nu_{r_{i_0+\alpha}}-1}\bar{M}_{i_0+\alpha}c^2_{(m+1)\nu_{r_{i_0+\alpha}}}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (x\in I_l(\alpha))$$

mit $\eta=(2\sqrt{2})^{-1}Q$ bestehen. Daraus und aus der Induktionsannahme kann mit der im Beweis des Hilfssatzes III angewendeten Methode bewiesen werden, daß (2. 27) auch für $a^*=\alpha$ gilt.

Damit haben wir den Hilfssatz VIII bewiesen.

Nach dem Hilfssatz VIII sind die Funktionen $\varphi_n(a^*;x)$ $(\nu_{r_i}<n\leqq(\nu_{r_i}-1)\bar{M}_i\bar{N}_{i-1};$ $i=i_0,\ldots,i_0+a^*)$ Treppenfunktionen. Daher kann das Intervall $[0,1]$ in endlich-viele Teilintervalle $J_t^*=(\alpha_t^*,\beta_t^*)$ $(t=1,\ldots,\tau)$ eingeteilt werden, derart, daß jede Funktion $\varphi_n(a^*;x)$ in jedem J_t^* konstant ist. Für jene Indizes n $(\nu_{r_{i_0}}<n\leqq\nu_{r_{i_0+a^*+1}})$, für welche die Funktionen $\varphi_n(a^*;x)$ noch nicht definiert sind, setzen wir $\varphi_n(a^*;x)$ der Reihe nach gleich den Funktionen

$$\sum_{t=1}^{\tau}\operatorname{sign}\sin 2^q\pi\,\frac{x-\alpha_t^*}{\beta_t^*-\alpha_t^*} \qquad (q=1,2,\ldots).$$

Wir betrachten die folgende Anordnung der Funktionen $\varphi_n(a^*;x)$ $(\nu_{r_{i_0}}<n\leqq\nu_{r_{i_0+a^*+1}})$: wir stellen die Funktionen $\varphi_n(a^*;x)$ $(\nu_{r_i}<n\leqq\nu_{r_i}+(\nu_{r_i}-1)\,\bar{M}_i\bar{N}_{i-1};\,i=i_0,\ldots,i_0+a^*)$ in der im Hilfssatz VIII angegebenen Anordnung, während die anderen $\varphi_n(a^*;x)$ nach diesen in beliebiger Anordnung folgen.

Aus dem Hilfssatz VIII ergibt sich mithin der

Hilfssatz IX. *Wir nehmen an, daß die Bedingungen des Hilfssatzes VIII erfüllt sind. Dann kann man ein im Intervall* [0, 1] *orthonormiertes System von Treppenfunktionen* $\varphi_n(i_0, a^*; x)$ $(\nu_{r_{i_0}} < n \leqq \nu_{r_{i_0+a^*+1}})$ *mit folgenden Eigenschaften angeben:*

$$\int_0^1 \varphi_n(i_0, a^*; x)\, dx = 0$$

und es gibt eine einfache Menge E mit

$$\text{mes}(E) > \frac{1}{2} \tag{4.29}$$

und eine Anordnung

$$\sum_{k=\nu_{r_{i_0}}+1}^{\nu_{r_{i_0+a^*+1}}} c_{n_k} \varphi_{n_k}(i_0, a^*; x)$$

der Summe

$$\sum_{n=\nu_{r_{i_0}}+1}^{\nu_{r_{i_0+a^*+1}}} c_n \varphi_n(i_0, a^*; x)$$

derart, daß für jedes $x \in E$

$$\sum_{k=\varkappa_1(x)}^{\varkappa_2(x)} c_{n_k} \varphi_{n_k}(i_0, a^*; x) \geqq \eta \sum_{i=i_0}^{i_0+a^*} 2^{r_i} \left[\bar{N}_{i-1} \sum_{m=1}^{\nu_{r_i}-1} \bar{M}_i c^2_{(m+1)\nu_{r_i}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

mit gewissen $\varkappa_1(x), \varkappa_2(x)$ $(\nu_{r_{i_0}} < \varkappa_1(x) < \varkappa_2(x) \leqq \nu_{r_{i_0+a^*+1}})$ *gilt.*

Es sei $I = [u, v]$ ein endliches Intervall. Wir setzen

$$\varphi_n(i_0, a^*, I; x) = \begin{cases} \varphi_n\left(i_0, a^*; \dfrac{x-u}{v-u}\right), & u < x < v, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(n = \nu_{r_{i_0}} + 1, \ldots, \nu_{r_{i_0+a^*+1}})$ und bezeichnen mit $E(I)$ das durch die Transformation $x = (v-u)y + u$ enstehende Bild von E in $[u, v]$. Offensichtlich bestehen dei Beziehungen

$$\text{mes}(E(I)) = \text{mes}(I)\, \text{mes}(E), \tag{4.30}$$

$$\int_u^v \varphi_n(i_0, a^*, I; x)\, dx = 0 \tag{4.31}$$

und

$$\int_u^v \varphi_n(i_0, a^*, I; x) \varphi_m(i_0, a^*, I; x)\, dx = \text{mes}(I) \int_u^v \varphi_n(i_0, a^*; x) \varphi_m(i_0, a^*; x)\, dx. \tag{4.32}$$

Weiterhin gibt es für $x \in E(I)$ von x abhängige natürliche Zahlen $\varkappa_1(x)$, $\varkappa_2(x)$ $(\nu_{r_{i_0}} < \varkappa_1(x) < \varkappa_2(x) \leqq \nu_{r_{i_0+a^*+1}})$ mit

$$\sum_{k=\varkappa_1(x)}^{\varkappa_2(x)} c_{n_k}\varphi_{n_k}(i_0, a^*, I; x) \geqq \eta \sum_{i=i_0}^{i_0+a^*} 2^{r_i}\left[\bar{N}_{i-1}\sum_{m=1}^{\nu_{r_i}-1} \bar{M}_i c^2_{(m+1)\nu_{r_i}}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (x \in E(I)). \tag{4.33}$$

§ 5. Beweis des Satzes II im Falle $\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\nu_k} a_{\nu_k} 2^k < \infty$

Für jedes k bezeichne p_k die kleinste natürliche Zahl p, für die $a^2_{\nu_{k+1}} \geqq \geqq \nu^{-1}_{k+p+1} a^2_{\nu_k+1}$ besteht. Mit $k_1 < k_2 < \ldots < k_m < \ldots$ bezeichnen wir die Indizes, für die $p_{k_m} > 2$ $(m = 1, 2, \ldots)$ gilt. Dann ist nach Annahme

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{p_{k_m}-2}\left[\sum_{n=\nu_{k_m+i}+1}^{\nu_{k_m+i+1}} a_n^2 \log^2 n\right]^{\frac{1}{2}} &\leqq \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{p_{k_m}-2} 2^{k_m+p_{k_m}} a_{\nu_{k_m+i}+1}\sqrt{\nu_{k_m+i+1}} \leqq \\ &\leqq \sum_{m=1}^{\infty} p_{k_m} 2^{k_m+p_{k_m}}\sqrt{\nu_{k_m}}\, a_{\nu_{k_m}}\left[\frac{\nu_{k_m+p_{k_m}-1}}{\nu_{k_m}\nu_{k_m+p_{k_m}}}\right]^{\frac{1}{2}} = O(1)\sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{\nu_k}\, a_{\nu_k} 2^k < \infty.\end{aligned} \tag{5.1}$$

Es seien $l_1 < l_2 < \ldots < l_m < \ldots$ die von ν_{k_m+i} $(i = 1, \ldots, p_{k_m} - 2;\ m = 1, 2, \ldots)$ verschiedenen natürlichen Zahlen. Dann ist $a^2_{\nu_{l_{m+1}}} \geqq \nu^{-1}_{l_m+3} a^2_{\nu_{l_m}+1}$ oder, im Falle $a^2_{\nu_{l_{m+1}}} \geqq \nu^{-1}_{l_m+p_{l_m}+1} a^2_{\nu_{l_m}+1}$ $(p_{l_m} > 2)$, gilt $l_{m+1} \geqq l_m + p_{l_m} - 1$; es sei $\bar{A}_m = \nu_{l_m+3}$ bzw. $\bar{A}_m = \nu_{l_m+p_{l_m}+1}$.

Wir nehmen an, daß (4) erfüllt ist. Dann gilt wegen (5.1)

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{n=\nu_{l_m}+1}^{\nu_{l_m+1}} a_n^2 \log^2 n\right]^{\frac{1}{2}} = \infty.$$

Daraus folgt

$$\sum_{s=0}^{5}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=\nu_{l_{5m+s}}+1}^{\nu_{l_{5m+s+1}}} a_n^2 \log^2 n\right]^{\frac{1}{2}} = \infty.$$

Es gibt also eine ganze Zahl s_0 $(0 \leqq s_0 \leqq 4)$, für die

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=\nu_{l_{6m+s_0}}+1}^{\nu_{l_{5m+s_0+1}}} a_n^2 \log^2 n\right]^{\frac{1}{2}} = \infty$$

besteht. Die Zahlen $l_{6+s_0}, l_{26+s_0}, \ldots, l_{i6+s_0}, \ldots$ bezeichnen wir mit $r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots$. Für diese Folge ist (4.22) mit $A_i = \bar{A}_{s_i+s_0}$ offensichtlich erfüllt und

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\sum_{n=\nu_{r_i}+1}^{\nu_{r_i+1}} a_n^2 \log^2 n\right]^{\frac{1}{2}} = \infty.$$

Daraus ergibt sich wegen der Annahme und wegen der Monotonie der Folge $\{a_n\}$ die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{r_i}\left[\nu_{r_i}\sum_{j=1}^{\nu_{r_i}-1} a^2_{\nu_{r_i}+j\nu_{r_i}}\right]^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{r_i}\left[\bar{N}_{i-1}\sum_{j=1}^{\nu_{r_i}-1} \frac{\nu_{r_i}}{\bar{N}_{i-1}} a^2_{\nu_{r_i}+j\nu_{r_i}}\right]^{\frac{1}{2}} = \infty,$$

wo $\bar{N}_{i-1}$ auf der Seite 214 definiert ist. Da $\bar{M}_i \geqq 2^{-1}N_{i-1}^{-1}\nu_{r_i}$ gilt ($\bar{M}_i$ ist auch auf der Seite 214 definiert), ergibt sich endlich

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{r_i}\left[\bar{N}_{i-1}\sum_{j=1}^{\nu_{r_i}-1} \bar{M}_i a^2_{\nu_{r_i}+j\nu_{r_i}}\right]^{\frac{1}{2}} = \infty.$$

Also gibt es eine im strengen Sinne wachsende Indexfolge $\{N_m\}$ $(N_0=0)$, so daß

$$\sum_{i=N_m+1}^{N_{m+1}} 2^{r_i}\left[\bar{N}_{i-1}\sum_{j=1}^{\nu_{r_i}-1} \bar{M}_i a^2_{\nu_{r_i}+j\nu_{r_i}}\right]^{\frac{1}{2}} \geqq 1 \qquad (m=0, 1, \ldots). \tag{5.2}$$

Durch Induktion werden wir ein in [0, 1] orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}$ von Treppenfunktionen und eine Folge von einfachen Mengen $F_m(\subseteqq [0, 1])$ mit folgenden Eigenschaften definieren:

a) Die Mengen E_m $(m=0, 1, \ldots)$ sind stochastisch unabhängig und für jedes m ist

$$\operatorname{mes}(E_m) > \frac{1}{2}. \tag{5.3}$$

b) Für jedes m gibt es eine Anordnung

$$\sum_{k=\nu_{r_{N_m+1}}+1}^{\nu_{r_{N_{m+1}+1}}} a_{n_k}\Phi_{n_k}(x)$$

der Summe

$$\sum_{n=\nu_{r_{N_m+1}}+1}^{\nu_{r_{N_{m+1}+1}}} a_n\Phi_n(x)$$

derart, daß für jedes $x\in E_m$ Indizes $n_m(x)$, $m_m(x)$ $(\nu_{r_{N_m+1}} < n_m(x) < m_m(x) \leqq \nu_{r_{N_{m+1}+1}})$ gibt mit

$$\sum_{k=n_m(x)}^{m_m(x)} a_{n_k}\Phi_{n_k}(x) \geqq \eta\,(>0). \tag{5.4}$$

Es sei

$$\Phi_n(x) = \operatorname{sign}\sin 2^n\pi x \qquad (n=1, \ldots, \nu_{r_1}).$$

Dann kann das Intervall [0, 1] in endlichviele Teilintervalle I_s $(s=1, \ldots, \sigma)$ eingeteilt werden derart, daß jede Funktion $\Phi_n(x)$ $(n=1, \ldots, \nu_{r_1})$ in jedem I_s konstant ist. Wenden wir den Hilfssatz IX mit $i_0=0$, $a^*=N_1$ an. Wir setzen

$$\Phi_n(x) = \sum_{s=1}^{\sigma} \varphi_n(1, N_1, I_s; x) \qquad (\nu_{r_1} < n \leqq \nu_{r_{N_1+1}})$$

und

$$E_0 = \bigcup_{s=1}^{\sigma} E(I_s).$$

Nach (4. 31) und (4. 32) bilden die Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq \nu_{r_{N_1+1}})$ in [0, 1] ein orthonormiertes System. Nach (4. 29) und (4. 30) ist (5. 3) für $m=0$ erfüllt. Wegen (4. 32) und (5. 2) ist es klar, daß auch b) für $m=0$ erfüllt ist.

Es sei nun m_0 (>1) eine natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ $(n=1, \ldots, \nu_{r_{N_{m_0-1}+1}})$ und die einfachen Mengen $E_0, \ldots, E_{m_0-1}$ schon derart definiert sind, daß a) und b) für $m=0, \ldots, m_0-1$ erfüllt sind. Dann kann man das Intervall [0, 1] in endlichviele Teilintervalle J_t $(t=1, \ldots, \tau)$ einteilen, derart, daß jede Funktion $\Phi_n(x)$ $(1 \leqq n < \nu_{r_{N_{m_0-1}+1}})$ in jedem J_t konstant ist und jede Menge E_m $(0 \leqq m \leqq m_0-1)$ die Vereinigung gewisser J_t ist. Wir wenden den Hilfssatz IX mit $i_0 = N_{m_0-1}$, $a = N_{m_0} - N_{m_0-1}$ an und setzen

$$\Phi_n(x) = \sum_{t=1}^{\tau} \varphi_n(N_{m_0-1}, N_{m_0} - N_{m_0-1}, J_t; x) \qquad (\nu_{r_{N_{m_0-1}+1}} < n \leqq \nu_{r_{N_{m_0}+1}})$$

und

$$E_{m_0} = \bigcup_{t=1}^{\tau} E(J_t).$$

Nach (4. 31) und (4. 32) bilden die Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq \nu_{r_{N_{m_0}+1}})$ in [0, 1 ein orthonormiertes System. Nach (4. 29) und (4. 30) ist (5. 3) für $m=m_0$ erfüllt. Wegen (4. 33) und (5. 2) ist es klar, dass auch b) für $m=0, \ldots, m_0$ besteht. Die Mengen $E_0, \ldots, E_{m_0}$ sind offensichtlich stochastisch unabhängig.

Das angekündigte Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ und die Mengenfolge $\{E_m\}$ mit den erwähnten Eigenschaften ergibt sich mithin durch Induktion.

Wir betrachten die in b) angegebene Anordnung

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \Phi_{n_k}(x) \qquad (\text{für } 1 \leqq k \leqq \nu_{r_1} \text{ ist } n_k = k) \tag{5. 5}$$

der Reihe (5). Ist $x \in \overline{\lim_{m \to \infty}} E_m$, so gilt (5. 4) für unendlich viele m. Daraus folgt, daß die Reihe (5. 5) im Punkt x divergiert. Wegen der stochastischen Unabhängigkeit der Mengenfolge $\{E_m\}$ und wegen (5. 3) folgt durch Anwendung des zweiten Borel—Cantellischen Lemmas

$$\operatorname{mes}\left(\overline{\lim_{m \to \infty}} E_m\right) = 1;$$

d. h. die Reihe (5. 5) divergiert fast überall.

Damit haben wir den Satz II vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 1. Juni 1961)